Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Jak lze od ne-euklidické geometrie dospěti k II. zák. Keplerovu a principu relativnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 330--339

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122943

s ellipsou). Lépe je představiti si — jako v případě III. — že se vytvoří rovinná křivka kotálením ellipsy, jako pro projekci geodetiky (případ I.), střed této křivky se umístí ve středu plochy a křivka kotálením po ellipsoidu vytvoří geodetiku.

Kužel, o němž je řeč ve větě III., protne ellipsoid ještě v jedné křivce; je zřejmo, že je to také geodetika ellipsoidu, s prvou shodná, mající tedy totéž c.

Jak lze od ne-euklidické geometrie dospěti k II. zák. Keplerovu a principu relativnosti.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Po objevení principu relativnosti nastává úkol vyrovnati mezi tímto jednoduchým věděním a naším taktéž velmi jednoduchým a harmonickým věděním o gravitaci.

Zákon Newtonův jest přirozeným shrnutím a rozšířením tří zákonů Keplerových. Od nich, přes myšlenky Newtonovy vede cesta ku vzorcům klassické mechaniky, která, jak známo, úplně s principem relativnosti se nesrovnává. Klassická mechanika udává vzorce hodící se pro rychlosti velmi malé vůči rychlosti světla; nová mechanika chce toto omezení odložiti. Bude tedy nutno buď na zákonech Keplerových neb na myšlenkách Newtonových něco změniti či doplniti, aby se principu relativnosti vyhovělo.

Přirozeným východiskem pro takovou práci jest rozbor zákonů Keplerových, rozbor popisu relativního pohybu planety vůči slunci. Aby pak práce tato nestala se příliš rozvláčnou, věnuji toto malé pojednání t. zv. druhému zákonu Keplerovu, jenž praví: *Tělesa nebeská pohybují se kol slunce v kuželosečkách, v jichž společném ohnisku se nalézá slunce.* *) — Zákon ten považuji totiž za vlastní základnu našich názorů o gravitaci a tedy celé klassické mechaniky vůbec.

Pro účely naše třeba si uvědomiti, že pozorování pohybu země kol slunce koná se pomocí světla, jež se šíří konečnou

*) Formulace Strouhalova. Viz Mechaniku, vyd. 2. z r. 1910, str. 372.

rychlostí

$$c = 300.000 \frac{km}{sec}.$$

Relativní pohyb planety země kol slunce určuje se, jak známo, pozorováním zdánlivého pohybu slunce vůči stálicím. Ale v okamžiku τ nevidíme slunce tam, kde téže chvíle jest, nýbrž tam, kde bylo před časem t, jehož potřebuje světlo (mající rychlost c), aby urazilo průvodič r od slunce k planetě vedený, kde

$$r = ct.$$

K relativní poloze planety vůči slunci náleží tedy jistý čas t, jenž se stanoví také rozdílem, jako relativní souřadnice vůči slunci. Když hodiny pro planetu ukazují čas τ, určí pozorovatel polohu slunce náležející k času

$$\tau - t.$$

Odečteme-li od času planetárního τ, sluneční čas $\tau - t$, dostaneme právě čas t, jejž nazveme relativním stářím planety vůči slunci.

Položíme-li do roviny pohybu planetárního Descartesův kříž, jehož počátek jest ve slunci, jehož osy mají stálý směr vůči stálicím, pak jest relativní poloha planety vůči slunci (x, y) vázána k relativnímu stáří t, rovnicí

$$x^2 + y^2 = c^2 t^2, \tag{1}$$

neboť průvodič

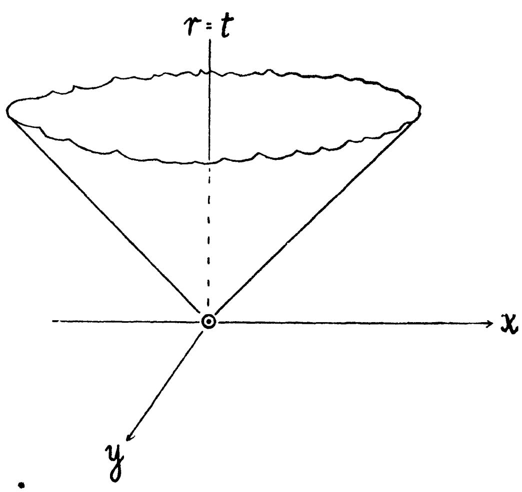
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Volíme-li jednotky času a délky tak, aby rychlost světla stala se rovna jednotce, jest relativní stáří planety numericky rovno průvodiči. Geometricky značí pak rovnice (1), že bod x, y, r je vázán na kužel

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

kde r značí zároveň průvodič i relativní stáří planety vůči slunci. Viz obr. 1.

Vkládám několik slov o původu relace (1), kterou budu nazývati *vazbou Minkowského,* poněvadž jsem ji nalezl v jeho pokusu o rovnice problemu dvou těles, jímž chtěl nauku o gravitaci přizpůsobiti principu relativnosti. Minkowski sdílí však — jako Newton, Ampère a j. — jen výsledky svých studií. Pochody myšlenkové, jež ho k nim dovedly, přechází mlčením. Zdá se, že právě touto vazbou chtěl vyjádřiti: gravitace šíří se rychlostí světla. Rovnice zmíněné jsou v dodatku slavného pojednání „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", jehož úvod formuluje princip relativnosti.



Obr. 1.

Položíme zase rychlost světla rovnu jedné, aby vazba Minkowského, rovnice mezi relativním stářím planety a jejími relativními souřadnicemi vůči slunci zněla

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

Geometricky značí, že planeta je vázaná na kužel v prostoru x, y, r, jak znázorňuje obr. 1.

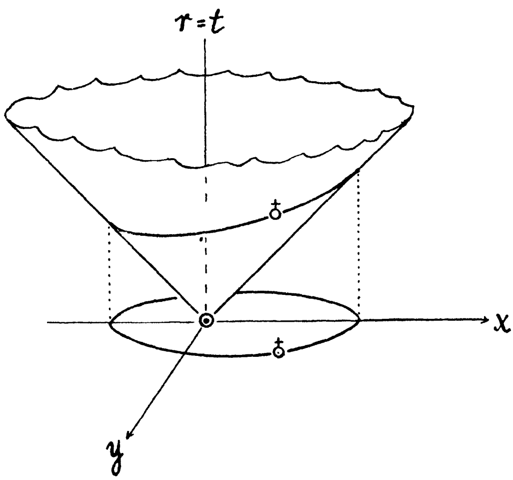
Dráha planety v rovině x, y zobrazí se pak křivkou na tomto kuželi; přenese se naň promítáním. (Viz obr. 2.) Křivku v prostoru x, y, r určují však dvě rovnice, pročež vedle relace (2) existuje ještě jiná

$$F(x, y, r) = 0.$$

Když se pomocí vazby Minkowského z této relace eliminuje r, dostaneme rovnici dráhy planetární v relativních souřadnicích x, y. O funkci F víme, že obsahuje ještě parametry na x, y, r nezávislé, neboť dráhy planetární mohou se lišiti polohou, tvarem a velikostí. Dále víme, že k jednomu bodu x, y náleží jediný průvodič r, lze ji tedy dle r řešiti, čím dostaneme

$$r = f(x, y), \tag{3}$$

kde f jest jednoznačnou funkcí dle x, y.



Obr. 2.

Kdyby nebylo studií o neeuklidické geometrii, musili bychom nyní skončiti poznámkou, že dle druhého zákona Keplerova funkce f jest lineárnou dle „x“ a „y“.

Dnes můžeme se dověděti, proč jest lineárnou a jak dalece tato lineárnost platí. Dnes víme, že k naší obvyklé projektivní geometrii náleží ∞^1 různých metrik, z nichž jednotlivá charakterisována parametrem „k“, jenž jest délkou reálnou neb imaginární. V Euklidově metrice jest „k“ právě nekonečné, má excessivní t. j. nejvýše pravdě *ne*podobnou hodnotu. Zajisté jest „k“ velmi veliké vůči rozměrům drah planetárních, ale nemám tolik odvahy, abych bez odůvodnění předpokládal, že jest právě zrovna nekonečné. Budu předpokládati, že jest sice veliké, ale konečné *). Toto „k" proniká pak všechny vzorce geometrické a rovnici (3) třeba pojímati jako

$$\frac{r}{k} = f\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right);$$

jest totiž „k" absolutní jednotkou délky přesně v tom smyslu, jako poloměr koule ve sferické trigonometrii. — Pamatujme, že

$$\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{r}{k}$$

jsou maličké zlomky.

Jako vždy v mathematické fysice budeme předpokládati, že funkci f lze rozvinouti dle argumentů tak, že

$$\frac{r}{k} = \frac{r_0}{k} + a\frac{x}{k} + b\frac{y}{k} + \ldots,$$

kde vynechaní členové jsou stupně druhého a vyššího. Pokud „x" a „y" jest velmi malé vůči „k", lze vyšší mocniny zanedbati a zbude linearná relace

$$r = r_0 + ax + by$$

mezi x, y, r, čím jsme dospěli *k druhému zákonu Keplerovu. Zákon ten platí tedy, pokud rozměry dráhy planetární jsou velmi malé proti parametru prostoru „k", t. j. platí v oboru, v němž Eukleidova geometrie jeví se pro praxis správnou.*

Snad zdá se někomu toto odvození druhého zákona Keplerova odvážným. Což to bylo méně odvážné, když Kepler mírně od kružnice se odchylující z měření t. j. přibližně mu známou dráhu Marta prohlásil za elipsu, za jednoduchou křivku? Není můj předpoklad, jen rozvinutelnost funkce

$$r = f(x, y)$$

neskonale skromnějším? — Ale vtažení neeuklidické geometrie! — V tom není nic odvážného. Spíše ti se exponují, kteří slepě

*) Studie o této kosmické konstantě uveřejňuji (ve formě širším kruhům přístupné) v Ostwaldových »Annalen der Naturphilosophie«. Výšlo »Zur Frage nach der Geometrie der Lichtstrahlen und starren Körper«. V tisku jest: »Das Weltbild im Riemannschen Raume.«

důvěřují geometrii Euklidově, kteří nepřístupnou dosud konstantu kladou hned rovnu nekonečné. Právě střízlivá opatrnost ukládá nám, abychom tuto konstantu považovali sice za náramně velikou, ale ne za nekonečnou.

Aby relativní stáří planety v rovnicích vystoupilo, napíšeme druhý zákon Keplerův ve formě

$$ct = r_0 + ax + by,$$
$$O = x^2 + y^2 - c^2t^2.$$

Prostřednictvím vazby Minkowského vsune se rychlost světla „c“ do rovnic.

Ohlédněme se nyní po lineárných transformacích, jež možné dráhy planetární mezi sebou zaměňují. Jsou to lineárné transformace

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t, \\ \bar{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t, \\ \bar{t} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t, \end{aligned} \tag{4}$$

které bod x, y, t na kuželi

$$x^2 + y^2 = c^2t^2$$

ležící transformují opět v bod této plochy. To se stane najisto, když výraz

$$x^2 + y^2 - c^2t^2$$

jest invariantem transformace (4), t. j. je-li transformace ta jednou ze *skupiny transformací* Lorentzových.

Je tedy cesta k Lorentzovým transformacím od druhého zákona Keplerova, jenž sám jest důsledkem drobnosti planetární soustavy vůči prostoru. Tato nepatrná, kvalitativní věta jest ve spojení s vazbou Minkowského základnou našeho vědění o gravitaci i o principu relativnosti.

Rovnice všech možných drah planetárních

$$r = r_0 + ax + by$$

obsahuje tři podstatné konstanty. Všech možných drah jest tedy ∞^3, tolik, co jest bodů v prostoru. Tento chaos drah můžeme učiniti průhledným pomocí souhrnu všech transformací Lorentzových. K těmto transformacím náleží též otočení soustavy planetární kol slunce. Otočme obecnou dráhu

$$r = r_0 + ax + by$$

tak, aby osa x mířila k periheliu planety. Tím vypadne jedna z konstant rovnice, ježto b se stane nullou. Ostatní dvě jinak označíme tak, že rovnice redukuje se na známou polární rovnici kuželosečky

$$r = p - ex; \tag{5}$$

délka p jest parametr, průvodič na směru k periheliu kolmý, e jest číselná výstřednost kuželosečky. Tak jsme se otočením zbavili ohledu na polohu drah. Rovnice (5) obsahuje ∞^2 drah, jež se mezi sebou liší tvarem a velikostí.

Ohledů na různý tvar drah můžeme se zbaviti pomocí vlastních transformací Lorentzových. Učiníme opět rychlost světla rovnu jedné, aby vazba Minkowského zjednodušila se na

$$r = t.$$

Pak zní Lorentzova transformace v (x, t) neb, což jest totéž, v (x, r)

$$x = \frac{\bar{x} - q\bar{r}}{\sqrt{1 - q^2}}; \quad r = \frac{\bar{r} - q\bar{x}}{\sqrt{1 - q^2}}, \tag{6}$$

když kořen jest kladný a „q“ jest zlomek kladný neb záporný. Dráha (5) transformuje se rovnicemi (6) do souřadnic $(\bar{x}, \bar{r})$, čímž obdržíme zase kuželosečku

$$\bar{r} - q\bar{x} = p\sqrt{1 - q^2} - e(\bar{x} - q\bar{r});$$

lze ji spořádati v rovnici

$$\bar{r}(1 - eq) = p\sqrt{1 - q^2} - (e - q)\bar{x}.$$

Třeba rozeznávati 3 případy:

I. Je-li dráha elipsou, jest e zlomkem, tak že smíme položiti

$$q = e,$$

čím se původní elipsa (5) promění v kružnici

$$\bar{r}(1 - e^2) = p\sqrt{1 - e^2})$$

či

$$\bar{r} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

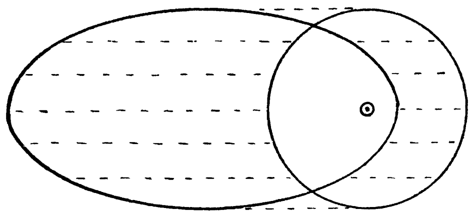
Zlomek ten značí malou poloosu b původní elipsy. Poloměr kruhu

$$\bar{r} = b.$$

Není to nic divného; neboť

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

jest při Lorentzově transformaci invariantem. Body šinou se tedy rovnoběžně s velkou osou elipsy tak daleko, až utvoří kruh kol ohniska. Viz obr. 3.



Obr. 3.

V mathematice jsou možny zvláštní chronologické úsudky, jako na př.: Kdybychom trigonometrii neměli už z klassického starověku, byla by bývala objevena při studiu jednoduchých integrálů, jež vedou na *arc sin x* neb *arc tg x*. Podobně můžeme říci, že ze soustavy Koperníkovy bylo by se po objevení principu relativnosti přišlo hned na Keplerovy elipsy. Neboť kruhové a eliptické dráhy jsou si Lorentzovou transformací aequivalentní.

II. Je-li dráha hyperbolou, jest

$$e > 1,$$

pročež reciproká hodnota výstřednosti jest zlomek a lze položiti

$$q = \frac{1}{e}.$$

Tím se hyperbola promění v přímku

$$0 = p\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} - \left(e - \frac{1}{e}\right)x,$$

což lze redukovati na

$$\bar{x} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = b,$$

kde „b“ jest malá poloosa hyperboly. Viz obr. 4., objasňující transformaci.

III. Je-li dráha parabolou, jest

$$e = 1.$$

Pak Lorentzových transformací neužijeme, poněvadž rovnice parabol

$$\bar{r} = p - \bar{x}$$

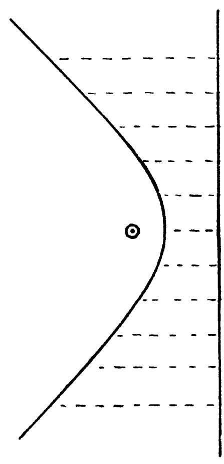
obsahuje jediný parametr, jako rovnice kruhu

$$\bar{r} = b$$

neb přímky

$$\bar{x} = b.$$

Pomocí Lorentzových transformací lze tedy dráhy planetární redukovati na tři typy: paraboly, kruhy, přímky. Každý typus obsahuje ∞^1 drah; dráhy stejného typu liší se mezi sebou jen velikostí.



Obr. 4.

Vytěživše Lorentzovy transformace do krajnosti, můžeme si zodpověděti otázku, zda mimo ně nejsou ještě jiné transformace lineárné, jež individua zmíněných typů mezi sebou zaměňují. Transformace taková skutečně existuje; zní

$$\bar{x} = ax,$$
$$\bar{y} = ay,$$
$$\bar{r} = ar.$$

Jest to t. zv. *podobné zvětšení od počátku*. Lze jím osnovu parabol, kruhů neb přímek redukovati na individua

$$r = 1 - x; \quad r = 1; \quad x = 1$$

bez parametru vůbec. Proto dalších transformací obsahujících parametry vůbec není.

Objevili jsme tedy, že dráhy planetární zaměňují se mezi sebou transformacemi ze skupiny Lorentzovy rozšířené libovolným zvětšením. Přípustnost zvětšení jest důsledkem okolnosti, že dráhy jsou velmi malé vůči parametru prostoru „k", pročež je lze zpracovati pomocí geometrie Euklidovy, k jejímž prostředkům zvětšení náleží. Souvislost zjevů gravitačních s geometrickou podobností postřehl poprvé Laplace r. 1824.

Druhý zákon Keplerův ukázal se důsledkem jednoduchého qualitativního vztahu soustavy planetární k prostoru: totiž její drobnosti. Zákon ten je již ve shodě s principem relativnosti, když trváme na platnosti vazby Minkowského, jež vyjadřuje, že pozorujeme světlem a že tíže šíří se jako světlo. Není tedy napětí mezi zjevy gravitačními a principem relativnosti tak veliké, jak se na první pohled zdá. Naopak: princip relativnosti mohl býti, vycházeje od druhého zákona Keplerova a vazby Minkowského, tak dobře objeven, jako pomocí rovnic Maxwellových. Poněvadž princip vztahuje se na relativní stáří a souřadnice planety, *zůstávají obvyklé* prosté *rovnice differentialní*, v nichž neodvisle proměnná jest úměrna ploše průvodičem opsané, *správnými*. Této neodvisle proměnné se beztoho nechceme vzdáti, protože vede k rovnicím formy Hamiltonovy, k rovnicím t. zv. kanonickým. Proto jí musíme věnovati pozornost, ač nesmíme tvrditi, že tato neodvisle proměnná značí plynoucí čas. Přibližně to zajisté v naší soustavě sluneční platí. Jinak by Kepler svůj první zákon o ploše průvodičem opsané nebyl našel. Přesně to neplatí, poněvadž by jinak nebylo napjetí mezi principem relativnosti a klassickou mechanikou. Určení povahy neodvisle proměnné klassické mechaniky, stanovení poměru jejího k času definovanému a přenášenému světlem považuji za vlastní úkol nové mechaniky.

Tím jsme odvodili v rámci nadpisem článku vymezeném, co se počtem odvoditi dá — jak říkával drahý mně učitel, jenž mě naučil počítat. Řešení úkolu ku konci nadhozeného nelze provésti bez Newtonových myšlenek o pohybu těžiště.