Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

# Drobné zprávy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 18 (1889), No. 4, 188--200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122959

řádek a veškero světlo, ztrácejí se sobě samým a bloudí v nevysvětlitelných nesnázích.

Nedopustíme se však této chyby nikdy, následujeme-li pořádku geometrie. Rozumová tato věda jest velmi vzdálena toho, definovati tato základná slova: prostor, čas, pohyb, rovnosť, většina, zmenšení, celek a ostatní, jimž každý rozumí sám od sebe. Ale vyjma tyto, ostatní výrazy, jichž užívá, jsou zde tak vysvětleny a definovány, že není třeba slovníku na porozuměnou jen jediného z nich, tak, že — řekněme krátce — všecky tyto výrazy jsou dokonale srozumitelnými, buď rozumem přirozeným anebo definicemi, jež o nich dává.

Tak tedy geometrie vyhýbá se všem chybám, na které by mohla naraziti při prvním kroku, který záleží v tom, definovati pouze ty věci, které toho potřebují. Ona rovněž tak si vede vzhledem ke kroku druhému, který záleží v tom, dokazovati proposice, které nejsou zřejmými. Neboť, když byla přišla ku prvním pravdám známým, zastavuje se při nich a žádá, aby připuštěny byly, nemajíc nic jasnějšího, aby je dokázala, tak, že všecko, co geometrie předkládá, jest dokonale zdůvodněno, buď rozumem přirozeným anebo důkazy. Odtud jde, že, jest-li tato věda nedefinuje a nezdůvodňuje všecko, jedině z toho důvodu to činí, že je nám to nemožno. Ale vzhledem k tomu, že příroda nahrazuje to, čeho tato věda nepodává, tož její pořádek u vyhledávání pravdy nepodává sice dokonalosť větší než lidskou, ale dokonalosť, které lidé dosíci mohou, má všecku.

(Pokračování.)

---

# Drobné zprávy.

## I.

Napsal

**A. Strnad,**

professor v Hradci Králové.

**Dvě věty z nauky o číslech.** Budiž N libovolné celé číslo, $N_1$ součet všech prvočísel soudělných s N (čítaje v to vždy 1, číslo dané N pak tenkráte, je-li samo prvočíslem). Utvořme z čísla $N_1$ číslo $N_2$ týmž způsobem, jakým vzniklo $N_1$ z čísla N, a postupujme tak dále. Poslední N jest vždy buď 3 nebo 6. Ku př. $N = 13860 = 2^2.3^2.5.7.11$, $N_1 = 29$, $N_2 = 30 = 2.3.5$, $N_3 = 11$, $N_4 = 12 = 2^2.3$, $N_5 = 6$.

Tuto větu objevil ženevský professor *Oltramare*. Obdobného rázu jest následující věta, kterou empiricky našel proslulý belgický mathematik *Catalan*, a jejíž důkaz, pokud nám známo, není dosud podán.

Nechať jest N libovolné celé číslo, S součet všech jeho dělitelů, $N_1 = S - N$. Potom buď $S_1$ součet všech dělitelů čísla $N_1$ a mimo to $N_2 = S_1 - N_1$. Pokračujeme-li tak dále, bude poslední N buď 1 aneb 0. Příklad: $N = 20$, $S = 42$; $N_1 = 22$, $S_1 = 36$; $N_2 = 14$, $S_2 = 24$; $N_3 = 10$, $S_3 = 18$; $N_4 = 8$, $S_4 = 15$; $N_5 = 7$, $S_5 = 8$; $N_6 = 1$.

*(Mathesis, tome VII, p. 272 et tome VIII, p. 129).*

**Z arithmetiky šachové** podává výtečný algebrista francouzský *Jordan* řešení úlohy: Kolik nejméně skoků jest učiniti jezdci na šachovnici, aby z pole, na kterém stojí, dostal se na dané pole jiné?

Předpokládejme šachovnici neobmezenou, na čtvercové pole rozdělenou; stranu pole takového zvolme za jednotku délky. Mysleme si středem jednoho pole dvě osy souřadné, rovnoběžné ku stranám šachovnice. Lze pak každé pole stanoviti souřadnicemi $x$, $y$ středu jeho; budou to čísla celá a, chceme-li, též kladná. Původní postavení jezdcovo budiž (0, 0), z něhož má přijíti na pole $(m, n)$; nejmenší počet skoků k tomu potřebných označme M. Z pravidel hry šachovní snadně plynou podmínky

$$M \gtreqless E\left(\frac{m+1}{2}\right), \quad M \gtreqless E\left(\frac{m+n+2}{3}\right), \quad M \equiv m+n \pmod{2}.$$

Dle povahy čísel $m$, $n$ sluší pak rozeznávati různé případy, jichž výsledky tuto sestaveny:

*a)* $m \gtreqless 2n$

$m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda$, $M = m'$,

$m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda$, $M = m' + 1$,

$m = 2m'$, $m' - n = 2\lambda + 1$, $M = m' + 1$,

$m = 2m' + 1$, $m' - n = 2\lambda + 1$, $M = m' + 2$;

*b)* $m < 2n$, $m + n = \mu$,
$\mu = 3\mu'$, $M = \mu'$,
$\mu = 3\mu' + 1$, $M = \mu' + 1$,
$\mu = 3\mu' + 2$, $M = \mu' + 2$.

Úloha takto řešená jest zvláštním případem úlohy obecnější, která také v pojednání Jordanově důmyslného dochází řešení:

Dána-li neurčitá soustava linearných rovnic s celistvými součiniteli, vyhledati ze soustav řešení onu, ve které součet neznámých jest minimum.

*(Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo II. 1888, p. 59).*

**Z theorie funkcí.** Buďtež $f_1, f_2, \ldots, f_n$ realné funkce realné proměnné $x$; funkce ty, jakož i jich derivace až včetně do $(n-1)$-ní, nechať jsou konečny a spojity.

Potom jest

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_2(y_1) & \ldots & f_n(y_1) \\ f_1(y_2) & f_2(y_2) & \ldots & f_n(y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(y_n) & f_2(y_n) & \ldots & f_n(y_n) \end{vmatrix},$$

značí-li $y_k$ hodnotu obsaženou mezi nejmenším a největším z čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.

V této podobě rozšířil *Stieltjes* zajímavý a též geometrického upotřebení schopný theorem, podaný již dříve *Schwarzem*, dokázav jej zároveň způsobem zcela jednoduchým.

*(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1888 p. 26).*

**Míra složitosti geometrických konstrukcí.** Každá geometrická konstrukce skládá se z řady jednoduchých výkonů založených na užití pravítka neb kružítka, po případě též pravítka trojúhelného.

Základné výkony (opérations élémentaires), k nimž tyto přístroje slouží, jsou:

*a*) 1. Přiložiti hranu pravítka k dané tečce (výkon $A_1$),
2. Vyrýsovati přímou čáru (výkon $A_2$).

*b*) 1. Zasaditi špičku kružítka do tečky dané (výkon $B_1$).
2. Zasaditi špičku kružítka do libovolného místa dané čáry (výkon $B_2$).
3. Vyrýsovati kruhovou čáru (výkon $B_3$).

*c*) 1. Přiložiti hranu pravítka trojúhelného ku hraně pravítka druhého aneb naopak (výkon $C_1$).
2. Pošinouti trojúhelné pravítko rovnoběžně tak, až hrana jeho prochází danou tečkou (výkon $C_2$).

Řešení každé strojné úlohy geometrické lze rozložiti v řadu těchto výkonů základních a vyjádřiti výrazem

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2,$$

kdež součinitele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ značí počet příslušných výkonů. Připustíme-li, že každý ze základních výkonů má stupeň složitosti (simplicité) rovný 1, bude stupeň složitosti jakékoli konstrukce geometrické stanoven počtem výkonů základních, potřebných k jejímu provedení.

Zásady tyto vyslovil *Lemoine* a objasnil je četnými příklady, z nichž tuto jen některé připomeneme.

Zobraziti spojnici dvou bodů. Řešení $2A_1 + A_2$, složitost 3.

Danou úsečku přenésti na přímku danou od bodu daného. Řešení $2B_1 + B_2 + B_3$, složitost 4.

Rozpůliti daný úhel. Řešení $2A_1 + A_2 + 3B_1 + 3B_2$, složitost 9.

Sestrojiti kružnici třemi danými body. Řešení $4A_1 + 2A_2 + 5B_1 + 4B_3$, složitost 15.

Příkladů o užití pravítka trojúhelného autor neuvádí; ale snadno poznáme, že ku př. úloha: „Bodem vésti rovnoběžku k dané přímce“, řešena pošinutím pravítka, vyžaduje výkonů $2A_1 + A_2 + C_1 + C_2$ a jest tudíž složitosti 5. Řešení téže úlohy užitím kružítka má složitost 11.

Spisovatel vyšetřuje zvláště sestrojení kružnice dotyčné ke třem kružnicím daným; v obecném případě, majícím 8 realných řešení, přichází ku překvapujícímu výsledku, že řešení Viètovo dle staré methody má složitost 335, kdežto elegantní řešení

Bobilierovo a Gergonneovo methodami novější geometrie má složitost 500.

*(Mathesis, tome VIII. 1888, p. 217 et 241).*

**Orientace soustavy přímek.** Pojem tento uvedl do geometrie *Laguerre*. Jsou-li v rovině dány dvě soustavy přímek A a A′; je-li X libovolná osa v rovině; tvoří-li přímky A s touto osou úhly, jichž součet jest S a přímky A′ úhly, jichž součet jest S′; je-li konečně $S - S' = n\pi$ ($n$ celé číslo), pravíme, že soustavy A a A′ mají stejnou *orientaci*. Tato vlastnosť jest patrně neodvisla od volby osy X a závisí jen na směru přímek daných.

Tvoří-li přímky soustavy A s osou X pravidelné soustavy úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, veďme k nim počátkem rovnoběžky; souhrn těchto bude míti rovnici

$$f(x, y) \equiv (y - a_1 x)(y - a_2 x) \ldots (y - a_n x) = 0.$$

Jest pak $$\alpha_k = \operatorname{arc\,tg} a_k,$$

$$e^{2i\alpha_k} = \cos 2\alpha_k + i \sin 2\alpha_k = \frac{i - a_k}{i + a_k},$$

pročež

$$e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)} = \frac{(i - a_1)(i - a_2) \ldots (i - a_n)}{(i + a_1)(i + a_2) \ldots (i + a_n)} = \frac{f(+1, i)}{f(-1, i)}.$$

Poněvadž hodnota tohoto výrazu se nezmění, zvětšíme-li neb zmenšíme-li součet úhlů $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ o několik $\pi$, jest orientace přímek, daných stejnorodou rovnicí $f(x, y) = 0$, stanovena výrazem

$$f(+1, i) : f(-1, i).$$

V této analytické formě vyvodil pojem orientace přímek *Humbert* (Sur l'orientation des systèmes de droites), a ukázal výhodnosť užití jeho v theorii křivek a ploch. Toho základem jest věta:

**Má-li proměnná soustava přímek, jejíž rovnice obsahuje racionálně jeden parametr, zachovávati v rovině stálou orientaci, k tomu jest nutno i dostatečno, aby, prochází-li několik přímek soustavy jedním úběžným bodem kruhovým, procházelo tolikéž přímek soustavy druhým bodem kruhovým.**

Obsahuje-li ona rovnice parametr ve stupni prvém, obdržíme větu:

Dán-li svazek křivek stupně $n$ a mají-li asymptoty dvou z těchto křivek stejnou orientaci, mají tutéž orientaci asymptoty všech křivek svazku.

Užitím zákona duality plyne z prvé věty tento výsledek:

Dána buď soustava křivek, jichž rovnice v souřadnicích přímkových obsahuje racionálně jeden parametr; má-li souhrn tečen, vedených ku každé z těchto křivek určitým bodem daným, zachovávati stálou orientaci, k tomu jest nutno i dostatečno, aby každá z křivek dotýkající se jedné isotropické přímky bodu daného dotýkala se též druhé isotropické přímky bodem tím procházející.

Takovou soustavou jest ku př. osnova křivek $n$té třídy (majících společných $n^2$ tečen). Geometrické místo ohnisek křivek takých jest křivka té vlastnosti, že spojnice každého bodu jejího s realnými ohnisky kterýchkoli dvou křivek osnovy tvoří dvě skupiny přímek se stejnou orientací.

Je-li tu $n = 2$, máme osnovu kuželoseček vepsaných danému čtyrstranu; geometrické místo ohnisek jest pak známá *fokála Queteletova,* cirkulárná to křivka 3ho stupně procházející svým zvláštním ohniskem (průsečíkem pomyslných asymptot). Zajímavým jest vyšetření, existují-li křivky, při kterých orientace tečen vedených bodem mimo křivku daným jest nezávislá na poloze tohoto bodu v rovině. Vlastnosť tato přísluší jedině křivkám $n$té třídy, kteréž procházejí úběžnými body kruhovými a mají $(n-1)$ násobnou úběžnou tečnu. Toho druhu jest ku př. *trojúvratná hypocykloida*, křivka třídy třetí, mnohokráte již vyšetřovaná*) a mnohými pozoruhodnými vlastnostmi se vyznamenávající (courbe merveilleuse dle Cremony); též v pojednání Humbertově jest jí zvláštní oddíl věnován.

*(American Journal of Mathematics. Volume X. 1888, p. 258).*

---

*) Viz „Časopis pro pěstování math. a fys.“, ročník XV., str. 125. Sluší však tam v řádce 11. shora vynechati zbytečnou podmínku: Je-li trojúhelník pravidelný. Tvar křivky nezávisí na tvaru trojúhelníka na onom místě předpokládaného.

**Křivky 2. stupně.** O křivkách těchto platnou jest známá *věta Brianchonova*, vyslovující, že úhlopříčny 14, 25, 36 opsaného šestiúhelníka 123456 protínají se v jediném bodě. K této větě druží se dvě nové jiné, které pronesl *Schröter*.

Dotýkají-li se strany 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71, náležející sedmiúhelníku 1234567, křivky druhého stupně, omezují úhlopříčny 14, 25, 36, 47, 51, 62, 73 nový sedmiúhelník, který jest jiné takové křivce vepsán.

Dotýkají-li se strany 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 81 náležející osmiúhelníku 12345678, křivky druhého stupně, omezují úhlopříčny 14, 25, 36, 47, 58, 61, 72, 83 nový osmiúhelník, 14725836, který jest jiné takové křivce opsán.

*(Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXIII. Jahrg. 1888, p. 374.)*

**Zvláštní druh křivek rovinných.** Dána-li v rovině křivka K, vztažená k pólu $o$, přísluší bodu jejímu $m$ průvodič $om$; budiž $m_1$ střed křivosti v bodě $m$ a $m_2$ střed křivosti evoluty K′ v bodě $m_1$, $p$ pak průsečík průvodiče $om$ se spojnicí $m_1 m_2$. Spojnice tato slove druhým poloměrem křivosti křivky K v bodě $m$. Zvláštní druh křivek stanoven jest podmínkou, aby průvodičem dělen byl druhý poloměr křivosti dle stálého poměru

$$m_2 m_1 : p m_1 = (n - 1) : (n + 1).$$

Konstantu $n$ jmenujeme ukazatelem křivky K. Obecnou vlastností křivek takových jest, že poloměr jich křivosti jest úměren části normály obsažené mezi bodem $m$ křivky a průsečíkem normály s polárou bodu $m$ vzhledem k určité řídící kružnici L (středu $o$, poloměru $r$).

V tomto druhu křivek zahrnuty jsou dva druhy užší, které dříve již vyšetřovali *Ribaucour* a *Haton de la Goupillière;* jich vlastnosti sestavil a ze společného hlediska vyvinul nejnověji *Cesáro,* z jehož obsažné práce vytkneme tuto hlavní výsledky. *Křivky Ribaucourovy* ($r = \infty$, pól $o$ úběžný) vyznačují se tím, že jich poloměr křivosti jest úměren části normály obsažené mezi bodem křivky a stálou přímkou řídicí.

Křivky, které Haton nazval *sinusoidické spirály* ($r = o$), mají vlastnost, že kolmý průmět středu křivosti na průvodiče dělí tento dle stálého poměru.

Závislosť mezi poloměrem křivosti $\varrho$ a délkou oblouku $s$ (équation intrinsèque) jest u těchto dvou druhů křivek vyjádřena rovnicemi

$$s = \mu \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\mu} - 1}}, \quad s = \mu \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\nu} - 1}},$$

klademe-li $\quad \mu = \frac{n+1}{n-1}, \quad \nu = \frac{2n}{n-1}.$

Každou hodnotou ukazatele $n$ určena jest čeleď křivek $K_n$ obsahující vždy jednu křivku Ribaucourovu ($R_n$) a jednu sinusoidickou spirálu ($S_n$).

Při $n = 1$ jsou vyšetřované křivky kružnicemi; při $n = 2$ jsou obecnými křivkami stupně 2ho, což vychází na jevo z Maclaurinova sestrojení druhého středu křivosti u kuželoseček. Kružnice L jest zde totožna s geom. místem vrcholu pravého úhlu křivce opsaného. $R_{-2}$ jest parabola, $S_{-2}$ jest pravoúhlá hyperbola.

Při $n = 0$ vzniknou křivky, při kterých střed křivosti v libovolném bodě $m$ jest průsečík normály s polárou bodu $m$ vzhledem ku stálé kružnici L. Mezi poloměrem křivosti a délkou oblouku jest jednoduchý vztah

$$\varrho^2 = as^2 + 2bs + c$$

a kružnice L má tu poloměr

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{1 + a}.$$

Je-li $a < -1$, jest $K_0$ hypocykloidou, při $a = -1$ jest cykloidou ($R_0$), při $-1 < a < 0$ epicykloidou; při $a = 0$ přechází v evolventu kružnice a při $b^2 - ac = 0$ v logarithmickou spirálu ($S_0$). Mimo případy již uvedené budiž ještě poznamenáno, že $R_{-3}$ jest řetězovka, při které

$$\varrho = a + \frac{s^2}{a};$$

$S_{-\frac{1}{2}}$ jest parabolou, $S_{\frac{1}{2}}$ závitnicí Pascalovou a $S_2$ lemniskatou.

Úpatnice (courbe podaire) křivky $S_n$ jest $S_{\frac{n}{n+1}}$.

Dvě s. spirály, jichž ukazatelé liší se toliko znaménkem, jsou křivkami vzájemně inversními.

Křivku $S_n$ vytvořuje hmotný bod, na nějž v pólu působí síla úměrná $(2n + 3)$tí mocnině vzdálenosti. Kotálnice vytvořená pólem spirály $S_n$ valící se po přímce jest křivka $R_{\frac{n-1}{n+1}}$. Křivka, po které jest $S_n$ kotáleti, aby pól její opsal přímku, jest $R_{2n-1}$ aneb $R_{\frac{2n-1}{2n+1}}$. Kotálením $S_n$ dle křivky shodné vytvořuje pól křivku $S_{\frac{n}{n+1}}$. Při kotálení křivky $R_n$ po křivce shodné obaluje řídící přímka $R_{\frac{n}{n+2}}$. Při kotálení křivky $R_n$ po přímce obaluje řídící přímka $R_{\frac{n-1}{n+3}}$. Kotálíme-li křivku $R_n$ dle spirály $S_{\frac{n+1}{2}}$, prochází přímka řídící stálým bodem aneb obaluje $R_{\frac{n+1}{n+3}}$.

*(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1888, p. 171 et 209).*

## II.

Podává dr. A. Seydler v Praze.

**Nejstarší hvězdárna na světě** nalezá se v Pekingu. Byla založena roku 1279 za panování Kublaje chána, prvního císaře mongolské dynastie. Nejstarší hvězdárna evropská dosud existující jest pařížská, vystavená r. 1671. Brahe-ova Uranienborg, r. 1576 založená, spustla po jeho odchodu do Prahy a vzala brzo za své.

Na hvězdárně pekingské nalézají se dosud tři stroje z doby jejího založení, zhotovené od Kuo-Šučinga, Kublajova hvězdáře. Stroje ty jsou:

*a*) Armillarná sféra, skládající se ze soustavy kruhů (obzor, poledník, rovník, ekliptika atd.). Společným středem prochází roura, kterouž se hledělo na předmět nebeský, načež se poloha jeho čtla na polarném kruhu a rovníku;

*b*) astrolab, aequivalent našeho aequatorealu, jen že místo dalekohledu zaujímala opět pouhá roura;

*c*) stroj výškový, opatřený vodorovným a výškovým kruhem, aequivalent našeho universalného stroje čili altazimuthu. Kruhy jsou rozděleny na „dny“, t. j. na $365^1/_4{}^0$, každá taková část opět na 10 dílů.

R. 1378 sloužily stroje ty bezpochyby při pozorování vlasatice, již v Evropě nazýváme Halleyovou, a budou za 22 let opět svědky jejího návratu. Podobají se velmi strojům Tycho-Brahe-ho, který, jak známo, první v Evropě zhotovoval astronomické stroje z kovu. *(Nature č. 993.)*

**Kyslíkové čáry v slunečném spektru.** Na podzim letošního roku podnikl *Janssen* výpravu na Mont-Blanc jen za tím účelem, aby zjistil, zdali jsou kyslíkové čáry ve slunečném spektru původu solarného neb terrestrického. Pozorování konaná na stanici Les Grand Mulets dokázala, že čáry ty vznikají absorpcí v naší athmosféře; na vysoké stanici oné nebylo po nich stopy. *(Nature č. 993.)*

**Výsledky srovnání různých teploměrů.** V Paříži existuje asi 10 let zvláštní Bureau international des poids et mesures, vydržovaný příspěvky několika států; úlohou jeho jest, poskytnouti těmto státům zaručené přesné kopie základních měr, jichž prototypy Bureau ve svých místnostech přechovává, konati však mimo to různá přesná měření, o nichž se ob čas podává obšírná zpráva ve zvláštních publikacích. V právě vyšlém VI. svazku těchto pojednání porovnává *Chappuis* teploměr vzduchový $T_1$, vodíkový $T_2$ a kyselinou uhličitou naplněný $T_3$ s osmi normalnými rtuťovými teploměry Tonnelotovými $T_0$ z tvrdého skla. Nalezeny tyto maximalné rozdíly:

$T_1 - T_0 = 0{\cdot}097^\circ$ C. při $40^\circ$ C.
$T_2 - T_0 = 0{\cdot}107^\circ$ C. „ $40^\circ$ C.
$T_3 - T_0 = 0{\cdot}049^\circ$ C. „ $40^\circ$ C.

*(Nature č. 1000.)*

**Lockyer o spektrech meteoritů.** Lockyer zanáší se již delší řadu let studiemi o spektrech uhlíkových, se zřetelem ovšem ku problemům astrofysikálným. V jedné z posledních svých přednášek v Londýnské Royal Society dospívá k těmto zajímavým konklusím, ovšem ještě hypothetickým:

1. Světelné záření všech těles nebeských, vydávajících vlastní světlo, vyjmeme-li hvězdy podobné našemu Slunci neb Siriovi, jest způsobeno meteority v různých stavech aggregace

a o různých teplotách, jak to byl již *Schiaparelli* dokázal o kometách, opíraje se o zcela jiné důvody.

2. Teplota meteoritů jest, v některých případech, tatáž jako teplota plamene oxyhydrického.

3. Mezi hlavní příčiny absorpčních pruhů rýhovaných (kannelur) ve spektrech mnohých *hvězd* dlužno počítati páry manganu při nízké teplotě.

4. Skvělé rýhované pruhy uhlíku, pozorované současně s příslušnými zjevy absorpce ve spektrech jistých *hvězd,* dokazují, že se zde nalezají meteority o nízké teplotě ve velkých vzdálenostech od sebe.

5. Olivín a podobné nerosty zdají se býti hlavní příčinou světlých čar v *mlhovinách.*

6. *Nové hvězdy* vznikají srážkami zástupů meteoritů; stkvělé čáry v jejich spektrech jsou čáry příslušné nízkým teplotám oněch prvků meteoritů, jichž spektra mají nejvíce světla při teplotě málo vysoké.

7. Spektrum vodíkové zdá se, že vzniká v *mlhovinách* následkem slabého vzrušení elektrického, jak tomu jest při spektru uhlíkovém v případě komet. U světla vyzářeného meteority, jsou-li tyto umístěny ve vzduchoprázdných trubicích, jimiž prochází proud elektrický, pozorujeme, kterak jedno spektrum náhle se zaměňuje za druhé.

*(Bull. astr., sv. V., září.)*

## III.

Referuje

**M. Lerch,**

docent české vysoké školy technické v Praze.

Jsou-li $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $u_1$, $u_2$, $u_3, \ldots$ spojité funkce realné proměnné $x$ v mezeře $(a \ldots b)$, a konverguje-li v této řada

$$\varphi(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

*stejnoměrně,* pak bude hodnota posledního členu (*zbytku*) v součtu

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \int_a^b u_2\psi(x)\,dx + \ldots$$

$$(1) \qquad + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \int_a^b R_n\psi(x)\,dx$$

blížiti se nulle, roste-li $n$ přes všecky meze, při čemž

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

Pro sblížené vystižení „zbytku"

$$\int_a^b R_n \psi(x)\, dx = J_n$$

užívá se nerovnosti

$$|J_n| < M \int_a^b |\psi(x)|\, dx,$$

kde M značí největší hodnotu veličiny $|R_n|$ v mezeře $(a \dots b)$.

Tato veličina udává tedy mez chyby, jíž se dopustíme vynecháním posledního členu ve vzorci (1).

Tato forma zbytku je začasté výhodnější nežli ona, jež dána jest vzorcem

$$|J_n| < ML(b-a),$$

kde L značí největší hodnotu funkce $\psi(x)$ nad mezerou $(a \dots b)$.

Tak zejmena při rozvoji elliptického integrálu

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2 \int_a^b \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}k^4 \int_a^b \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

(kde $0 < a < b < 1$) podává nám první výraz chybu ve tvaru

$$M(\arcsin b - \arcsin a),$$

kde

$$M < \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} k^{2n} b^{2n} \frac{1}{1-k^2b^2},$$

kdežto výraz druhý poskytne hodnotu

$$M \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}},$$

která zajisté je větší a tedy méně správnou předešlé. Zvlášť stává se nepotřebnou pro $b = 1$, kdežto výraz prvý zde poskytne hodnotu konečnou

$$M\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a\right).$$

Podobně poskytuje prvý tvar zbytku podstatnou výhodu při rozvoji integrálu

$$\int_a^b e^x \frac{dx}{x}, \qquad (0 < a < b)$$

a zejmena dlužno se ho přidržeti při úvahách obecných.

(*F. Gomes Teixeira, Bulletin des Sciences mathématiques, novembre 1888.*)

---

# Úlohy.

## Druhé řešení úlohy 4.

Vedle obecného řešení podaného na str. 139—140 stůj zde ještě toto řešení jednodušší, které zaslali pp. *Vinc. Peřina*, stud. VI. tř. r. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze a *Frant. Šoreys*, stud. VII. tř. vyš. gymn. v Mladé Boleslavi.

Tvoří-li průvodič daného bodu s osami osmistěnu úhly $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, jest

$$\sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = 2. \tag{1}$$

Užijeme-li dále téhož označení jako na místě citovaném, jest

$$a_1^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha'$$
$$a_2^2 = m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha'$$
$$4m^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\alpha.$$

Vyloučením $a_1$, $a_2$ z rovnic těchto najdeme po snadné úpravě

$$\sin^2\alpha' = \left(\frac{m^2 - n^2}{2mn}\right)^2 \operatorname{tg}^2\alpha;$$

jelikož však jest $m = n\sqrt{3}$, bude

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha' &= \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha \\ \sin^2\beta' &= \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\beta \\ \sin^2\gamma' &= \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Hledíce k rovnici (1) najdeme sečtením rovnic (2) žádaný vztah

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma = 6.$$

## Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Ladislav Dopita*, kand. prof. v Praze.)

Hyperbola určená rovnicí

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2 \tag{1}$$