August Seydler

Logarithmický potencial o třech proměnných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 4, 169--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122964

šroubový pohyb rozloží se pak na pravý a na levý vektor, jak genius Cliffordův dokázal. „Theorie šroubů“ odhodí pak poslední lpící na ní nesrovnalosti a plně vyvine se ve velkolepých tvarech. Potom“ —

Leč tu pravil předseda, že se obává, aby diskusse nezačala se příliš vzdalovati předmětu. Co se jeho týče, že jest spokojen s výsledky pokusů, i když byly provedeny ve starém mělkém prostoru Euklidově. Uvedl kommissi na mysl, že práce jejich jest ukončena, neboť byli zjistili každou věc, týkající se tuhého tělesa, která jim byla uložena. Vyslovil naději ve všeobecný souhlas, praví-li, že vyšetření bylo pro ně velmi poučné. Byliť se zanášeli studiem přírody. Byliť přikročili ku problemům svým v duchu skutečně filosofickém, a odměna, kterou obdrželi, dokázala, že

„Příroda nikdy nezradila srdce,
jež v pravdě ji milovalo.“

Logarithmický potencial o třech proměnných.

Oznamuje

Dr. A. Seydler.

Pojem potencialného úkonu, obmezený původně na výraz:

$$(1)\quad V=\int\frac{dm}{r}=\int\int\int\frac{h\,da\,db\,dc}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

obdržel během času v různých směrech rozšíření.

Záhy poznáno, že pro rovinu jakožto prostor dvourozměrný, v němž polohy bodů na *dvou* souřadnicích jsou závislé, podobnými vlastnostmi jako v prostoru trojrozměrném úkon V se honosí úkon:

$$(2)\quad V'=\int\log r\,.\,dm=\int\int\log\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,.\,h\,da\,db,$$

jenž tudíž slove logarithmickým úkonem potencialným.

K nejdůležitějším vlastnostem potencialného úkonu náleží, že vyhovuje pro body položené mimo působící hmotu (t. j. pro ty body, jichž souřadnice x, y, z s žádnou skupinou souřadnic a, b, c nesplývají) rovnici Laplace-ově:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V,$$

kdež Δ jest operační symbol významu patrného.

Podobně platí v dvourozměrném prostoru o úkonu V':

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = 0.$$

V prostoru trojrozměrném upozornil *Lamé* na nový úkon:

$$U = \int r\,dm, \tag{3}$$

vyhovující rovnicím:

$$\Delta U = 2\int \frac{dm}{r} = 2V, \quad \Delta\Delta U = 2\Delta V = 0.$$

Úkon U nazývá Lamé potencialem přímým (direct) proti úkonu V, jemuž uděluje název potencialu obráceného (inverse), za příčinou způsobu, jakým v oba vchází vzdálenosť r.

Nověji upozornil *Boussinesq* v řadě pojednání, jež sloučil v samostatný spis: Application des potentiels à l'étude de l'equilibre et du mouvement des solides élastiques (1885), na nový útvar mathematický, jejž nazval *logarithmickým potencialem*) o třech proměnných* (potentiel logarithmique à trois variables):

$$\psi = \int \log(z - c + r)\,dm, \tag{4}$$

kde opět

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c^2).$$

---

*) Pokládám sice za velmi důležité, aby se vždy šetřilo rozdílu mezi *potencialným úkonem* V a *potencialem* $\int V dm$, rozdílu nejprve Clausiem určitě vytknutého; váhám však přece, měniti terminus od objevitele té které funkce, zde od Boussinesqua zavedený.

Úkon ψ musíme dobře rozeznávati od úkonu V′ dříve uvedeného. Výpočtem snadno ukážeme, že jest

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\int\frac{dm}{r}=\mathrm{V},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}=-\int\frac{z-c}{r^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=+\int\frac{z-c}{r^3}\,dm,$$

tudíž i:

$$\Delta\psi=0,$$

t. j. *logarithmický potencial o třech proměnných vyhovuje Laplaceově rovnici.*

Prospěch kynoucí ze zavedení tohoto úkonu pro mathematickou fysiku poznáme snadno z následujícího příkladu (Boussinesq, l. c. § I). Buďtež u, v, w složky pošinutí toho bodu hmotného útvaru, jehož původní souřadnice jsou x, y, z. Položme pro krátkosť

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z};$$

základní rovnice rovnováhy stavu deformovaného, způsobeného vnějšími silami (na př. tlaky na povrch hmoty působícími), lze jak známo uvésti na tvar:

$$(5)\qquad\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta^2u&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\Delta^2v&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\Delta^2w&=0,\end{aligned}$$

kdež jsou λ, μ oba koefficienty pružnosti dané hmoty (v označení od Lamé-ho zavedeném).

Značí-li φ buď funkci ψ samu, aneb kterýkoli differencialní poměr její dle proměnných x, y, z, dokážeme snadno, že lze rovnicím (5) vyhověti výrazy:

$$(6) \quad u = -z\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\varphi - z\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\Theta = \frac{2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Složky napjetí na roviny kolmé k ose Z jsou:

$$(7) \quad \begin{aligned} X_z &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right), \\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -2\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right), \\ Z_z &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\Theta = -2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right). \end{aligned}$$

Vhodnosť nalezeného řešení (6) rovnic (5) a bližší určení úkonu φ bude ovšem záviseti na způsobu povrchových podminek dané hmoty. Mysleme si na př. hmotu omezenou pouze na jedné straně nekonečnou rovinou XY. Na povrchu této hmoty, t. j. v různých bodech roviny XY nechť působí dané normalné tlaky, a předpokládejme, že též pošinutí bodů této roviny jsou pouze normalná.*) Předpokládejme jinými slovy:

$$Z_z = F(x, y), \quad v = 0, \quad w = 0 \text{ pro } z = 0.$$

K těmto podminkám, pro čásť povrchu rovinou XY danou platným, musíme připojiti podminky, platící pro nekonečně vzdálené části povrchu, tedy pro kouli opsanou poloměrem $R = \infty$. Snadno poznáme, že musí býti pro části ty u, v, w malými veličinami prvního stupně, tedy

$$u = AR^{-1}, \quad v = BR^{-1}, \quad w = CR^{-1} \text{ pro } R = \infty.$$

Souboru těchto podminek vyhovuje úkon

$$\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \int\frac{dm}{r};$$

---

*) Tato skupina daných podminek representuje případ *možný,* třeba bylo jeho realisování snad obtížné. Ovšem musí v případě tom na povrchu vedle *daných* normalných tlaků Z_z působiti ještě jakési síly tangencialné: X_z, Y_z, jež se právě podminkou další ($v = 0$, $w = 0$) blíže určují.

na základě jeho vypočítáme další data problemu dle (6) a (7).

Nebudeme se však pouštěti do dalších podrobností tohoto neb podobných problemů; úmyslem naším bylo spíše upozorniti na uvedený spis Boussinesqův, jejž pokládáme za jeden z nejvážnějších příspěvků k theorii pružnosti.

Při této příležitosti chceme poukázati ještě k jinému spisu téhož autora, totiž: Essai sur la théorie des eaux courantes, jenž vyšel r. 1877 mezi Mém. prés. par divers savants à l'acad. des sciences de l'Inst. de Fr. Obsahuje důležité příspěvky k řešení nejobtížnějších problemů hydrodynamických, na př. slavného problemu výtoku kapalin z nádob otvorem opatřených.

Příspěvek k nauce o relativních chybách.*)

Podává

F. Hoza,

ředitel vyšších realných škol v Hradci Králové.

1. Pozorujme funkci $f(x)$ v těch mezích, ve kterých lze užiti poučky Taylorovy:

$$f(a+\alpha)=f(a)+\frac{\alpha}{1}f'(a)+\frac{\alpha^2}{1.2}f''(a)+\frac{\alpha^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots.$$

a dejme tomu, že a značí neúplné číslo spojené s chybou α, tak sice, že $a+\alpha$ jest číslo doplněné. Potom bude:

$$\frac{f(a+\alpha)-f(a)}{\alpha}=f'(a)+\frac{\alpha}{1.2}f''(a)+\frac{\alpha^2}{1.2.3}f'''(a)+\ldots$$

A jestliže všecky členy pravé strany od druhého počínaje lze oproti členu prvému pro malé hodnoty α vynechati, obdržíme

$$\Delta=\frac{f(a+\alpha)-f(a)}{f(a)}=\frac{\alpha f'(a)}{f(a)},$$

čímž vyjádřena jest relativní chyba Δ neúplného čísla $f(a)$.

---

*) Viz Čas. math. XVIII. p. 5.