Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Nušl

Hustota hvězd

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 5, 457--462

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122954

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Hustota hvězd.

Napsal Dr. *F. Nušl.*

Hustotou hvězd rozumíme hustotu průměrnou. Tvrdíme na př. hustota Slunce je čtyřikráte menší než hustota Země a jen málo větší než hustota vody, ale míníme průměrnou hustotu Slunce a průměrnou hustotu Země.

Přesné určení hustoty je možno jen když známe rozměry tělesa a účinek gravitační. To plyne bezprostředně z Newtonova rozšíření třetího zákona Keplerova. Původní jeho znění mělo jen kinematický význam: čtverce dob oběhu planet mají se k sobě, jako třetí mocniny velkých poloos dráhy. Volíme-li za jednotku času rok a za jednotku délek velkou poloosu dráhy zemské, lze třetí zákon Keplerův jednoduše také psáti

$$\frac{a^3}{T^2} = 1, \tag{1}$$

při čemž a znamená velkou poloosu dráhy libovolné oběžnice soustavy sluneční a T dobu oběhu. Newton ukázal, že zákony Keplerovy jsou důsledkem zákona gravitačního, a že platí i pro jiné soustavy oběžnic i pro dvojhvězdy. Při tom však že je možno třetí zákon rozšířiti dynamicky, neboť platí

$$\frac{a^3}{T^2} = M, \tag{2}$$

při čemž M znamená hmotu dvojhvězdy, nebo hmotu centrálního Slunce, když hmota planety je malá a možno ji zanedbati. Jednotkou hmoty je v tomto případě veličina stojící na pravé straně speciální rovnice (1), totiž hmota Slunce + Země, nebo jak krátce budeme říkati, hmota Slunce.

Dle rovnice (2) možno přesně počítati hmotu těch oběžnic v soustavě sluneční, kolem nichž obíhá měsíc nebo soustava měsíců, a poněvadž rozměry oběžnic známe, plyne odtud i hustota jejich vzhledem k hustotě Slunce. Hustota jedné z těchto oběžnic, totiž Země, byla určena nezávisle na předcházejících úvahách také absolutně, a proto známe i absolutní hodnotu hustoty Slunce a oněch oběžnic.

Avšak hustotu ostatních hvězd nelze takto jednoduše určovati, a spokojujeme se namnoze jen s nedokonalými odhady. K výsledkům velmi zajímavým vedou příslušné úvahy fotometrické, na něž první poukázal *E. C. Pickering* a jež dále rozvedli *S. Newcomb, A. W. Roberts* a *H. N. Russel.*

Mysleme si, že zvětšíme lineární rozměry dvojhvězdy, ale současně v tomtéž poměru zvětšíme i vzdálenost její od Slunce, tak že se nám bude jeviti stále v týchže rozměrech úhlových. Pak, platila-li v původním případě rovnice (2), platí patrně pro n-kráte větší lineární rozměry a nezměněnou hustotu

$$\frac{a^3 n^3}{T^2} = M n^3,$$

čili: doba oběhu bude v obou případech stejná.

Ale ani jasnost dvojhvězdy se tím nezmění, ovšem předpokládáme-li, že zvětšený systém bude míti touž povrchovou svítivost, neboť svítící plocha je n^2-kráte větší, ale nalézá se v n-kráte větší vzdálenosti, tak že se tím celková jasnost zase n^2-kráte zmenší.

Celkem tedy lze říci, že proporcionálním zvětšením všech lineárních rozměrů nenastane pro nás žádná změna ani úhlová, ani časová, ani světelná.

I můžeme si představiti, že tímto způsobem změníme lineární rozměry všech známých dvojhvězd tak, že se budou všecky nalézati od nás v téže vzdálenosti A, na př. tak daleko, aby jejich parallaxa obnášela 1″. Patrně platí v obvyklých jednotkách astronomických, totiž v poloosách dráhy zemské,

$$A = \cot g\, 1''. \tag{3}$$

Kdybychom systém základní, Slunce + Země, přenesli do téže vzdálenosti A, jevil by se dle definice parallaxy, jako dvojhvězda s úhlovou vzdáleností 1″. Odvoďme též hvězdnou velikost Slunce ve vzdálenosti A.

Hvězdná velikost vyjadřuje se ve stupních, jež jsou definovány fotometricky tak, že hvězda o stupeň jasnější vysílá do téhož objektivu nebo do pupilly oka asi 2·5kráte*) více světelné energie, než hvězda o stupeň nižší. Volíme-li za jednotku této světelné energie množství, jež k nám vysílají hvězdy 0té velikosti, jako na př. Wega, pak je množství světelné energie J, jež vysílá hvězda $m$té velikosti, dáno výrazem

$$J = 2{\cdot}5^{-m}. \tag{4}$$

Dle fotometrických měření svítí Slunce jako hvězda — 26·4 velikosti, což dle předcházející rovnice znamená, že Slunce vysílá do objektivu dalekohledu nebo do pupilly oka $2{\cdot}5^{26{\cdot}4} = 36 \,.\, 10^9$kráte více světla než hvězda nulté velikosti, na př. Wega. Vzdaluje-li se Slunce od nás, zmenšuje se toto množství, a Slunce jeví se postupně jako hvězda menší a menší hvězdné velikosti. Ve vzdálenosti A bude pak svítiti jako hvězda přibližně 0·2 velikosti čili asi jako Kapela v souhvězdí Vozky, neboť platí

$$\frac{36 \,.\, 10^9}{A^2} \doteq 2{\cdot}5^{-0{\cdot}2}.$$

Systém Slunce + Země ve vzdálenosti A představuje tedy dvojhvězdu, jejíž rozměry, periodu, hmotu, hustotu i svítivost známe a již můžeme proto fotometricky srovnávati s ostatními dvojhvězdami promítnutými jaksi do téže vzdálenosti A. Pro tyto průměty platí následující jednoduché vztahy. Znamená-li α'' v obloukových sekundách zdánlivou velkou poloosu dráhy dvojhvězdy, vypočítá se skutečná velká poloosa promítnuté dvojhvězdy z rovnice

$$a = A \, tg \, \alpha'',$$

čili, dosadíme-li za A hodnotu z rovnice (3),

$$a = \frac{tg \, \alpha''}{tg \, 1''} = \alpha.$$

Znamená tedy α nejenom úhlovou velikost poloosy dráhy, nýbrž také skutečnou vzdálenost složek v promítnutém systému vy-

*) Přesněji vzato, jest to číslo, jehož *brigg log* jest 0·4.

jádřenou v poloosách dráhy zemské. Poněvadž pak periodu T známe z pozorování, můžeme počítati hmotu promítnutých systémů v jednotkách hmoty sluneční z rovnice

$$M = \frac{\alpha^3}{T^2}. \tag{5}$$

Při popsaném promítání dvojhvězdy do vzdálenosti A bylo výslovně podotčeno, že se nemění hustota ani povrchová svítivost, nýbrž jen rozměry. Kdyby pak hustota a povrchová svítivost všech hvězd byla stejná, jako hustota a svítivost Slunce, mohli bychom z hmoty M, určené rovnicí (5), dále počítati hvězdnou velikost dvojhvězdy, ovšem se zanedbáním povrchových změn, jež nastanou rozdělením celkové hmoty dvojhvězdy M na dva díly. Patrně bude se nám hmota dvojhvězdy jeviti v nejmenší plošné velikosti, jestliže si myslíme všecku svítící hmotu M soustředěnu v tělese centrálním a obíhající těleso je nepatrné. Jinak bude svítící plocha vždy větší a největší tenkráte, když rozdělíme svítící hmotu M na dvě stejně velká tělesa. Plocha svítící bude v tomto případě asi 26% větší. Zanedbáme-li tyto rozdíly, můžeme říci, že za podmínek svrchu uvedených — totiž hustota a svítivost táž jako u Slunce — je povrch svítící úměrný $M^{\frac{2}{3}}$ a tedy i svítivost dvojhvězdy

$$J = konst\ M^{\frac{2}{3}}. \tag{6}$$

Konstanta úměrnosti tu patrně znamená to množství světelné energie, jež za stejných okolností vysílá k nám Slunce ze vzdálenosti A, čili hvězda 0·2 hvězdné velikosti. Značí-li x hvězdnou velikost dvojhvězdy, lze rovnici (6) také tak psáti

$$2{\cdot}5^{-x} = 2{\cdot}5^{-0{\cdot}2}\ M^{\frac{2}{3}}$$

čili

$$x = 0{\cdot}2 - \tfrac{5}{3}\ log\ M. \tag{7}$$

Dle této rovnice počítaná velikost hvězdná nesouhlasí však obyčejně s velikostí pozorovanou. Patrně proto, že předpoklad učiněný při odvození rovnice (6) není správný, čili že hustota a povrchová svítivost hvězd není stejná jako u Slunce. Předpokládejme proto, že hustota dvojhvězdy je h-kráte větší a povrchová svítivost i-kráte větší než hustota a povrchová svítivost Slunce. Tím změní se rovnice (6) v následující

$$J = konst \left(\frac{M}{h}\right)^{\frac{2}{3}} i, \tag{8}$$

čili, znamená-li m fotometricky měřenou hvězdnou velikost dvojhvězdy

$$2{\cdot}5^{-m} = 2{\cdot}5^{-0{\cdot}2} \left(\frac{M}{h}\right)^{\frac{2}{3}} i,$$

odkudž vypočítáme

$$log \frac{h}{i^{\frac{3}{2}}} = \frac{3m - 0{\cdot}6}{5} + log\ M. \tag{9}$$

V následující tabulce jsou příslušné výpočty provedeny pro řadu dvojhvězd:

Hvězda	T	a''	m	x	$h : i^{\frac{3}{2}}$
$\varkappa$ Pegasi	11·4	0·42″	4·2	5·6	0·14
ξ Equulei	11·4	0·45	4·6	5·5	0·31
ξ Sagittarii	18·8	0·69	2·9	5·3	0·04
F9 Argus	22·0	0·65	5·5	5·6	0·85
42 Comae	25·6	0·64	4·4	5·9	0·13
β Delphini	27·7	0·67	3·7	5·9	0·05
Sirius	52·2	8·03	— 1·7	1·4	0·01
Canopus	81·1	17·70	— 1·0	0·3	0·16
ω Leonis	116·2	0·88	5·6	7·4	0·09
γ Virginis	194·0	3·99	2·6	4·8	0·47.

Ve výsledcích je nápadno, že veličina $h : i^{\frac{3}{2}}$ je vesměs zlomek menší než jednička a namnoze značně menší. To znamená, buď že hustota dvojhvězd je menší než hustota Slunce, nebo že povrchová svítivost je větší. Avšak tu byly vzaty do počtu jen dvojhvězdy s malou periodou. Při dvojhvězdách s velkou periodou — tedy při většině dvojhvězd — vychází pro veličinu $h : i^{\frac{3}{2}}$ nepatrný zlomek průměrně jen několika *tisícin!* Tu nelze dojíti ku pravděpodobnému vysvětlení jen obrovským zvýšením povrchové svítivosti a nutno přibrati předpoklad, že hustota dvojhvězd je značně menší než hustota Slunce, ba i jen rovna na př. hustotě vzduchu.

Jako nápadný takovýto příklad uvádí Newcomb hvězdu 2. velikosti ζ Orionis. Tato má nepatrného průvodce ve vzdálenosti 2·5″ a kdyby její hustota a povrchová svítivost byly tytéž jako u Slunce, měla by dokončiti jeden oběh ve 14ti letech. Ale skutečně pohybuje se tak pomalu, že po padesáti letech je změna polohy sotva znatelná, neboť se mění v roce jen asi o desetinu stupně. Dle toho bychom vypočítali, že $h : i^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}0001$. Ovšem, že tento výsledek může býti značně změněn, až bude dráha této dvojhvězdy propočítána, neboť dosud nevíme nic o excentričnosti její, ani o sklonu, tak že zdánlivé vzdálenosti 2·5″ může odpovídati daleko větší hodnota velké poloosy.

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x + y + x^2 + y^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = 1.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Jos. Ščerba*, stud. gymn. v Místku.

Zavedeme-li nové neznámé rovnicemi $x + y = u$, $xy = v$, máme nejprve $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^4 + y^4 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$. Rovnice dané pak změní se v tyto

$$u + (u^2 - 2v) = 1, \qquad (1)$$
$$u^2 - 2v + (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = 1. \qquad (2)$$

Dosadíme-li z prvé rovnice do druhé $(u^2 - 2v)^2 = (1 - u)^2$, bude míti druhá rovnice po jednoduché úpravě tvar

$$u^2 - v^2 - (u + v) = 0,$$

aneb

$$(u + v)(u - v - 1) = 0.$$

I jest buď

I. $u + v = 0$, aneb II. $u - v - 1 = 0$.