Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Zobecnění theoremu o přímce Simsonově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 277--281

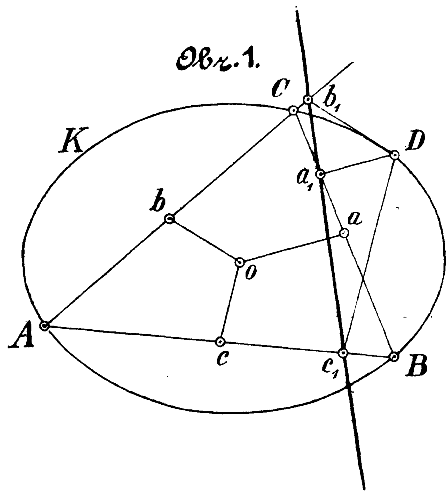
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122979

Zobecnění theoremu o přímce Simsonově.

Dr. Ant. Pleskot v Plzni.

Theorem I.

Budiž dána libovolná kuželosečka K o středu o a v ní vepsán trojúhelník ABC. Středy a, b, c stran BC, CA, AB spojme s bodem o a libovolným bodem D na kuželosečce veďme rovnoběžky ku přímkám oa, ob, oc. Tyto rovnoběžky protnou pořadem strany BC, CA, AB v bodech a_1, b_1, c_1 a tu platí: Body a_1, b_1, c_1 leží v přímce. (Obr. 1.)



Je-li kuželosečka kružnicí, dospíváme tak ku známé větě o přímce Simsonově: Paty kolmic spuštěných s libovolného bodu kružnice opsané o trojúhelník na strany téhož, nacházejí se v přímce.

Theorem II.

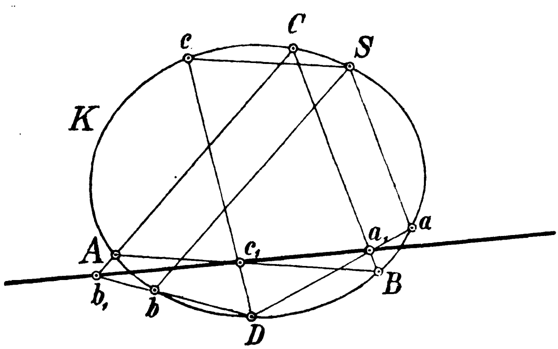
Je-li trojúhelník ABC vepsán v kuželosečku a vedeme-li libovolným bodem S kuželosečky rovnoběžky ku stranám AB, BC, CA, jež protnou kuželosečku v dalších bodech c, a, b, pak body těmito a libovolným bodem D kuželosečky proložené přímky

Dc, Da, Db protínají strany AB, BC, CA v bodech c_1, a_1, b_1, jež leží na téže přímce. (Obr. 2.)

Je-li kuželosečka kružnicí a volíme-li body S a D tak, že spojnice SD jest průměrem, dospíváme opět ku theoremu o přímce Simsonově.

Oba theoremy jsou jen zvláštním případem následujícího obecného theoremu.

Obr. 2.

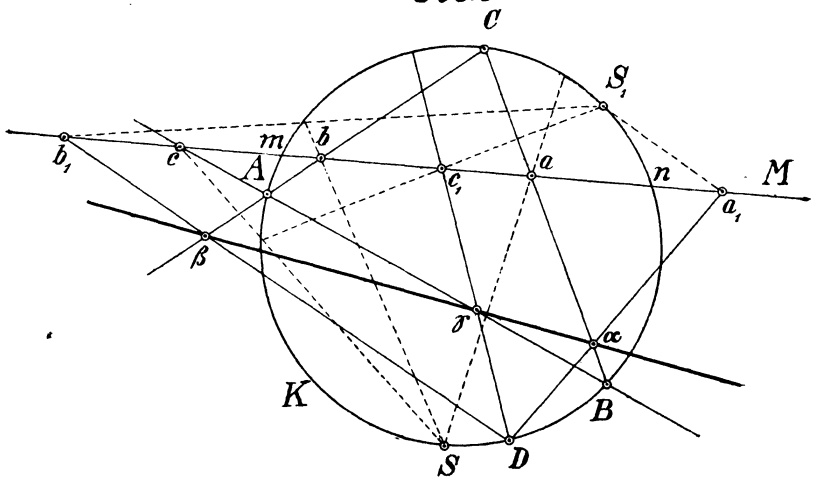


Jest dána kuželosečka K a v ní vepsán trojúhelník ABC. Veďme libovolnou přímku M v rovině této kuželosečky a stanovme na ní dvě projektivní řady tak, aby průsečíky této přímky s kuželosečkon byly dvojnými body těchto řad. Jsou-li průsečíky stran AB, AC, BC s přímkou M, c, b, a a považujeme-li je za body prvé řady a stanovíme-li k nim příslušné body c_1, b_1, a_1 řady druhé, pak platí: Libovolným bodem D na kuželosečce vedené přímky Da_1, Db_1, Dc_1 protínají strany BC, AC, AB v bodech α, β, γ, jež leží na téže přímce.

Důkaz věty této možno mimo jiné způsoby odůvodniti krátce takto. Předpokládejme stranu AB trojúhelníka (obr. 3.) pevnou a bod C za pohyblivý na dané kuželosečce. Libovolný paprsek AC bodem A vedený protne přímku M v bodě b, k němuž stanovme bod sdružený b_1 a sdružený paprsek Db_1. Průsečíkem β těchto dvou paprsků vzniká kuželosečka K_1, procházející vrcholy svazků A a D, průsečíky m a n přímky M

s kuželosečkou K a bodem γ. Vedeme-li dále vrcholem B paprsek BC, který protne přímku M v bodě a a stanovíme-li k němu paprsek sdružený Da_1, pak tyto paprsky svým průsekem α stanoví druhou kuželosečku K_2, která prochází vrcholy svazku B a D, body m, n a opět bodem γ.

Obr. 3.



Probíhá-li tedy vrchol C kuželosečku K, tu možno každému paprsku $\gamma\beta$ přiřaditi paprsek $\gamma\alpha$. Paprsky tyto o společném vrcholu γ, patřícím oběma kuželosečkám K_1, K_2 jsou projektivní. Libovolný paprsek prvního svazku protne totiž kuželosečku K_1 jen v jednom dalším bodě β; přímka $A\beta$ protíná pak kuželosečku K taktéž v jednom dalším bodě C; znajíce bod C dostaneme pak jednoznačně bod α a tedy jednoznačně příslušný paprsek $\gamma\alpha$, ku paprsku danému a naopak. Ukážeme-li nyní, že svazky $\gamma\beta$ a $\gamma\alpha$ jsou takové, že v nich existují tři paprsky, z nichž každý sám sobě přísluší, pak ovšem ku každému paprsku $\gamma\beta$ patří paprsek $\gamma\alpha$, který s ním splývá, t. j. body α, β, γ leží v jediné přímce. Takové tři paprsky lze ale snadno nalézti. Stotožňuje-li se bod C s bodem m aneb n, pak i body β i α stotožňují se s body m aneb n, t. j. ku paprsku $\gamma\beta \equiv \gamma m$

patří $\gamma\alpha \equiv \gamma m$ a ku paprsku $\gamma\beta \equiv \gamma n$ patří $\gamma\alpha \equiv \gamma n$. Abychom totožnost dalších dvou paprsků příslušných dokázali, nechme splynouti bod C s bodem D. Tu pak i β i α splynou též s bodem D, t. j. ku paprsku $\gamma\beta \equiv \gamma D$ patří paprsek $\gamma\alpha \equiv \gamma D$. Tím věta hořejší dokázána.

Dvě projektivní řady $a, b, c \ldots \barwedge a_1, b_1, c_1 \ldots$, jichž dvojné body jsou průsečíky přímky M s kuželosečkou, možno zjednati si způsobem tím, že z libovolných ale pevných dvou bodů S a S_1 promítáme jednotlivé body kuželosečky na přímku M.

Tím možno předešlou větu vysloviti též takto:

Protíná-li libovolná přímka M strany trojúhelníka BC, AC, AB kuželosečce vepsaného v bodech a, b, c a stanovíme-li k bodům těmto body a_1, b_1, c_1 na téže přímce tak, že spojnice Sa s S_1a_1, Sb s S_1b_1 a Sc s S_1c_1 protínají se v bodech na téže kuželosečce, při čemž S a S_1 libovolné body kuželosečky značí, pak přímky Da_1, Db_1, Dc_1 protnou strany BC, AC, AB v bodech α, β, γ, které leží na téže přímce; při tom značí D libovolný bod kuželosečky.

Applikujeme-li v této formě obecný theorem na nekonečně vzdálenou přímku M, při čemž bod D necháme splynouti s bodem S_1, dospíváme k důkazu theoremu II.

Volíme-li dále za řady projektivní řady involutorní, t. j. přiřadíme-li k bodům a, b, c body konjugované a_1, b_1, c_1, hledíc ke kuželosečce a za přímku M opět nekonečně vzdálenou přímku, plyne z obecného theoremu našeho theorem I.

K větám, které jsme zde vyvinuli, možno ihned vysloviti věty duálné. Budiž dána libovolná kuželosečka a o tu opsán trojúhelník ABC a mimo to libovolný bod o v rovině kuželosečky. Tento bod volme za vrchol dvou projektivních svazků, jichž dvojné paprsky ať jsou tečnami ke kuželosečce. Stanovíme-li ku paprskům oA, oB, oC příslušné paprsky, jež libovolnou tečnu t protínají v bodech a, b, c, pak platí věta: Paprsky Aa, Bb, Cc procházejí týmž bodem.

Z věty této dostaneme ku větám dřívějším řadu vět duálných, z nichž zmiňme se jen o těch, které plynou, když za bod o volíme střed kuželosečky a za svazky projektivní svazky konjugovaných přímek jdoucích bodem o.

Tu obdržíme větu: Je-li trojúhelník ABC kuželosečce o středu o opsán, pak sdružené průměry ku oA, oB, oC protínají libovolnou tečnu v bodech a, b, c, jichž spojnice s vrcholy A, B, C dávají tři přímky jdoucí týmž bodem.

Volíme-li za kuželosečku kružnici vepsanou v trojúhelník ABC, pak dospíváme k duálné větě k theoremu Simsonově:

Kolmice se středu o vepsané kružnice spuštěné na přímky oA, oB, oC protínají libovolnou tečnu kružnice v bodech a, b, c a tu platí: přímky Aa, Bb, Cc procházejí týmž bodem. Bod tento možno tedy za duálný bod ku přímce Simsonově pokládati.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Rovnice (136) můžeme též různě transformovati; nejprve první z nich, totiž

$$div\ Pot\ \mathbf{v} = Max\ \mathbf{v},$$

vyměníme-li v ní $\mathbf{v}$ vektorem $\nabla_n v$. Tím nabudeme

$$div\ Pot\ \nabla_n v = Max\ \nabla_n v,$$

aneb, jelikož dle (54^b) a (53)

$$New\ v = \nabla_0\, Pot\ v = Pot\ \nabla_n\ v,$$

též

$$div\ New\ v = Max\ \nabla_n v, \tag{141}$$

kde za ∇_n můžeme opět psáti prostě ∇.

Z rovnice (136^a) plyne dále

$$\nabla\ Max\ \mathbf{v} = \nabla\ div\ Pot\ \mathbf{v} = \nabla\ Pot\ div\ \mathbf{v},$$

užijeme-li relace (131^b); ježto dle (54^b)

$$\nabla\ Pot\ div\ \mathbf{v} = New\ div\ \mathbf{v},$$

obdržíme

$$\nabla\ Max\ \mathbf{v} = New\ div\ \mathbf{v}. \tag{142}$$

Podobně v rovnici (136^b) položme $curl\ \mathbf{v}$ za $\mathbf{v}$; i bude

$$curl\ Pot\ curl\ \mathbf{v} = Lap\ curl\ \mathbf{v}.$$

Vzhledem k (132^b) lze psáti

$$curl\ Pot\ curl\ \mathbf{v} = curl\ curl\ Pot\ \mathbf{v} = curl^2\ Pot\ \mathbf{v};$$

zaveďme-li na pravé straně dle (136^b) opět $Lap\ \mathbf{v}$, nabudeme

$$Lap\ curl\ \mathbf{v} = curl\ Lap\ \mathbf{v}. \tag{143}$$