

Josef Papřok

Aplikace Kummerovy transformace na řadu geometrickou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 326--327

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122974>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Aplikace Kummerovy transformace na řadu geometrickou.

Napsal Jos. Papřok.

Účinek Kummerovy transformace na nekonečnou, konvergentní řadu

$$R = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

jeví se přeměnou její v řadu

$$R = a_0 + \frac{1}{\lambda} a_0 P_0 - \frac{1}{\lambda} \lim_{n=\infty} a_n P_n + \sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) a_{n+1},$$

kde  $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$  jsou čísla jinak libovolná, ale tak zvolená, aby řada  $\sum_0^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) a_{n+1}$  byla konvergentní;

$$\lambda_n = P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1},$$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Řada po této transformaci, jak patrně, bude rychleji konvergovati než řada původní.

Jaká změna se stane s řadou geometrickou

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots, \quad (q > 1)$$

provedeme-li na ní zmíněnou transformaci?

Volme

$$P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_n = 1,$$

a bude

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = q - 1,$$

$$\lambda = \lim_{n=\infty} \lambda_n = q - 1,$$

takže řada

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots = 1 + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q-1} \lim_{n=\infty} \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$= \frac{q}{q-1};$$

přeměnila se nám tedy přímo v součtový vzorec.

Provedeme-li celý Kummerův proces transformační, obdržíme tuto metodu k nalezení součtu nekonečné řady geometrické\*)

Ze složení řady geometrické

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots$$

jest patrné, že

$$a_{n-1} = qa_n,$$

tedy

$$a_0 - a_1 = (q - 1) a_1,$$

$$a_1 - a_2 = (q - 1) a_2,$$

$$a_2 - a_3 = (q - 1) a_3,$$

⋮

a ty sečtením dávají

$$a_0 = (q - 1) [a_1 + a_2 + a_3 + \dots],$$

tedy

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = a_0 + \frac{a_0}{q-1} = \frac{q}{q-1} a_0.$$

Beze změny lze metodu tuto aplikovati na řadu konečnou, takže sečtením  $(n - 1)$  rovnic

$$a_0 - a_1 = (q - 1) a_1,$$

$$a_1 - a_2 = (q - 1) a_2,$$

⋮

$$a_{n-2} - a_{n-1} = (q - 1) a_{n-1}$$

obdržíme součtový vzorec

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1}.$$

---

\*) Pokud mi známo, nebylo této metody ještě použito, ač jest velmi jednoduchá.