Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 5, 409--441

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122951`

Úvod do vektorové analyse.

Napsal prof. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Mezi všemi směry **s**, jimiž lze z bodu M přejíti k bodům sousedním, jsou některé význačné; jest to především směr daný průvodičem **r**, při čemž přecházíme k neskonale blízkému bodu M', ležícímu v prodloužení tohoto průvodiče. Differenciální poměr skaláru v v tomto směru znamenejme kratčeji $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}}$; poměr ten má hodnotu

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}} = \frac{dv}{dr}\mathbf{r}_1. \tag{27^b}$$

Dále jest vytknouti differenciální poměry ve směrech os souřadných x, y, z, tedy $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_x}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_y}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_z}$, místo nichž píšeme opět kratčeji $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}}$; pro tyto poměry obdržíme

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i},\quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j},\quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{27^c}$$

Dle rovnice (26) jest

$$\frac{dv}{ds} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) . \mathbf{s}_1 \tag{28}$$

čili vzhledem k předcházejícím rovnicím

$$\frac{dv}{ds} = \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}}\right) . \mathbf{s}_1 ;$$

násobíme-li obě strany této rovnice jednotkovým vektorem $\mathbf{s}_1$, dostaneme vzhledem ke vzorci (27^a)

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s} = \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}}\right) . \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1. \tag{29}$$

Roznásobíce na pravé straně obdržíme

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}} = \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}} \cdot \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1 ;$$

člen $\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{s}_1\right)\mathbf{s}_1$ jest dle (3) průmětem vektoru $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}$ na běh vektoru $\mathbf{s}$ a podobný význam mají ostatní dva členy. Rovná se tedy $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}}$ součtu průmětů tří vektorů $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}}$ na běh $\mathbf{s}$.

Z toho plyne, že $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}}$ rovná se také průmětu součtu

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}$$

na týž běh. Pro tento součet zavedl Hamilton zvláštní označení; píše totiž

$$\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla v, \tag{30}$$

což čteme „*delta v*“ (též „*nabla v*“) anebo zkráceně „*del v*“. Dle této rovnice ∇v jest vektorem, který jest dán třemi skaláry

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Sluší poznamenati, že ∇v jest invariantní vzhledem k jakékoli transformaci soustavy souřadnic, neboť differenciální poměr $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}}$ jest dle definice nezávislý na směrech os souřadných, tudíž nezávisí na těchto směrech ani ∇v, jehož průmětem na libovolný běh $\mathbf{s}$ poměr $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}}$ jest.

Vložíme-li hodnotu ∇v do rovnice (29) a vyměníme-li ve skalárním součinu (ve větší závorce) oba činitele, nabudeme

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}} = (\mathbf{s}_1 \cdot \nabla v)\,\mathbf{s}_1 \tag{31}$$

Poněvadž dle (27[a])

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r_s}} = \frac{dv}{ds}\mathbf{s}_1,$$

dostaneme, přirovnajíce tuto rovnici k (31), pro skalární součin

$$\mathbf{s}_1 \cdot \nabla v = \frac{dv}{ds} \tag{32}$$

čili dle (25)

$$\mathbf{s}_1 \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

tudíž

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}\mathbf{s}_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\mathbf{s}_1 + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{ds}\mathbf{s}_1.$$

Vyměníme-li v rovnici (27ᵃ) skalár v skalárem x, nabudeme

$$\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{dx}{ds}\mathbf{s}_1$$

a podobně

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{dy}{ds}\mathbf{s}_1, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{dz}{ds}\mathbf{s}_1;$$

substitucí do poslední rovnice vychází

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}_s} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}_s} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}_s}. \tag{33}$$

Veďme nyní bodem M vektory ve všech možných směrech v prostoru, jeden z nich má běh příslušející vektoru ∇v. Na tento běh vnesme v kladném i v záporném směru ∇v a promítněme obě tyto úsečky na všechny paprsky svazku, jehož středem jest M. Tím obdržíme všechny možné hodnoty differenciálních poměrů $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s}$. Koncové body těchto průmětů leží patrně na dvou plochách kulových, v bodě M se dotýkajících, jichž průměry jsou $+\nabla v$ a $-\nabla v$.

Z toho plyne:

1. Největší (absolutní) hodnotu ze všech možných differenciálních poměrů $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s}$, určitému bodu M příslušejících, jest hodnota vektoru ∇v, neboť pro tento vektor průmět rovná se délce promítnuté. Tudíž ∇v lze označiti jako differenciální poměr skaláru v dle $\mathbf{r}$ v určitém jakémsi směru $\mathbf{n}$, čili $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_n}$. Místo

tohoto označení píšeme $\frac{dv}{d\mathbf{r}}$, jmenujíce tento differenciální poměr dle Fischera*) *úplným* differenciálním poměrem skaláru dle vektoru oproti differenciálním poměrům v jiných směrech $\mathfrak{s}$, jež jsme výše nazvali *částečnými.*

Tudíž jest

$$\nabla v = \frac{dv}{d\mathbf{r}}; \tag{34}$$

z čehož jde, násobíme-li obě strany skalárně $d\mathbf{r}$

$$dv = \nabla v \,.\, d\mathbf{r}, \tag{35}$$

poněvadž $\frac{1}{d\mathbf{r}} \,.\, d\mathbf{r} = 1$.

Každému bodu pole skalárního přísluší jediný úplný differenciální poměr, který jest tudíž funkcí toliko průvodiče $\mathbf{r}$; částečný differenciální poměr jest složkou úplného poměru v určitém směru.

Ve směru vektoru ∇v mění se skalární veličina nejrychleji a velikost této změny dána jest velikostí vektoru ∇v; odtud pochodí jméno *gradient,* jež se dává někdy tomuto vektoru.

Výše uvedené plochy kulové, jež stanoví částečné derivace, můžeme nazvati dle Somova**) *hodografy* differenciálního poměru skaláru dle vektoru.

Dle rovnice (30) můžeme též psáti:

$$\frac{dv}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{36}$$

a dle rovnice (32), vyměníme-li na levé straně oba činitele navzájem:

$$\frac{dv}{d\mathbf{r}} \,.\, \mathbf{s}_1 = \frac{dv}{ds}. \tag{37}$$

2. Nejmenší absolutní hodnotu, totiž nullu, má $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_s}$ ve všech směrech, jež leží ve společné rovině tečné, vedené bo-

---

*) Vektordifferentiation und Vektorintegration, pag. 6.

**) Theoretische Mechanik, I. Theil Kinematik, německý překlad od Al. Ziweta, pag. 106.

dem M ke zmíněným oběma plochám kulovým, tedy v rovině kolmé ke směru $\mathbf{n}$. Je-li totiž $\mathbf{t}$ jeden z těchto směrů, pro který $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_t} = 0$, obdržíme dle (31)

$$(\mathbf{t}_1 . \nabla v)\, \mathbf{t}_1 = 0,$$

což jest jen možno, jestliže $\mathbf{t}_1 . \nabla v = 0$, t. j. stojí-li $\mathbf{t}_1$ kolmo k ∇v.

Rovina, obsahující všechny směry $\mathbf{t}$, jest rovinou tečnou k jakési ploše obalující, pro niž

$$v = f(\mathbf{r}) = const.$$

Tato obalující plocha jest geometrickým místem bodů v prostoru, v nichž skalár v má touž hodnotu stálou; zove se *hladinou* (pro tepelné pole skalární, v němž tedy v značí teplotu, též *plochou isothermickou*).

V poli skalárním obdržíme tudíž nesčíslné množství hladin, z nichž každé přísluší určitá hodnota skaláru. Dvě hladiny, vyznačené různými hodnotami skaláru, nemohou se protínati; neboť bodům, ležícím na průsečnici obou ploch, příslušely by dvě hodnoty v.

Ze všech možných hladin, které lze vésti v poli skalárním, vytýkáme často hladiny, jimž příslušející skaláry se liší o stálý rozdíl, nekonečně malý; takovými hladinami rozvrhuje se pole skalární ve *vrstvy hladinové*, jichž neskonale malá tloušťka se od bodu k bodu mění.

Vektor ∇v stojí v každém bodě prostoru kolmo na hladině procházející tímto bodem. Vedeme-li tedy k soustavě hladin křivky, jež plochy ty kolmo protínají (orthogonální trajektorie), jsou vektory ∇v tečnami k těmto křivkám; velikosti jejich jsou nepřímo úměrny ke tloušťce příslušné vrstvy hladinové. Neboť dle rovnice $\nabla v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_n}$ jest při stálém ∂v velikost vektoru ∇v nepřímo úměrná $\partial \mathbf{r}_n$.

Soustavou hladin jest tedy pole skalární dokonale určeno. Je-li pole stejnoměrné, jsou hladiny rovinami; ∇v jest pro všechny body veličinou stálou, tedy tloušťka vrstev hladinových stejná.

Jiným příkladem nám buď pole skalární, dané funkcí

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Pak jest

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{z}{r^3};$$

tudíž

$$\frac{dv}{d\mathbf{r}} = -\frac{x}{r^3}\,\mathbf{i} - \frac{y}{r^3}\,\mathbf{j} - \frac{z}{r^3}\,\mathbf{k} = -\frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}.$$

Jelikož $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$, obdržíme v tomto případě

$$\frac{dv}{d\mathbf{r}} = \nabla v = -\frac{1}{r^2}\,\mathbf{r}_1,$$

t. j. ∇v jest vektor, který má běh průvodiče $\mathbf{r}$ a jehož velikost rovná se zvratné hodnotě dvojmoci r.

Vraťme se nyní k vektoru ∇v, u něhož jest nám vysvětliti význam symbolu ∇. Především lze pokládati ∇, jež stojí obecně místo výrazu $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$, za jakýsi operator, jímž ze skaláru v nabýváme vektoru ∇v. Avšak symbolu ∇ můžeme přisouditi také význam myšleného vektoru, který se sice nedá znázorniti úsečkou, ale se kterým lze počítati jako se skutečnými vektory, čímž výpočet mnohých výrazů vektorových velmi se usnadňuje. A právě tento dvojí význam symbolu ∇ jest příčinou, že zaujímá ve vektorové analysi místo přední. To vše vysvitne ještě lépe, vztahujeme-li ∇ k složitějším funkcím skalárním.*)

Budiž skalár u funkcí vektoru $\mathbf{r}$, tedy $u = f(\mathbf{r})$; dále buď $F(u)$ funkcí této funkce, totiž $F(u) = F[f(\mathbf{r})]$. Pak jest dle (30)

$$\nabla F(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

---

*) Viz článek »Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique« od E. *Carvallo* v »Monatshefte für Mathematik und Physik«, II. ročník, pag. 237.

čili

$$\nabla F(u) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}\nabla u.$$

Za poslední výraz lze psáti $\frac{\partial_F\big((\nabla u)\,F\big)}{\partial u}$ *), pokládáme-li totiž, derivujíce $(\nabla u)\,F$, ∇u za veličinu stálou. Tudíž obdržíme

$$\nabla F(u) = \frac{\partial_F\big((\nabla u)\,F\big)}{\partial u}. \tag{38^a}$$

Podobný vzorec obdržíme, je-li F funkcí několika proměnlivých skalárů, na př. u, v, w, jež jsou vesměs funkcemi vektoru $\mathbf{r}$. V tom případě bude

$$\nabla F(u, v, w) = \frac{\partial F(u, v, w)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F(u, v, w)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F(u, v, w)}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k}\right).$$

Zavedouce na pravé straně v závorkách ∇u, ∇v, ∇w nabudeme

$$\nabla F(u, v, w) = \frac{\partial F}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial F}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial F}{\partial w}\nabla w$$

čili

$$\nabla F(u, v, w) = \frac{\partial_F\big((\nabla u)\,F\big)}{\partial u} + \frac{\partial_F\big((\nabla v)\,F\big)}{\partial v} + \frac{\partial_F\big((\nabla w)\,F\big)}{\partial w} \tag{38^b}$$

*) Ve výraze tom dáváme ∇u do závorky, abychom označili, že se ∇ vztahuje jenom k u a nikoli k uF.

kde pokládáme, differencujíce na pravé straně, po řadě ∇u, ∇v, ∇w za stálé veličiny. Z prvního vzorce plyne bezprostředně

$$\nabla (uv) = v (\nabla u) + u (\nabla v), \tag{39^a}$$

$$\nabla \frac{u}{v} = \frac{v (\nabla u) - u (\nabla v)}{v^2}.$$

První z těchto vzorců můžeme psáti ještě jinak; používajíce vzorce (30) dokážeme totiž snadno, že $v (\nabla u)$ rovná se výrazu $\nabla_u (u\,v)$, kde symbol ∇_u se vztahuje k součinu $u\,v$, v němž však v máme za veličinu stálou. Tím nabudeme

$$\nabla (u v) = \nabla_u (u\,v) + \nabla_v (u\,v); \tag{39^b}$$

podobně lze upraviti druhý z uvedených vzorců.

Nebude nesnadno zavésti také vyšší derivace symbolu ∇, z nichž nejdůležitější jest derivace druhá. Přihlížejíce k tomu, že ∇ jest vektorem, musíme však rozeznávati dvě takové derivace, totiž $\nabla . \nabla v$ *) a $\nabla \times \nabla v$. Z těch hodnota druhého součinu jest nulla, jelikož vektoriální součin dvou sobě rovných vektorů rovná se nulle. I zbývá jen $\nabla . \nabla v$, což označujeme kratčeji $\nabla^2 v$. Je-li

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

bude

$$\begin{aligned}\nabla . \nabla v &= \nabla . \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \\ &= \nabla . \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i} + \nabla . \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathbf{j} + \nabla . \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

kde na pravé straně

$$\nabla . \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i} = \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i}\right)}{\partial x} . \mathbf{i} + \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i}\right)}{\partial y} . \mathbf{j} + \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathbf{i}\right)}{\partial z} . \mathbf{k},$$

---

*) *Maxwell* nazývá $-\nabla . \nabla v$ *koncentrací* funkce v; opíšeme-li totiž kolem libovolného bodu M pole skalárního nekonečně malou plochu kulovou, jest — jak lze dokázati — tento výraz úměrný schodku průměrné hodnoty ze všech hodnot funkce v, příslušejících bodům na povrchu koule, naproti hodnotě její ve středu M.

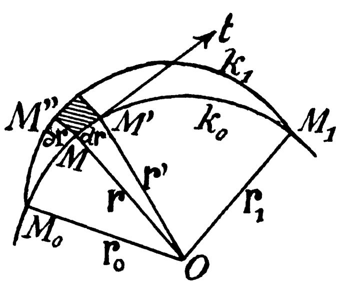
což dle vzorců (5) rovná se $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Podobné hodnoty obdržíme pro oba ostatní členy poslední rovnice, tudíž

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad (40)$$

V symbolu $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, kterým ze skaláru nabýváme opět skaláru, poznáváme známý operator *Laplace*-ův.

Funkci skalární v té vlastnosti, že pro každý bod pole vyhovuje podmínce $\nabla^2 v = 0$, jest *Lamé*-ova *funkce thermometrická.*

Přejdeme-li nyní k **počtu integrálnímu** vektorové analyse, musíme vytknouti především tři druhy integrálu, význačných pro pole skalární.



Obr. 9.

První druh integrálů vztahuje se ke křivkám, vedeným v poli skalárním; zoveme je integrály *lineárními.* Druhý druh vztahuje se k plochám, položeným v poli skalárním (integrály *plošné*) a třetí druh k částem prostoru, jež jsou vyňaty z pole tohoto (integrály *prostorové*).

Buď opět v skalární veličina vyznačující pole, která jest funkcí průvodiče **r**, tedy

$$v = f(\mathbf{r}).$$

Dále buď dána v poli tom libovolná křivka k_0 (obr. 9.), k jejímž jednotlivým bodům vedeny jsou z pevného bodu O průvodiče, na př. k bodu M průvodič **r**. Od bodu M přejdeme nyní v prostoru k velmi blízkému bodu M', ležícímu na křivce

k_0, a to ve směru tečny t vedené ku k_0 v bodě M. Poznačíme-li $MM' = \triangle_t \mathbf{r}$, jest průvodič k bodu M' vedený $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \triangle_t \mathbf{r}$. Při přechodu k limitě promění se $\triangle_t \mathbf{r}$ v prvek křivky, který jest nám však vektorem o nekonečně malé velikosti ds, značí-li s oblouk $M_0 M$ křivky k_0. Vhodně můžeme jej vyznačiti jako differenciál průvodiče ve směru tečny, tedy znakem $d\mathbf{r}_t$; není-li se obávati nedorozumění, můžeme za tento differenciál též psáti krátce $d\mathbf{r}$. Je-li nyní v hodnota proměnného skaláru v bodě M, můžeme utvořiti integrál

$$\mathbf{J} = \int v\, d\mathbf{r} = \int f(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \tag{41}$$

v mezích $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$, kterýž jest výše uvedeným lineárním integrálem skaláru. Sluší vytknouti, že integrál ten jest vektorem.

Hodnotu lineárního integrálu $\mathbf{J}$ můžeme pak měniti dvojím způsobem:

1. Neměníce tvaru křivky, měníme meze integrálu; příslušnou nekonečně malou změnu nazveme *differenciálem* $\mathbf{J}$ a označíme ji $d\mathbf{J}$.

2. Podržíme meze integrační a měníme spojitě tvar křivky, podél níž integrujeme; přecházíme tedy od jedné křivky k_0 k neskonale blízké k_1, vedené mezi týmiž body M_0 a M_1 na jakési ploše. Taková nekonečně malá změna sluje *variací* $\mathbf{J}$ a označuje se $\delta\mathbf{J}$.

Všeobecně jest tedy integrál $\mathbf{J}$ funkcí, jejíž tvar jest proměnlivý; změníme-li dráhu integrační, mění se hodnota integrálu.

Úplná změna integrálu $\mathbf{J}$ jest pak

$$D\mathbf{J} = d\mathbf{J} + \delta\mathbf{J}.$$

Ve shodě s těmito dvojími změnami $d\mathbf{J}$ a $\delta\mathbf{J}$ označujeme podobně dvojí změnu průvodiče $\mathbf{r}$: jednou přecházíme od bodu M k neskonale blízkému bodu M' křivky k_0 a tuto změnu průvodiče vyjadřuje vytčený již differenciál průvodiče $d\mathbf{r}$ (ve směru tečny); po druhé přecházíme od bodu M křivky k_0 k nejblíže položenému bodu M'' křivky k_1 a tuto změnu průvodiče vyjadřuje variace průvodiče δr. Podobný význam mají dr a δr.

Prve než stanovíme výraz pro variaci integrálu **J** odvodíme vzorec pro rozdíl $\delta(v\,d\mathbf{r}) - d(v\,\delta\mathbf{r})$, jehož pak upotřebíme *).

Dle známých pravidel počtu variačního a differenciálního platí

$$\delta(v\,d\mathbf{r}) = \delta v\,d\mathbf{r} + v\,\delta d\mathbf{r}, \tag{α}$$

$$d(v\,\delta\mathbf{r}) = dv\,\delta\mathbf{r} + v\,d\delta\mathbf{r}. \tag{β}$$

Avšak

$$\delta\,d\mathbf{r} = \delta d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{i}\delta dx + \mathbf{j}\delta dy + \mathbf{k}\delta dz\,;$$

jelikož

$$\delta\,dx = d\,\delta x, \quad \delta\,dy = d\,\delta y, \quad \delta\,dz = d\,\delta z,$$

bude též

$$\delta\,d\mathbf{r} = \mathbf{i}d\delta x + \mathbf{j}d\delta y + \mathbf{k}d\delta z = d\delta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = d\,\delta\mathbf{r}.$$

Odečtouce rovnice (α) a (β), obdržíme tudíž

$$\delta(v\,d\mathbf{r}) - d(v\,\delta\mathbf{r}) = \delta v\,d\mathbf{r} - dv\,\delta\mathbf{r}. \tag{42^a}$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě jinak vyjádřiti. Skalární veličina v jest funkcí souřadnic x, y, z; jest tedy

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz,$$

kde dle (4)

$$dx = \mathbf{i}\,.\,d\mathbf{r}, \quad dy = \mathbf{j}\,.\,d\mathbf{r}, \quad dz = \mathbf{k}\,.\,d\mathbf{r}\,;$$

vložíce tyto hodnoty obdržíme

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}\,.\,d\mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}\,.\,d\mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\,.\,d\mathbf{r},$$

a podobně

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}\,.\,\delta\mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}\,.\,\delta\mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\,.\,\delta\mathbf{r}. \tag{γ}$$

---

*) Odvození toto shoduje se celkem s odvozením ve Fischerově spisu: »Vektordifferentiation und Vektorintegration« pag. 54, kteréž jest opět založeno na Gibbs-Wilsonově: »Vector Analysis«, pag. 190.

Násobíme-li druhou z těchto rovnic $d\mathbf{r}$ a první $\delta\mathbf{r}$ a odečteme-li pak, dostaneme

$$\delta v\, d\mathbf{r} - dv\, \delta\mathbf{r} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big((\mathbf{i}\,.\,\delta\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - (\mathbf{i}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r}\Big)$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial y}\Big((\mathbf{j}\,.\,\delta\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - (\mathbf{j}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r}\Big)$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial z}\Big((\mathbf{k}\,.\,\delta\mathbf{r})\, \mathbf{r} - (\mathbf{k}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r}\Big).$$

Dle rovnice (16^b)

$$(\mathbf{i}\,.\,\delta\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - (\mathbf{i}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r} = \mathbf{i} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}]$$

a podobně

$$(\mathbf{j}\,.\,\delta\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - (\mathbf{j}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r} = \mathbf{j} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}],$$
$$(\mathbf{k}\,.\,\delta\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - (\mathbf{k}\,.\,d\mathbf{r})\, \delta\mathbf{r} = \mathbf{k} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}];$$

pročež

$$\delta v\, d\mathbf{r} - dv\, \delta\mathbf{r} = \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{i} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}]) + \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{j} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}])$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{k} \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}])$$

čili

$$\delta v\, d\mathbf{r} - dv\, \delta\mathbf{r} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}].$$

Vzhledem ke vzorci (30) obdržíme dále

$$\delta v\, d\mathbf{r} - dv\, \delta\mathbf{r} = \nabla v \times [d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}].$$

Z obrazce 9. jest zřejmo, že $d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}$ jest plocha elementárního rovnoběžníka mezi křivkami k_0 a k_1; plochu tu představuje vektor $d\mathbf{p}$, tudíž

$$\delta v\, d\mathbf{r} - dv\, \delta\mathbf{r} = \nabla v \times d\mathbf{p}$$

čili dle rovnice (γ)

$$\delta(v\, d\mathbf{r}) - d(v\, \delta\mathbf{r}) = \nabla v \times d\mathbf{p}. \qquad (42^b)$$

Přihlížejíce k tomuto vzorci můžeme nyní určiti variaci integrálu (41); integrujeme-li totiž v této rovnici člen po členu v mezích $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$, dostaneme

$$\delta \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r} - d \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, \delta\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \nabla v \times d\mathbf{p}. \qquad (\delta)$$

Avšak

$$d\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\,\delta\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} d(v\,\delta\mathbf{r}) = \Big/^{\mathbf{r}_1} v\,\delta\mathbf{r} - \Big/^{\mathbf{r}_0} v\,\delta\mathbf{r};$$

poněvadž pro body M_0 a M_1 (obr. 9.) $\delta\mathbf{r} = 0$, jest také hodnota tohoto členu rovnice (δ) rovna nulle. Pročež

$$\delta\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\,d\mathbf{r} = \delta\mathbf{J} = \int \nabla v \times d\mathbf{p}, \tag{43}$$

t. j. variace integrálu $\mathbf{J}$ dána jest integrálem, v němž za znamením integrace vyskytuje se vektoriální součin úplného differenciálního poměru skalární veličiny dle průvodiče a prvku nekonečně úzké plochy mezi křivkami k_0 a k_1.

Hodnotu $\delta\mathbf{J}$ můžeme ještě jinak vyjádřiti; jestiť $\delta\mathbf{J}$ rozdílem dvou hodnot integrálu $\mathbf{J}$, jež obdržíme, provádíme-li jednou integraci podél křivky k_1 a po druhé podél křivky k_0, což poznačujeme

$$\delta\mathbf{J} = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_1} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_0}.$$

Píšeme-li

$$\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_0} = -\left[\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_0},$$

obdržíme

$$\delta\mathbf{J} = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_1} + \left[\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} v\,d\mathbf{r}\right]_{k_0},$$

což se rovná $\oint v\,d\mathbf{r}$, čímž značíme lineární integrál $\mathbf{J}$ vzatý podél uzavřené čáry, utvořené křivkami k_0 a k_1. Poněvadž dle toho

$$\delta\mathbf{J} = \oint v\,d\mathbf{r},$$

můžeme rovnici (43) psáti také ve tvaru

$$\delta\mathbf{J} = \oint v\,d\mathbf{r} = \int \nabla v \times d\mathbf{p}. \tag{44a}$$

Platnost tohoto vzorce lze rozšířiti i na ten případ, že plocha, omezená křivkami k_0 a k_n, má konečnou velikost. Pak ji totiž rozdělíme v nekonečně malé proužky, omezené po řadě křivkami k_0 a k_1, k_1 a k_2, . . . k_{n-1} a k_n; i bude součet jejich

$$\int \delta \mathbf{J} = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_n} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_{n-1}}$$
$$+ \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_{n-1}} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_{n-2}}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_1} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_0}$$

čili

$$\int \delta \mathbf{J} = \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_n} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_0}.$$

Odtud plyne vzorec

$$\left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_n} - \left[\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}\right]_{k_0} = \int\int \nabla v \times d\mathbf{p}. \qquad (44^b)$$

Ve zvláštním případě může křivka k_0 přejíti v jediný bod, myslíme-li si totiž, že body M_0 a M_1 (v obr. 9.) se neustále na křivce k_0 k sobě blíží, až se sjednotí; pak se vztahuje první integrál na levé straně k jediné uzavřené křivce k_n, kdežto druhý integrál rovná se nulle. I obdržíme

$$\oint v\, d\mathbf{r} = \int\int \nabla v \times d\mathbf{p}. \qquad (44^c)$$

Pomocí tohoto vzorce vyjádřujeme plošný integrál v poli skalárním lineárním integrálem podél uzavřené křivky, která omezuje plochu, k níž se onen plošný integrál vztahuje a naopak.

Rovnice (44^c) může býti nazvána větou *Stokesovou*, upravenou pro skalární veličiny.

Pozoruhodný jest případ, jestliže $\delta \mathbf{J} = 0$, t. j. hodnota integrálu $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} v\, d\mathbf{r}$ není závisla na tom, podél které křivky, vedené mezi body M_0 a M_1 na nějaké ploše, integrujeme. Integrál **J** se jenom mění, pozměníme-li meze integrační $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$; tvar této funkce jest stálý. Pak jest

$$\int_{\circ} v d\mathbf{r} = 0,$$

t. j. hodnota lineárního integrálu v takovém poli skalárním podél jakékoliv uzavřené křivky rovná se nulle. Podmínkou jest pro ten případ: $\nabla v = 0$, z čehož plyne $v = \text{const.}$*); pole musí býti stejnoměrné, v němž hodnota skalární veličiny jest všude stálá.

Vedle lineárních integrálů vyskytují se dále integrály *plošné*, jak totiž jmenujeme integrály (geometrické součty nekonečně malých vektorů) tvaru

$$\mathbf{P} = \int\int_{k_0}^{k_1} v\, d\mathbf{p},$$

značí-li $d\mathbf{p}$ vektor představující prvek nějaké plochy p_0, v hodnotu skaláru v tomto prvku a k_0, k_1 dvě křivky, vedené na ploše p_0, jež jsou mezemi integračními. Hodnotu tohoto integrálu můžeme opět měniti dvojím způsobem:

1. Buď měníme meze integrační tím, že křivkám k_0 a k_1 (anebo jen jedné z nich) udělujeme na ploše p_0 jinou polohu; nekonečně malou změnu integrálu **P** zoveme pak differenciálem jeho a znamenáme ji $d\mathbf{P}$;

2. anebo podržíme obě meze a měníme nepřetržitě plochu, omezenou křivkami k_0 a k_1; příslušnou nekonečně malou změnu integrálu **P** nazýváme variací jeho a znamenáme ji $\delta\mathbf{P}$.

Mysleme si nejprve, že plochy p_0 a p_1 (obr. 10) jsou neskonale blízko; kdežto $d\mathbf{p}$ jest prvek plochy p_0, značí $\delta\mathbf{p}$ ele-

---

*) Je-li totiž $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ pevný bod skalárního pole a $M(x, y, z)$ kterýkoli jiný proměnlivý bod jeho, jest dle (35)

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \nabla v \,.\, d\mathbf{r} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} dv = v(x, y, z) - v(x_0, y_0, z_0).$$

Ale dle podmínky jest $\nabla v = 0$, tudíž

$$\int \nabla v \,.\, d\mathbf{r} = 0.$$

Z toho plyne

$$v(x, y, z) - v(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

čili

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0) = const.$$

mentární plošku, jejíž jedna strana jest prvek křivky na $\mathfrak{p}_0$ a protější strana prvek obsahující body plochy $\mathfrak{p}_1$ neskonale blízko (nejblíže) položené k bodům prvého prvku.

Odvodíme nyní vzorec pro rozdíl $\delta(v\,d\mathbf{p}) - d(v\,\delta\mathbf{p})$, analogický ke vzorci (42[b]); jestiť totiž

$$d(v\,\delta\mathbf{p}) = dv\,\delta\mathbf{p} + v\,d\delta\mathbf{p},$$
$$\delta(v\,d\mathbf{p}) = \delta v\,d\mathbf{p} + v\,\delta d\mathbf{p}.$$

Odečtouce tyto dvě rovnice a přihlížejíce k tomu, že $d\,\delta\mathbf{p} = \delta\,d\mathbf{p}$, obdržíme

$$\delta(v\,d\mathbf{p}) - d(v\,\delta\mathbf{p}) = \delta v\,d\mathbf{p} - dv\,\delta\mathbf{p}. \tag{45}$$

Tudíž

$$\delta\mathbf{P} = \delta\int\int_{k_0}^{k_1} v\,d\mathbf{p} = \int\int_{k_0}^{k_1} \delta(v\,d\mathbf{p}) =$$
$$\int\int_{k_0}^{k_1} d(v\,\delta\mathbf{p}) + \int\int_{k_0}^{k_1} \delta v\,d\mathbf{p} - \int\int_{k_0}^{k_1} dv\,\delta\mathbf{p}. \tag{ε}$$

Na pravé straně jest především

$$\int\int_{k_0}^{k_1} d(v\,\delta\mathbf{p}) = \int^{k_1} v\,\delta\mathbf{p} - \int^{k_0} v\,\delta\mathbf{p};$$

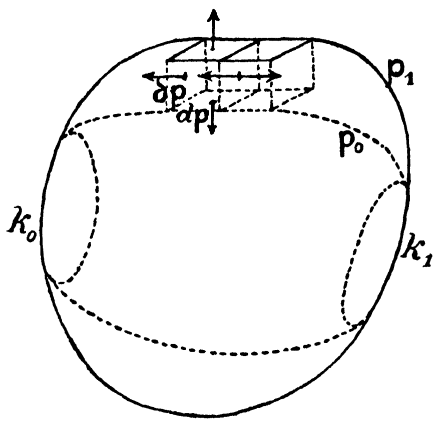
vzhledem k uvedenému významu $\delta\mathbf{p}$ pro křivky k_0 a k_1 rovná se tento rozdíl nulle. Zbývají tedy ještě dva integrály:

$$\int\int_{k_0}^{k_1} \delta v\,d\mathbf{p} \text{ a } \int\int_{k_0}^{k_1} dv\,\delta\mathbf{p},$$

jež určíme takto:

Mysleme si prostor mezi neskonale blízkými plochami $\mathfrak{p}_0$ a $\mathfrak{p}_1$, jež jsou omezeny týmiž křivkami k_0 a k_1, rozdělený v prvky mající tvar rovnoběžnostěnů, jichž jedna nekonečně malá základna leží v $\mathfrak{p}_0$ a jí protější v $\mathfrak{p}_1$ (obr. 10.). Vytkněme si jeden z těchto prvků prostorových, jehož základna (v ploše $\mathfrak{p}_0$) buď $d\mathbf{p}$; pobočná stěna jeho buď $\delta\mathbf{p}$. Je-li dále v hodnota proměnného skaláru na nekonečně malé stěně $\delta\mathbf{p}$, bude míti tento skalár na protější stěně pobočné hodnotu $v + dv$. Přechodem od první z těchto stěn ke druhé změní se součin $v\,\delta\mathbf{p}$ o $dv\,\delta\mathbf{p}$.

K tomuto prvku přiléhá druhý, který má s ním pobočnou stěnu $\delta\mathbf{p}$ společnou; výraz $(v\,\delta\mathbf{p})_2$, příslušející této společné ploše jako stěně druhého prvku, rovná se co do velikosti výrazu $(v\,\delta\mathbf{p})_1$, vztahuje-li se k téže ploše jako stěně prvního prvku, ale jest označení protivného, neboť kladné směry vektorů $(\delta\mathbf{p})_1$ a $(\delta\mathbf{p})_2$ jsou namířeny z vnitřku prvku na venek, pročež vektory ty jsou protivné. Tudíž oba součiny $(v\,\delta\mathbf{p})_1$ a $(v\,\delta\mathbf{p})_2$ na společné ploše se ruší. Jelikož to platí o všech elementárních plochách



Obr. 10.

$\delta\mathbf{p}$, vedených v prostoru mezi p_0 a p_1, bude i součet součinů $v\,\delta\mathbf{p}$, vztahující se jen k pobočním stěnám prostorových prvků, roven nulle; t. j.

$$\int\int_{k_0}^{k_1} v\,\delta\mathbf{p} = 0.$$

Ukážeme nyní, že také $\int\int_{k_0}^{k_1} dv\,\delta\mathbf{p} = 0$, buď přímo diferenciací integrálu $\int\int v\,\delta\mathbf{p}$ (při čemž nekonečně malou veličinu vyššího stupně $d\,\delta\mathbf{p}$ položíme rovnou nulle), anebo názorněji takto: Vytkněme si libovolný prvek prostorový; k němu připojme prvek druhý, který má s ním společnou stěnu poboční $\delta\mathbf{p}$, a se strany druhé prvek třetí, mající s vytčeným prvkem prvním společnou stěnu, jež jest protější k $\delta\mathbf{p}$. Ke druhému prvku připojme další prvek, který k němu přiléhá podél stěny, která jest opět protější ku stěně společné prvku prvému a druhému; podobně učiňme u prvku třetího. Pokračujeme-li takto s postupným připojováním prostorových prvků, aby vždy dva měly jednu poboční stěnu společnou (společné tyto stěny jsou stále protější), obdržíme elementární těleso, jež jest omezeno dvěma nekonečně malými proužky ploch $\mathfrak{p}_0$ a $\mathfrak{p}_1$, sahajícími od křivky k_0 ku k_1 a po stranách pobočními stěnami všech prvků, jež se nepokryly při seřadění jich v těleso. Sledujeme-li v tomto tělese od jednoho prvku ke druhému změny $dv\,\delta\mathbf{p}$ počínaje prvkem krajním, jehož jedna stěna $\delta\mathbf{p}$, redukujíc se v nekonečně malý oblouk křivky k_0, rovná se nulle (tudíž i $v\,\delta\mathbf{p} = 0$), až k podobnému prvku, který se připojuje jednou hranou ke křivce k_1 (kde tolikéž $v\,\delta\mathbf{p} = 0$), shledáme, že součet všech těchto změn musí se rovnati nulle. A poněvadž celý prostor mezi plochami $\mathfrak{p}_0$ a $\mathfrak{p}_1$ můžeme rozvrhnouti na taková elementární tělesa (anebo na jiná, jež mají k těmto polohu příční, vznikající totiž přiřaďováním prvků prostorových k prvému prvku podél ostatních pobočních stěn jeho), bude i úhrnný součet všech změn $dv\,\delta\mathbf{p}$ v tomto prostoru roven nulle, t. j.

$$\int\int_{k_0}^{k_1} dv\,\delta\mathbf{p} = 0.$$

Jinak jest tomu u stěn prostorových prvků, jež jsme výše vytkli jako jejich základny, totiž u stěn položených na plochách $\mathfrak{d}_0$ a $\mathfrak{p}_1$. Přejdeme-li od jedné takové základny k protější, jest změna součinu $v\,d\mathbf{p}$ patrně $\delta v\,d\mathbf{p}$; celkový součet těchto změn, pokročíme-li v prostoru od plochy $\mathfrak{p}_0$ k ploše $\mathfrak{p}_1$, dán jest integrálem $\int\int_{k_0}^{k_1} \delta v\,d\mathbf{p}$. A tomuto integrálu rovná se dle zjednodušeného vzorce (ε) variace plošného integrálu $\mathbf{P}$; píšeme tudíž

$$\delta\mathbf{P} = \int\int_{k_0}^{k_1} \delta v\,d\mathbf{p}.$$

Jest však

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{r},$$

čili vzhledem k rovnici (30)

$$\delta v = \nabla v \cdot \delta \mathbf{r};$$

tedy

$$\delta \mathbf{P} = \int \int_{k_0}^{k_1} (\nabla v \cdot \delta \mathbf{r})\, d\mathbf{p}.$$

Dle obecného vzorce (16[a]), totiž

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a},$$

obdržíme

$$(\nabla v \cdot \delta \mathbf{r})\, d\mathbf{p} = (d\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla v + [\nabla v \times d\mathbf{p}] \times \delta \mathbf{r};$$

pročež

$$\int \int_{k_0}^{k_1} (\nabla v \cdot \delta \mathbf{r})\, d\mathbf{p} = \int \int_{k_0}^{k_1} (d\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}) \nabla v + \int \int_{k_0}^{k_1} [\nabla v \times d\mathbf{p}] \times \delta \mathbf{r}. \tag{ζ}$$

V prvním integrálu na pravé straně této rovnice skalární součin $d\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}$ stanoví obsah prostorového prvku dS prstencovitého tělesa, omezeného neskonale blízkými plochami p_0 a p_1; o druhém integrálu dokážeme, že se rovná nulle. *) Z toho, co bylo pověděno o významu součinu $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$, poznáváme totiž, že $[\nabla v \times d\mathbf{p}] \times \delta \mathbf{r}$ značí vektor, položený v rovině obou prvních činitelů ∇v a $d\mathbf{p}$ kolmo k průmětu třetího činitele $\delta \mathbf{r}$ na touž rovinu. Jde-li nyní o prvek na ploše p_1, který označíme $d\mathbf{p}_1$, jest $\delta \mathbf{r}$, t. j. vektor, kterým přecházíme od bodu plochy p_0 k nejbližšímu bodu plochy p_1, kolmo k p_1; tolikéž $d\mathbf{p}_1$ jest kolmo k ploše p_1. Jsou tedy pro p_1 v součinu $[\nabla v_1 \times d\mathbf{p}_1] \times \delta \mathbf{r}$ oba vektory $d\mathbf{p}_1$ a $\delta \mathbf{r}$ téhož běhu; pak jest však vektor, představující tento součin, kolmý k $d\mathbf{p}_1$, čili leží v rovině tečné ku ploše p_1.

Přejdeme-li pak k prvku $d\mathbf{p}_0$ na ploše p_0 (kde $\delta v = 0$), který jest základnou protější ku $d\mathbf{p}_1$ téhož prvku prostorového

*) Důkaz tento sdělil se mnou *V. Fischer*.

dS, můžeme za to míti, že pro tento prvek (nehledě k odchylkám, nekonečně malým vyššího stupně) vektor ∇v_1, kolmý k hladině procházející v poli skalárním středem prvku, jest téhož běhu a téže velikosti jako ∇v_0 a podobně vektor $d\mathbf{p}_1$ jest rovnoběžný a stejně veliký s vektorem $d\mathbf{p}_0$, ale směru protivného, ponévadž kladný směr těchto vektorů namířen jest z vnitřku tělesa na venek. Tudíž součiny

$$[\nabla v_1 \times d\mathbf{p}_1] \times \delta\mathbf{r} \quad \text{a} \quad [\nabla v_0 \times d\mathbf{p}_0] \times \delta\mathbf{r}$$

jsou vektory rovnoběžné a stejně veliké, ale protivně označené, pročež součet jejich rovná se nulle.

Jelikož totéž platí o všech vektorech $[\nabla v \times d\mathbf{p}] \times \delta\mathbf{r}$, příslušejících oběma základnám každého prvku vytčeného prostoru, jest

$$\int\int [\nabla v \times d\mathbf{p}] \times \delta\mathbf{r} = 0.$$

Rovnice (ζ) přechází pak ve

$$\int\int (\nabla v \,.\, \delta\mathbf{r})\, d\mathbf{p} = \int\int \nabla v\, dS$$

aneb

$$\delta\mathbf{P} = \delta \int\int v\, d\mathbf{p} = \int\int \nabla v\, dS. \qquad (46)$$

Jsou-li pak meze integrační jakékoli plochy p_0 a p_1, položené mezi křivkami k_0 a k_1 (tedy nikoli nekonečně blízké), nabudeme způsobem, jehož jsme užili, odvozujíce vzorec (44^b)

$$\int \delta\mathbf{P} = \left[\int\int v\, d\mathbf{p}\right]_{\mathrm{p}_n} - \left[\int\int v\, d\mathbf{p}\right]_{\mathrm{p}_0} = \int\int\int \nabla v\, dS. \qquad (47)$$

Mysleme si nyní, že plocha p_0 se neustále zmenšuje, až přejde v jediný bod (v nějž přecházejí i křivky k_0 a k_1), kdežto plocha p_n se stává uzavřenou; tím tato rovnice změní se ve

$$\int\int v\, d\mathbf{p} = \int\int\int \nabla v\, dS, \qquad (48)$$

což jest věta *Gaussova*, přizpůsobená veličinám skalárním. Touto větou zdvojený integrál povrchový převádíme ve ztrojený integrál, vztahující se k části prostoru, omezené uzavřenou plochou, a naopak.

Jiné prostorové integrály obdržíme, vztahujeme-li dané pole skalární k určitému bodu v prostoru. Budiž opět v skalární funkcí, závislou na poloze bodu M_n v jakési části prostoru; poloha toho bodu jest stanovena buď pravoúhlými souřadnicemi x_n, y_n, z_n, anebo vektorem $\mathbf{r}_n$, vedeným z libovolného počátku O. Dále buď P určitý bod, *pólem* zvaný; souřadnice jeho buďtež x_0, y_0, z_0 a vektor, vedený k němu z téhož počátku, $\mathbf{r}_0$.

I jest vektor, spojující body P a M_n, dán výrazem

$$\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0 = (x_n - x_0)\,\mathbf{i} + (y_n - y_0)\,\mathbf{j} + (z_n - z_0)\,\mathbf{k};$$

označme jej $\mathbf{r}_{0n}$. Skalární část jeho buď r_{0n}, tedy $\mathbf{r}_{0n} = r_{0n}\mathbf{r}_1$.

Je-li v_n hodnota veličiny skalární v bodě M_n, utvořme ztrojený integrál

$$\int\int\int \frac{v_n}{r_{0n}}\,dx_n\,dy_n\,dz_n;$$

integrál ten má pro každý pól při nezměněném poli skalárním určitou hodnotu, jest funkcí polohy tohoto bodu. Jmenujeme jej *skalárním potenciálem* *); zaveďme proň označení *Pot*, píšíce

$$Pot\ v = \int\int\int \frac{v_n}{r_{0n}}\,dx_n\,dy_n\,dz_n, \tag{49^a}$$

anebo kratčeji

$$Pot\ v = \int\int\int \frac{v}{r}\,dS, \tag{49^b}$$

kde $dS = dx\,dy\,dz$ jest obsah prostorového prvku.**)

Chceme-li zvláště vytknouti souřadnice kteréhokoli bodu M_n pole skalárního i souřadnice pólu P, píšeme

$$[Pot\ v\,(x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0}$$

místo *Pot v*.

Je-li skalární pole dáno útvarem hmotným, jehož proměnlivá specifická hmota jest v, značí $v\,dS$ hmotu dm jedné částice, v něž si myslíme útvar rozvržený; pak jest

$$Pot\ v = \int\int\int \frac{dm}{r}, \tag{49^c}$$

což jest tvar potenciálu v mathematické fysice obvyklý.

---

*) Stať o potenciálu zpracována jest dle Gibbs-Wilsonova spisu »Vector Analysis,« pag. 205.

**) Mimo tento integrál vyskytuje se v mathematické fysice také skalární integrál tvaru $\int\int\int v_n\,r_{0n}\,dS_n$, který může býti nazván *integrálem Helmholtzovým* a označen $H(v)$.

V souřadnicích polárních obdržíme pro skalární potenciál jiný výraz. Volíme-li pól $P(x_0, y_0, z_0)$ počátkem souřadnic a přímku, vedenou tímto pólem rovnoběžně s osou z-ovou, osou polární, s níž průvodič $PM = r$, směřující k bodu $M(x, y, z)$, tvoří úhel ϑ, kdežto rovina MPZ s rovinou (xz) tvoří úhel φ, dostaneme pro transformaci soustavy pravoúhelné v polární soustavu rovnice

$$x - x_0 = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y - y_0 = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z - z_0 = r \cos\vartheta,$$

a pro prvek prostorový

$$dS = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

tudíž

$$Pot\, v = \int\int\int v\, r \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi. \qquad (49^d)$$

Poněvadž $\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ jest prvek $d\sigma$ plochy kulové, opsané kolem pólu poloměrem rovným jednotce, můžeme též psáti

$$Pot\, v = \int\int v\, r \, dr \, d\sigma. \qquad (49^e)$$

Lze pak integrovati nejprve v libovolném směru průvodiče r a pak dle σ, kterážto druhá integrace vztahuje se k části vytčené plochy kulové, jež obsahuje průsečíky její se všemi průvodiči.

Meze integrační předepsány jsou tvarem ploch, omezujících dané pole skalární; lze však integrovati též v mezích nekonečně velkých, neboť ve všech bodech, ležících v nekonečném prostoru mimo konečné pole skalární, jest $v = 0$, tudíž hodnota potenciálu nemění se tímto rozšířením mezí integračních (viz rovnici 49^d). Pak ovšem není třeba tyto meze zvláště vypisovati.

Bylo řečeno, že každému bodu jako pólu přísluší vzhledem k danému poli skalárnímu určitá hodnota potenciálu; často se však žádá, aby tyto hodnoty potenciálu v celém prostoru byly konečné a nepřetržité. Tuto vlastnost nemá patrně každé pole skalární; na př. pole, v němž skalární veličina má hodnotu stálou a jež vyplňuje nekonečný prostor, má pro všechny póly potenciál nekonečně velký čili potenciál jeho jest divergentní. Má-li však skalární veličina v v celém poli hodnotu konečnou (třeba proměnlivou) a nerozprostírá-li se pole do nekonečna, jest pro všechny póly, položené kdekoli v prostoru, konečnost potenciálu patrná (dle vzorce 49^d). V tom případě jest potenciál také úkonem nepřetržitým, jak následuje z toho, že první differenciální poměry potenciálu dle souřadnic pólu P mají v celém nekonečném prostoru hodnoty konečné.*)

Je-li však dáno obecné pole skalární, jest třeba pro konvergenci jeho potenciálu ještě jiných známek: zvláště buďtež tu vytknuty tyto:

1. Jestliže s rostoucím průvodičem r funkce skalární v v prostoru tak rychle ubývá, že součin $v r^3$ má i pro velmi velké r hodnotu konečnou, jest potenciál v dotyčném poli konvergentní.

Opišme totiž kolem pólu P kouli o poloměru r a předpokládejme, že poloměr ten může se neomezeně zvětšovati; je-li

$$v r^3 < k, \tag{50^a}$$

jest

$$\int\int_r^\infty v\, r\, dr\, d\sigma < \int\int_r^\infty \frac{k}{r^2}\, dr\, d\sigma.$$

Avšak

$$\int\int_r^\infty \frac{k}{r^2}\, dr\, d\sigma = \frac{k}{r}\int d\sigma = \frac{4\pi k}{r};$$

z čehož plyne

$$\int\int_r^\infty v\, r\, dr\, d\sigma < \frac{4\pi k}{r}.$$

Tudíž v prostoru nalézajícím se mimo zmíněnou kouli — a k tomu prostoru vztahují se meze integrační — hodnota integrálu $\int\int v\, r\, dr\, d\sigma$ jest stále menší než $\frac{4\pi k}{r}$; zvětšuje-li se r, zmenšuje se hodnota tohoto zlomku. Poněvadž však pro pole uvnitř koule (dokud jest konečné) hodnota potenciálu jest konečná, jest i pro celý dotyčný prostor potenciál konvergentní.

*) Seydler: »Základové theoretické fysiky,« díl II., pag. 23.

2. Hodnota skalární veličiny v může býti poblíž pólu P také velmi veliká; jestliže však v tomto případě součin $v\,r$ má hodnotu konečnou, blíží-li se r nulle, jest potenciál konvergentní v prostoru neskonale blízkém pólu.

Opišme nyní kolem pólu P malou kouli o poloměru r, která se může neustále zmenšovati; je-li

$$v\,r < k, \tag{50b}$$

bude

$$\int\int_0^r v\,r\,dr\,d\sigma < \int\int_0^r k\,dr\,d\sigma.$$

Poněvadž

$$\int\int_0^r k\,dr\,d\sigma = 4\pi k r,$$

jest také

$$\int\int_0^r v\,r\,dr\,d\sigma < 4\pi\,k\,r.$$

Tudíž v prostoru uvnitř zmíněné koule $\int\int v\,r\,dr\,d\sigma$ jest stále menší než $4\pi\,k\,r$, kteráž hodnota se blíží nulle, blíží-li se r nulle; pročež potenciál jest konvergentní v prostoru, jenž jest pólu neskonale blízký.

3. Skalární veličina v může býti také v jiném bodu $M_n\,(x_n, y_n, z_n)$, který leží mimo pól, nekonečně velká; v tom případě vytkněme kterýkoli bod M'_n, položený ve velmi malé vzdálenosti l od bodu M_n. Jestliže součin z hodnoty v v tomto bodě M'_n a z dvojmoci délky l má hodnotu konečnou, blíží-li se l nulle, jest potenciál konvergentní ve velmi malé části prostoru kolem M_n, v němž této podmínce jest vyhověno.

Učiňme bod M_n pólem nové soustavy polární, v níž pól P má souřadnice $\overline{M_nP} = \varrho,\ \alpha,\ \beta$, kdežto souřadnice bodu M'_n jsou $l,\ \vartheta'\ \varphi'$. V této nové soustavě obdržíme pro potenciál výraz *)

$$\int\int\int \frac{v\,l^2 \sin\vartheta'\,dl\,d\vartheta'\,d\varphi'}{r} = \int\int \frac{v\,l^2\,dl\,d\sigma'}{r},$$

*) ibid., pag. 20.

kde r značí vzdálenost bodů P a M'_n. Pro body, ležící uvnitř malé koule, opsané kolem bodu M_n poloměrem l, má toto r největší hodnotu $\varrho + l$. Položíme-li v posledním integrálu místo proměnlivého r tuto stálou hodnotu, zvětšíme tím jmenovatel zlomku za znamením integrace; i bude

$$\int\int_0^l \frac{v\,l^2\,dl\,d\sigma'}{r} < \frac{1}{\varrho + l}\int\int_0^l v\,l^2\,dl\,d\sigma'.$$

Předpokládejme nyní, že

$$v\,l^2 < k, \tag{50c}$$

i bude

$$\int\int_0^l v\,l^2\,dl\,d\sigma' < \int\int_0^l k\,dl\,d\sigma'.$$

Avšak

$$\int\int_0^l k\,dl\,d\sigma' = 4\pi\,k\,l,$$

tudíž

$$\int\int_0^l \frac{v\,l^2\,dl\,d\sigma'}{r} < \frac{4\pi\,k\,l}{\varrho + l}.$$

Pročež integrál na levé straně této nerovnosti pro všechny body uvnitř koule o poloměru l (který se zmenšuje až k nulle) jest menší než $\frac{4\pi\,k\,l}{\varrho + l}$, t. j. potenciál v tomto prostoru jest konvergentní.

Pole skalární, jemuž příslušející hodnoty potenciálů ve všech pólech mají hodnoty konečné a nepřetržité, zoveme *polem potenciálním.*

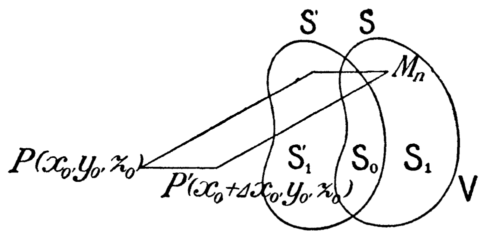
Hodnoty potenciálů pro všechny body v prostoru tvoří nové pole skalární, *pole potenciálů*; ve všech bodech kterékoli hladiny tohoto pole jsou hodnoty potenciálů stálé.

Není tuto místa pojednati o celé theorii potenciálu; postačiž omeziti se na výklad některých částí této theorie, jež se týkají zavedeného integračního operatoru *Pot.* A tu jest zvláště důležitá věta, jíž jest dán vztah mezi částečným differenciálním poměrem potenciálu dle některé souřadnice pólu a potenciálem differenciálního poměru daného skaláru dle stejné souřadnice proměnlivého bodu pole.

Předpokládejme, že dané pole skalární omezeno jest uzavřenou plochou V (obr. 11.), jež se rozprostírá v konečnu. Buď pak $[Pot\ v]_{x_0, y_0, z_0}$ hodnota potenciálu tohoto skalárního pole vzhledem k pólu $P(x_0, y_0, z_0)$; značí-li Δx_0 velmi malý přírůstek úsečky x_0, jest první částečný differenciální poměr potenciálu dle x_0 dán výrazem

$$\frac{\partial\ Pot\ v}{\partial x_0} = lim \frac{[Pot\ v]_{x_0 + \Delta x_0, y_0, z_0} - [Pot\ v]_{x_0, y_0, z_0}}{\Delta x_0}$$

pro $lim\ \Delta x_0 = 0$.



Obr. 11.*)

Mysleme si nyní část prostoru **S**, kterou zaujímá dané pole skalární, pošinutou v záporném směru osy x-ové o zmíněnou velmi malou délku Δx_0; tímto pošinutím úsečka každého bodu pole změní se o Δx_n a celé pole **S** přejde v **S'**. Jestliže tedy původní souřadnice libovolného bodu M_n skalárního pole byly x_n, y_n, z_n, jsou souřadnice tohoto bodu v nové poloze $M'_n : x_n + \Delta x_n, y_n, z_n$; z hodnoty skalární veličiny $v(x_n, y_n, z_n)$ v bodě M_n stává se $v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)$.

Jelikož hodnota potenciálu daného skalárního pole vzhledem k pólu P závisí jenom na vzájemné relativní poloze obou těchto útvarů a nikoli na poloze jejich absolutní, nezmění se potenciál, pošineme-li i pól i pole v témž směru o touž délku; i bude

$$[Pot\ v(x_n, y_n, z_n)]_{x_0 + \Delta x_0, y_0, z_0}$$
$$= [Pot\ v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0},$$

*) V obrazci tom vynecháno jest u druhého krajního bodu vodorovné úsečky, vedené bodem M_n, písmeno M'_n.

pročež

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} =$$

$$lim \frac{[Pot\, v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0} - [Pot\, v\,(x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0}}{\varDelta x_0}.$$

Každý z prostorů $\mathbf{S}$ a $\mathbf{S}'$ mysleme si rozdělený ve dvě části; první z nich jest část $\mathbf{S}_0$, společná oběma prostorům, druhá jest u $\mathbf{S}$ zbývající část $\mathbf{S}_1$, u $\mathbf{S}'$ část $\mathbf{S}'_1$. Tudíž

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{S}' = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}'_1.$$

I jest

$$[Pot\, v\,(x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0}$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}} \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\, dS_n$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_0} \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\, dS_n$$

$$+ \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_1} \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\, dS_n,$$

a podobně

$$[Pot\, v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)]_{x_0, y_0, z_0}$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_0} \frac{v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}}\, dS_n$$

$$+ \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}'_1} \frac{v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}}\, dS_n;$$

z toho plyne, položíme-li ještě $\varDelta x_0 = \varDelta x_n$,

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = lim \frac{1}{\varDelta x_n} \left\{ \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_0} \left(\frac{v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}} \right.\right.$$

$$\left. - \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}} \right) dS_n + \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}'_1} \frac{v\,(x_n + \varDelta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}}\, dS_n$$

$$\left. - \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}} \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\, dS_n \right\}.$$

Přejděme nyní v prvních dvou členech na pravé straně k limitám; blíží-li se $\varDelta x_n$ nulle, přechází r'_{0n} v r_{0n}, prostor $\mathbf{S}_0$ v původní prostor $\mathbf{S}$, poněvadž části prostoru $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}'_1$, jež ve směru osy úseček mají rozměry nekonečně malé, blíží se nulle. Dále jest pak

$$\lim \frac{v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n) - v(x_n, y_n, z_n)}{\Delta x_n} = \frac{\partial v}{\partial x_n};$$

tudíž

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_1} =$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}} \frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{1}{r_{0n}}\,dS_n + \lim \frac{1}{\Delta x_n}\left\{\int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}'_1} \frac{v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}}\,dS_n\right.$$

$$\left. - \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_1} \frac{v(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\,dS_n\right\}. \qquad (\eta)$$

Za první integrál na pravé straně této rovnice můžeme psáti $Pot\,\frac{\partial v}{\partial x_n}$; druhý a třetí člen přetvořme takto: Rozvrhněme plochu V, omezující dané pole skalární, v plošné prvky, jež určíme nekonečně malými vektory $d\mathbf{p}$; každý tento prvek buď základnou prostorového prvku dS_n, jehož pobočné hrany jsou rovnoběžné s osou x-ovou. V takové prvky mysleme si rozdělený prostor $\mathbf{S}_1$. Jsou pak pobočné hrany prvku dS_n dány vektory $\Delta x_n \mathbf{i}$ a obsah jeho skalárním součinem $\Delta x_n \mathbf{i} \,.\, d\mathbf{p}$; pročež

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}_1} \frac{v(x_n, y_n, z_n)}{\Delta x_n\, r_{0n}}\,dS_n = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{V}} \frac{v(x_n, y_n, z_n)}{r_{0n}}\,\mathbf{i} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Rozvrhneme-li prostor $\mathbf{S}'_1$ podobně v prvky prostorové, musíme obsah jednoho z nich vyjádřiti skalárním součinem $-\Delta x_n \mathbf{i} \,.\, d\mathbf{p}$; neboť tvoří-li vektor $d\mathbf{p}$, jehož kladný směr jest vždy namířen z vnitřku prostoru $\mathbf{S}$ na venek, s osou úseček pro $\mathbf{S}_1$ úhel ostrý, uzavírá tento vektor pro $\mathbf{S}'_1$ s touž osou úhel tupý anebo naopak. Jest tedy

$$\int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{S}'_1} \frac{v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)}{\Delta x_n\, r'_{0n}}\,dS_n$$

$$= - \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbf{V}} \frac{v(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)}{r'_{0n}}\,\mathbf{i} \,.\, d\mathbf{p}.$$

Vyjádřili jsme takto oba integrály, vztahující se k prostorům $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}'_1$ integrály plošnými, v nichž za znamením integrace se v jmenovateli nevyskytuje velmi malá veličina Δx_n. Značí-li nyní v hodnotu dané skalární veličiny v bodech omezující plochy V, můžeme za limitu rozdílu

$$\int\int_{S_1}\int \frac{v\,(x_n + \Delta x_n, y_n, z_n)}{\Delta x_n\, r'_{0n}}\, dS_n - \int\int_{S_1}\int \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)}{\Delta x_n\, r_{0n}}\, dS_n$$

psáti integrál $\int\int_{V}\int \frac{v}{r_{0n}}\, \mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p}$.

Tudíž rovnice (η) přemění se v

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = Pot\, \frac{\partial v}{\partial x_n} + \int\int_{V}\int \frac{v}{r_{0n}}\, \mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p}. \tag{51^a}$$

Vyhovuje-li dané pole skalární některým zvláštním podmínkám, může poslední integrál v tomto vzorci rovnati se nulle. Důležité jsou tyto případy:

1. Pole skalární má rozměry konečné, funkce skalární v jest konečná, nepřetržitá a mimo to na omezující ploše V, k níž se integrace vztahuje, má všude hodnotu rovnou nulle. Pak musí též

$$\int\int_{V}\int \frac{v}{r_{0n}}\, \mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p} = 0;$$

pročež platí rovnice

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = Pot\, \frac{\partial v}{\partial x_n}. \tag{51^b}$$

2. Předpokládejme, že plocha, omezující dané pole skalární, jest plochou kulovou K, opsanou kolem pólu P, jejíž proměnlivý poloměr může vzrůstati do nekonečna. Obsah prvku této plochy dán jest výrazem $r^2\, d\sigma$. Skalární součin $\mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p}$ představuje patrně průmět tohoto prvku na rovinu os y-ové a z-ové. Poněvadž průmět kterékoli části roviny na jinou rovinu jest obecně menší než plocha promítnutá, jest

$$\mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p} < r^2 d\sigma.$$

Je-li potenciál daného pole konvergentní, platí podmínka (50^a), totiž $v\, r^3 < k$; tudíž

$$\int\int_{K}\int \frac{v}{r}\, \mathbf{i}\,.\,d\mathbf{p} < \int\int_{K}\int \frac{v}{r}\, r^2 d\sigma < \int\int_{K}\int \frac{k}{r^2}\, d\sigma.$$

Avšak

$$\int\int_K \frac{k}{r^2} d\sigma = \frac{k}{r^2} \int\int_K d\sigma = \frac{4\pi k}{r^2},$$

pročež

$$\int\int_K \frac{v}{r} \mathbf{i} \,.\, d\mathfrak{p} < \frac{4\pi k}{r^2}.$$

Vzrůstá-li r do nekonečna, bude dle toho mezní hodnota integrálu $\int\int_K \frac{v}{r} \mathbf{i} \,.\, d\mathfrak{p}$ rovna nulle; tedy zjednodušená rovnice (51^b) jest správná, jestliže skalární pole nepřetržité jest nekonečné a zůstává-li v něm součin $v\,r^3$ i pro nekonečně velké r konečný.

3. Funkce v může míti v některém bodě $M_n(x_n, y_n, z_n)$ pole skalárního, jehož vzdálenost od pólu P jest r, hodnotu nekonečně velkou; i v tom případě platí zjednodušená rovnice (51^b), jestliže se vyhoví podmínce $v\,l < k$, kde značí l vzdálenost bodu M_n od jiného bodu M'_n pole, ležícího velmi blízko u M_n. Opíšeme-li totiž touto vzdáleností kolem M_n plochu kulovou K, kterou pokládejme za omezující plochu V, jest opět

$$\mathbf{i} \,.\, d\mathfrak{p} < l^2 d\sigma',$$

tedy

$$\int\int_K \frac{v}{r} \mathbf{i} \,.\, d\mathfrak{p} < \int\int_K \frac{v}{r} l^2 d\sigma'.$$

Poněvadž dle vytčené podmínky

$$\int\int_K \frac{v}{r} l^2\, d\sigma' < \int\int_K \frac{k}{r} l\, d\sigma'$$

a

$$\int\int_K \frac{k}{r} l\, d\sigma' = \frac{4\pi k}{r} l,$$

jest

$$\int\int_K \frac{v}{r} \mathbf{i} \,.\, d\mathfrak{p} < \frac{4\pi k}{r} l.$$

Blíží-li se l nulle, blíží se tudíž hodnota integrálu na levé straně této nerovnosti také nulle; pročež

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = Pot\, \frac{\partial v}{\partial x_n}.$$

Zjednodušená tato rovnice platí tedy i pro nekonečně velké hodnoty funkce skalární v některém bodě pole, vyhoví-li se podmínce, že součin $v\,l$ má hodnotu konečnou.

Mimo tyto případy nelze vždy bezpečně souditi o platnosti rovnice (51^b) a jest nutno použíti složitější rovnice (51^a). Zvláště sluší se zmíniti o případu, kdy funkce v jest v některé ploše přetržitou. Pak bude výhodno nahraditi funkci v jinou v', která má v celém prostoru mimo plochu přetržitosti S tytéž hodnoty jako v, ale poblíž této plochy mění rychle svou hodnotu, přejdeme-li od bodu, ležícího nekonečně blízko na jedné straně plochy S, k bodu, položenému též nekonečně blízko na druhé straně její. Zavedouce takovou funkci, můžeme si totiž dle Gibbse mysliti, že povrchový integrál $\int\int \frac{v}{r}\, \mathbf{i} \,.\, d\mathbf{p}$ zahrnut jest v symbolu $Pot \frac{\partial v}{\partial x_n}$ tak, aby byl částí jeho. Toto předpokládaje lze pak psáti ve všech případech

$$\frac{\partial \; Pot\; v}{\partial x_0} = Pot \frac{\partial v}{\partial x_n},$$

a podobně

$$\frac{\partial \; Pot\; v}{\partial y_0} = Pot \frac{\partial v}{\partial y_n}, \quad \frac{\partial \; Pot\; v}{\partial z_0} = Pot \frac{\partial v}{\partial z_n}.$$

Poněvadž

$$Pot\; v = \int\int\int \frac{v\,(x_n,\, y_n,\, z_n)}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n,$$

jest dle toho

$$\frac{\partial \; Pot\; v}{\partial x_0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \int\int\int \frac{v\,(x_n,\, y_n,\, z_n)}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n,$$

anebo differencujíce výraz za znamením integrace dle x_n

$$\frac{\partial \; Pot\; v}{\partial x_0} =$$

$$\int\int\int \frac{(x_n - x_0)\; v\,(x_n,\, y_n,\, z_n)}{\sqrt{[(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2]^3}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n,$$

čili kratčeji

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{(x_n - x_0)\, v_n}{r_{0n}^3}\, dS_n\,; \tag{52}$$

podobné výrazy obdržíme pro $\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial y_0}$, $\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial z_0}$.

Přihlížejíce k významu operátoru ∇ (dle rovnice 30), který však označíme ∇_0, abychom vytkli, že se vztahuje k proměnlivým souřadnicím x_0, y_0, z_0 pólu, obdržíme

$$\nabla_0\, Pot\, v = \mathbf{i}\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} + \mathbf{j}\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial y_0} + \mathbf{k}\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial z_0}, \tag{η}$$

anebo vzhledem k rovnici (51^b)

$$\nabla_0\, Pot\, v = \mathbf{i}\, Pot\, \frac{\partial v}{\partial x_n} + \mathbf{j}\, Pot\, \frac{\partial v}{\partial y_n} + \mathbf{k}\, Pot\, \frac{\partial v}{\partial z_n}.$$

Za výraz na pravé straně této rovnice lze patrně psáti $Pot\, \nabla_n v$, kde operátor ∇_n se vztahuje k souřadnicím x_n, y_n, z_n libovolného bodu pole skalárního. Tudíž bude

$$\nabla_0\, Pot\, v = Pot\, \nabla_n v. \tag{53}$$

Poněvadž $\nabla_n v$ jest vektor, máme na pravé straně této rovnice potenciál vektorové funkce, o němž bude pojednáno později; budiž tuto jenom připomenuto, že takový potenciál jest vektorem.

Užijeme-li hodnot (52) pro $\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial y_0}$, $\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial z_0}$, nabudeme z rovnice ($\eta$)

$$\nabla_0\, Pot\, v = \int\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\mathbf{i}\,(x_n - x_0)\, v_n}{r_{0n}^3} + \frac{\mathbf{j}\,(y_n - y_0)\, v_n}{r_{0n}^3} + \frac{\mathbf{k}\,(z_n - z_0)\, v_n}{r_{0n}^3} \right\} dS_n\,;$$

jelikož

$$\mathbf{i}\,(x_n - x_0) + \mathbf{j}\,(y_n - y_0) + \mathbf{k}\,(z_n - z_0) = \mathbf{r}_{0n},$$

bude též

$$\nabla_0\, Pot\, v = \int\!\!\int\!\!\int \frac{v_n\, \mathbf{r}_{0n}}{r_{0n}^3}\, dS_n. \tag{54^a}$$

Integrál na pravé straně této rovnice, který jest patrně vektorem, jest zvláště důležitým v mathematické fysice; i jmenuje se někdy *integrálem Newtonovým.* Volíce proň označení *New*, píšeme

$$New\, v = \int\int\int \frac{v\,(x_n, y_n, z_n)\,\mathbf{r}_{0n}}{r_{0n}^3}\, dx_n\, dy_n\, dz_n. \tag{55}$$

Tudíž rovnice (54ᵃ) změní se ve

$$\nabla\, Pot\, v = New\, v, \tag{54^b}$$

vynecháme-li u ∇ ukazovatel, kde není třeba obávati se nedorozumění.

Význam integrálu (55) jest tento: Je-li dané pole skalární útvarem hmotným, jehož proměnlivá specif. váha jest v, určuje tento integrál velikost síly, kterou dle Newtonova zákona o všeobecné gravitaci hmotný útvar přitahuje pól P, v němž si myslíme soustředěnu jednotku hmoty.

Má-li částice v bodu M_n takového útvaru hmotu $d\,m_n$ a je-li $\mathbf{r}_{0n} = r_{0n}\,\mathbf{r}_1$ vektor spojující body P a M_n, jest síla, kterou pól P o jednotce hmoty jest přitahován částicí M_n, dána výrazem $\frac{d\,m_n}{r_{0n}^2}\,\mathbf{r}_1$ čili $\frac{d\,m_n}{r_{0n}^3}\,\mathbf{r}_{0n}$. Pročež sílu přitažlivou, jíž působí celý útvar hmotný na pól P, stanoví integrál

$$\int\int\int \frac{d\,m_n}{r_{0n}^3}\,\mathbf{r}_{0n},$$

aneb, poněvadž $d\,m_n = v_n\,dS_n$, též

$$\int\int\int \frac{v_n\,\mathbf{r}_{0n}}{r_{0n}^3}\,dS_n,$$

což jest $New\ v$.

Přestávajíce na těchto vývodech o poli skalárním, přejdeme nyní k důležitějším polím vektorovým.