Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Velísek

Plochy konstantní křivosti s dvojnásobným systémem geodetických kruhů stejných poloměrů a oblouků

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 509--519

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122940

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1912

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Odchylka při vzdálenosti 1·5 *m* od zrcátka dynamometru byla 2 — 5 *mm* při 1 *mm* pohybu běhounku na měrném drátě.

Bylo lze měřiti indukce od 0·01 *H* do 10 *H* při odporech od 2 Ω — 4000 Ω.

Při uvedeném měření pomocí dynamometru nemá deformace proudu při indukcích se železem vliv na přesnost měření, kdežto při měření pomocí telefonu činí deformace taková měření téměř nemožným.

Podobné výhody jako užitím dynamometru s fásovým transformátorem lze též dosíci tím způsobem, že do větví mostu zavádíme proud střídavý, v mostě pak použijeme galvanoměru stejnosměrného, připojeného přes komutátor, jenž synchronně se střídavým proudem se otáčí a při němž natáčením kartáčků můžeme voliti okamžik komutace.

Plochy konstantní křivosti s dvojnásobným systémem geodetických kruhů stejných poloměrů a oblouků.

Napsal Dr. **Frant. Velísek.**

Pro tvar lineárního elementu

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \tag{1}$$

jsou dány geodetické křivosti ϱ_u, ϱ_v čar souřadných výrazy

$$\begin{aligned}\varrho_u &= -\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}}\right),\\ \varrho_v &= -\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left(\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Dle podmínky má býti

$$\varrho_u = \varrho_v = -c, \quad e = g = \varepsilon^2,$$

a položíme-li za $\frac{f}{\varepsilon}$ funkci φ, obdržíme z rovnic (2)

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} = c\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u} = c\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}. \tag{3}$$

Srovnáme-li poslední dva výrazy, obdržíme rovnici

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

neb

$$\frac{\partial (\varepsilon + \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial (\varepsilon + \varphi)}{\partial v}.$$

Integrace dává

$$\varepsilon + \varphi = F(u + v). \tag{4}$$

Zavedeme-li nové proměnné relacemi

$$u + v = \alpha, \quad u - v = \beta,$$

dává rovnice první ze systému (2) s použitím rovnice (4)

$$\frac{\partial (2\varepsilon - F)}{\partial \alpha} = c\varepsilon \sqrt{F(2\varepsilon - F)}.$$

Položíme-li ještě

$$\sigma^2 = 2\varepsilon - F,$$

nabude poslední rovnice tvaru diff. rovnice Riccatiho

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = c \frac{F + \sigma^2}{4} \sqrt{F}. \tag{5}$$

Výraz (1) změní se na

$$ds^2 = \frac{F + \sigma^2}{4} (F d\alpha^2 + \sigma^2 d\beta^2). \tag{6}$$

Pro úhel souřadných čar ω nabýváme pak vztahu

$$\cos \omega = \frac{F - \sigma^2}{F + \sigma^2},$$

a dosadíme-li příslušné veličiny do vzorce Lionvilleova pro totální křivost k, obdržíme pro

$$\sigma = \sqrt{F}\, tg\, \tau$$

$$-k \frac{F^2\, tg\, \tau}{4 \cos^2 \tau} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \tau}{F} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{F\, tg\, \tau}{\cos \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\cos \tau}{F\, tg\, \tau} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{F}{\cos \tau}\right),$$

a provedeme-li naznačené úkony

$$-k \frac{F^2\, tg\, \tau}{4 \cos^2 \tau} = \left(\frac{F'}{F}\right)' tg\, \tau + \frac{F'}{F} \frac{\tau_\alpha}{\cos^2 \tau} + \frac{\tau_{\alpha\alpha}}{\cos^2 \tau}(1 + \sin^2 \tau)$$

$$+ \frac{4 \tau_\alpha^2 \sin \tau}{\cos^3 \tau} + \tau_{\beta\beta}, \tag{7}$$

kde F' značí $\frac{dF}{d\alpha}$, τ_α, τ_β pak parciální derivace funkce τ dle α, resp. β.

Z rovnice (5) jde pro $\sigma = \sqrt{F}\, tg\, \tau$

$$\tau_\alpha = \frac{cF}{4} - \tfrac{1}{2}\frac{F'}{F} \sin \tau \cos \tau,$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = \frac{cF'}{4} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{F'}{F}\right)' \sin \tau \cos \tau - \tfrac{1}{2}\frac{F'}{F} \cos 2\tau \,.\, \tau_\alpha,$$

a pomocí těchto hodnot pro totální křivost

$$\frac{c^2+k}{4}\,\frac{F^2\, tg\, \tau}{\cos^2 \tau} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{F'}{F}\right)' \sin \tau \cos \tau + \frac{cF'}{8}(2+\cos 2\tau)$$
$$- \tfrac{1}{8}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 \sin 2\tau \cos 2\tau + \tau_{\beta\beta} = 0.$$

Předpokládáme-li, že τ není jen funkcí α, obdržíme násobením poslední rovnice veličinou τ_β a integrací dle β

$$4(c^2+k)\, F^2\, tg\, \tau - 4\left(\frac{F'}{F}\right)' \cos 2\tau + 8cF'\tau + 2cF' \sin 2\tau$$
$$- \left(\frac{F'}{F}\right)^2 \sin^2 2\tau + 16\tau_\beta^2 = \varphi(\alpha),$$

kde φ značí libovolnou funkci argumentu α.

Máme tudíž pro funkci τ rovnice

$$\left.\begin{aligned} 4\tau_\alpha &= cF - \frac{F'}{F}\sin 2\tau \\ 4\tau_\beta &= \sqrt{\left\{\varphi(\alpha) - 4(c^2+k)\, F^2\, tg^2\, \tau + 4\left(\frac{F'}{F}\right)'\cos 2\tau \right.} \\ &\qquad \overline{\left. - 8cF'\tau - 2cF' \sin 2\tau + \left(\frac{F'}{F}\right)^2 \sin^2 2\tau\right\}} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Vyjádříme-li podmínku

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha},$$

obdržíme

$$A \cos^3 \tau + B \cos^5 \tau + C\tau \cos^3 \tau + D\tau \cos^5 \tau$$
$$= E \sin \tau + G \sin \tau \cos^4 \tau, \qquad (9)$$

kde k vůli krátkosti kladeno

$$\left.\begin{aligned}A &= \varphi' - 8(c^2+k)\,FF' - 4\left(\frac{F'}{F}\right)'' + 4\left(\frac{F''}{F}\right)\left(\frac{F'}{F}\right)' \\ &\qquad - c^2FF' - \frac{F'}{F}\,\varphi \\ B &= 8(c^2+k)\,FF' + 8\left(\frac{F'}{F}\right)'' - 2c^2\,FF' + 2\,\frac{F'}{F}\,\varphi \\ C &= 8c\,\frac{F'^2}{F} - 8cF'',\; D = -16c\,\frac{F'^2}{F},\; E = 2c(c^2+k)\,F^3, \\ G &= 8c\left(F'' - \frac{F'^2}{F}\right).\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Dle předpokladu není τ jen funkcí α. Musí tudíž rovnice (9) býti identicky splněna. Snadno se pak přesvědčíme, že koefficienty její jsou všechny rovny 0.

Výraz

$$E = 2c(c^2+k)\,F^3 = 0$$

jest splněn buď při $k = -c^2$, neb při $c = 0$.

Pro $k = -c^2$ dává $D = 0$

$$F' = 0,\ \text{tedy}\ F = konst = a^2,$$

a rovnice $A = 0$

$$\varphi' = 0.$$

Systém rovnic (10) jest tudíž splněn při $c \neq 0$ hodnotami

$$k = -c^2,\ F = a^2,\ \varphi = konst = b^2.$$

Rovnice (8) pak dávají

$$\tau_\alpha = \frac{ca^2}{4},\quad \tau_\beta = \frac{b}{4},$$

a tedy jest τ lineární funkcí proměnných α, β

$$\tau = \frac{ca^2}{4}\,\alpha + \frac{b}{4}\,\beta.$$

Poněvadž

$$\sigma = \sqrt{F}\,tg\,\tau = a\,tg\left(\frac{ca^2}{4}\,\alpha + \frac{b}{4}\,\beta\right),$$

obdržíme pro element oblouku plochy výraz

$$ds^2 = \frac{a^4}{4cos^2\tau}\,(d\alpha^2 + tg^2\,\tau\,d\beta^2),$$

a pro $cos\ \omega$

$$cos\ \omega = \frac{F - \sigma^2}{F + \sigma^2} = \frac{1 - tg^2\,\tau}{1 + tg^2\,\tau} = cos\ 2\tau,$$

tudíž

$$\omega = 2\tau.$$

Vyjádříme-li geodetickou křivost čar $\alpha = konst$, $\beta = konst$, obdržíme

$$\varrho_\alpha = -\frac{ca^2}{2}\frac{1 + sin^2\,\tau}{cos^2\,\tau}, \quad \varrho_\beta = -\frac{b}{2}.$$

Diagonály čar $u = konst$, $v = konst$. $u - v = \beta$ jsou tudíž geodetické kruhy. Rovnice (10) jsou splněny též pro $c = 0$ při podmínkách

$$\left.\begin{aligned} \varphi' - 8kFF' - 4\left(\frac{F'}{F}\right)'' + 4\left(\frac{F'}{F}\right)\left(\frac{F'}{F}\right)' - \frac{F'}{F}\,\varphi = 0, \\ 4kFF' + 4\left(\frac{F'}{F}\right)'' + \frac{F'}{F}\,\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Součet rovnic těchto dává

$$\varphi' - 4kFF' + 4\frac{F'}{F}\left(\frac{F'}{F}\right)' = 0,$$

z čehož integrací plyne

$$\varphi = 2kF^2 - 2\left(\frac{F'}{F}\right)^2 + m,$$

kde m značí integrační konstantu. Násobíme-li poslední rovnici výrazem $\frac{F'}{F}$ a dosadíme do prvé z rovnic (11), dostaneme

$$6kFF' + 4\left(\frac{F'}{F}\right)'' - 2\left(\frac{F'}{F}\right)^3 + m\,\frac{F'}{F} = 0,$$

neb po krátké úpravě

$$4F''' - 6\left(\frac{F'^2}{F}\right)' + 6kF^2F' + mF' = 0.$$

Integrací jde při integrační konstantě m_1

$$4F'' - 6\,\frac{F'^2}{F} + 2kF^3 + mF + m_1 = 0.$$

Násobíme-li tuto rovnici $\frac{F'}{F^3}$, můžeme ji psáti ve tvaru

$$2\left(\frac{F'^2}{F^3}\right)' + 2\,kF' + m\frac{F'}{F^2} + m_1\frac{F'}{F^2} = 0,$$

z čehož integrací při integrační konstantě m_2

$$2F'^2 = m_2F^3 - 2kF^4 + mF^2 + \tfrac{1}{2}m_1F.$$

Nepřipojí-li se k φ žádná konstanta, možno jednoduše psáti

$$\varphi = 2kF^2 - 2\left(\frac{F'}{F}\right)^2 \tag{12}$$

$$2F'^2 = m_2F^3 - 2kF^4 + \frac{m_1}{2}F. \tag{13}$$

Zavedeme-li novou proměnnou substitucí

$$\int\sqrt{F}d\alpha = u_1,$$

z čehož plyne obrácením, značí-li U funkci argumentu u_1,

$$F = 4U,\ F' = 8U'\sqrt{U},$$

a klademe-li místo m_1 a m_2 nové konstanty $64m_1$ resp. $2m$, dostaneme z rovnice (13)

$$U'^2 = -4kU^3 + mU^2 + m_1.$$

Rovnici poslední převedeme substitucí

$$U_1 = -kU + \frac{m}{12},\quad g_2 = \frac{m^2}{12},\quad g_3 = -m_1k^2 - \frac{m^3}{216},$$

na normální tvar

$$U_1'^2 = 4U_1^3 - g_2U_1 - g_3,$$

a vynecháme-li bez újmy obecnosti při u_1 additivní konstantu, můžeme psáti

$$U_1 = p\,(u_1,\ g_2,\ g_3),$$

z čehož

$$U = -\frac{1}{k}\,p\,(u_1,\ g_2,\ g_3) + \frac{m}{12}.$$

Rovnice

$$\sigma = \sqrt{F}\,tg\ \tau$$

dává derivací dle β

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_\beta \cos^2 \tau}{\sqrt{F}},$$

dosazením pak těchto hodnot do druhé rovnice (8) jde pro σ_β

$$16\sigma_\beta^2 F = -64m_1 F - 4k F\sigma^6 - 4m F\sigma^4.$$

Rovnice tato přechází substitucí

$$\int \sigma d\beta = v_1,$$

z čehož

$$\sigma = 2\sqrt{-V}, \ \sigma' = -2V',$$

kde V značí funkci argumentu v_1, na tvar

$$V'^2 = +4kV^3 - mV^2 - m_1.$$

Rovnice tato vzniká z výrazu pro U' záměnou $V \,||\, U$, $u \,||\, iv_1$, dává tedy

$$V = -\frac{1}{k} p(iv_1, g_2, g_3) + \frac{m}{12k}.$$

Lineární element (6) možno pak psáti, vynecháme-li additivní konstanty, ve tvaru (Darboux, III. str. 51)

$$ds^2 = -\frac{1}{k}\left[p(u_1) + p(iv_1)\right](du_1^2 + dv_1^2).$$

Snadno pak se ukáže, že plocha s Liouvilleovým lineárním elementem má ∞^1 systémů čar geodetických, které ji dělí v infinitesimální rhomby (A. Voss: Münch. Berichte 1906, str. 269). Píšeme-li totiž krátce

$$ds^2 = (U + V)(du_1^2 + dv_1^2),$$

jsou dány geodetické čáry rovnicemi

$$\frac{du_1}{\sqrt{U+\lambda}} \pm \frac{dv_1}{\sqrt{V-\lambda}} = konst.,$$

dle λ libovolná konstanta. Vztáhneme-li plochu na parametrické čáry definované rovnicemi

$$\frac{du_1}{\sqrt{U+\lambda}} + \frac{dv_1}{\sqrt{V-\lambda}} = du_2, \quad \frac{du_1}{\sqrt{U+\lambda}} - \frac{dv_1}{\sqrt{V-\lambda}} = dv_2,$$

obdržíme

$$\frac{du_1}{\sqrt{U+\lambda}} = \tfrac{1}{2}(du_2 + dv_2), \quad \frac{dv_1}{\sqrt{V-\lambda}} = \tfrac{1}{2}(du_2 - dv_2),$$

a tedy lineární element nabývá tvaru žádaného

$$ds^2 = \frac{U+V}{4}\left\{(U+V)(du_2^2 + dv_2^2) + 2(U - V + 2\lambda)\,du_2\,dv_2\right\}$$

Pro plochy rozvinutelné, $k = 0$, nabývají rovnice definující U a V tvarů jednodušších, dávajíce tyto veličiny funkcemi elementárními. K výsledku tomu přijdeme snadno, vycházíme-li přímo od lineárního elementu Liouvilleova

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

kde U, V jsou funkce u, resp. v, a vyjádříme totální křivost $k = 0$. Obdržíme funkcionální rovnici

$$U''(U + V) + V''(U + V) - U'^2 - V'^2 = 0. \qquad (14)$$

Derivací dle u jde

$$U'''(U + V) + U'U'' + U'V'' - 2U'U'' = 0,$$

a dle v

$$U'''V' + U'V''' = 0.$$

Nepřihlížíme-li k případu, v němž U neb V jsou konstantami, můžeme klásti

$$\frac{U'''}{U'} = -\frac{V'''}{V'} = konst = m,$$

z čehož integrací

$$U'^2 = mU^2 + 2m_1U + m_2, \quad V'^2 = -mV^2 + 2m_3V + m_4.$$

Dosazením do rovnice (14) plyne

$$m_3 = m_1, \quad m_4 = -m_2,$$

tudíž

$$U'^2 = mU^2 + 2m_1U + m_2, \quad V'^2 = -mV^2 + 2m_1V - m_2.$$

Budiž rovnicí (9) funkce τ určena. Pak dle vztahu

$$\sigma = \sqrt{F}\,.\,tg\,\tau$$

jest i σ funkcí jen α, a tedy lineární element plochy náleží ploše isometrické s plochou rotační. Na plochách těchto možno určiti geodetické kruhy quadraturou (Darboux, III. str. 152). Lépe však postupovati takto: Lineární element dán dle rovnice (6) tvarem

$$ds^2 = \frac{F+\sigma^2}{4}(Fd\alpha^2 + \sigma^2 d\beta^2),$$

kde F, σ jsou funkcemi α. Píšeme-li ds^2 ve tvaru

$$ds^2 = \sigma^2 \frac{F+\sigma^2}{4}\left(\frac{F}{\sigma^2}\,d\alpha^2 + d\beta^2\right),$$

a položíme

$$\sigma^2(F+\sigma^2) = 4U,\quad \frac{\sqrt{F}}{\sigma}\,d\alpha = d\alpha_1,$$

obdržíme

$$ds^2 = U(d\alpha_1^2 + d\beta^2).$$

Totální křivost dána jest rovnicí

$$-k = \frac{UU'' - U'^2}{2U^3},$$

neb

$$-4kU' = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{U'}{U}\right)^2. \tag{15}$$

Nepřipojíme-li k α_1 additivní konstanty, obdržíme integrací

$$U = -\frac{a^2}{k\,sin^2\,a\alpha_1}.$$

kde $a \neq 0$. Tudíž

$$F + \sigma^2 = \frac{-4a}{c\,sin^2\,2a\alpha_1}.$$

Rovnice (5) dává pak

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{d\sigma}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha} = \frac{d\sigma}{d\alpha_1}\frac{\sqrt{F}}{\sigma} = \frac{c}{4}\left(F+\sigma^2\right)\sqrt{F},$$

upraveno

$$\sigma\frac{d\sigma}{d\alpha_1} = -\frac{ca^2}{k\,sin^2\,a\alpha_1},$$

z čehož integrací

$$\sigma^2 = \frac{2ac}{k}\,ctg\,a\alpha_1.$$

Pro F pak jde

$$F = -\frac{2a}{c\,sin\,a\alpha_1}\left(\frac{1}{cos\,a\alpha_1} + \frac{c^2}{k} cos\,a\alpha_1\right),$$

tudíž

$$d\alpha_1 = \frac{\sqrt{F}}{\sigma} d\alpha = \sqrt{-\left(1 + \frac{k}{c^2 cos^2 a\alpha_1}\right)}\, d\alpha,$$

a z toho

$$d\alpha = \frac{c}{a} \frac{d\,sin\,a\alpha_1}{\sqrt{c^2 sin^2 a\alpha_1 - (k + c^2)}}.$$

Integrací plyne

$$\alpha = \frac{1}{a} log\left[c\,sin\,a\alpha_1 + \sqrt{c^2 sin^2 a\alpha_1 - (c^2 + k)}\right],$$

z čehož

$$\alpha_1 = \frac{1}{a} arc\,sin \frac{e^{a\alpha} + (c^2 + k)\, e^{-a\alpha}}{2c}.$$

Lineární element ploch uvažovaných má pak tvar

$$ds^2 = \frac{a^2}{k\,sin^2 a\alpha_1}\left[\left(1 + \frac{k}{c^2 cos^2 a\alpha_1}\right) d\alpha^2 - d\beta^2\right].$$

Je-li $a = 0$, obdržíme z rovnice (15)

$$\frac{U'^2}{U^2} = -4kU,$$

integrací pak

$$U = -\frac{1}{2k\alpha_1^2}.$$

Rovnice (5) dává

$$\sigma \frac{d\sigma}{d\alpha_1} = -\frac{c}{2k\alpha_1^2},$$

a integrací

$$\sigma = \sqrt{\frac{c}{k\alpha_1}}.$$

K tomu příslušné F

$$F = -\frac{c^2 + 2k}{ck\alpha_1},$$

při čemž α_1 dáno výrazem

$$\alpha_1 = \int \frac{\sqrt{F}}{\sigma} d\alpha = \sqrt{-\frac{c^2 + 2k}{c^2}}\, \alpha.$$

V tomto případě jest úhel ω čar souřadných dán výrazem

$$cos\ \omega = \frac{F - \sigma^2}{F + \sigma^2} = \frac{c^2 + k}{k},$$

jest tudíž konstantním.

Případ

$$\varrho_u = c, \ \varrho_v = - c$$

projedná se způsobem stejným a vede k týmž výsledkům.

Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce.

Napsal Dr. **K. Zahradník.**

J. Steiner [1]) dokázal, že každým bodem t kuželosečky proložiti můžeme tři kruhy křivosti, jichž body oskulační u_1, u_2, u_3 s bodem t leží na témž kruhu. Trojúhelník oskulační $u_1 u_2 u_3$ má nezávisle na bodu t, jemuž je přidružen, stálou plochu s těžištěm ve středu kuželosečky. [2])

V následujícím [3]) podávám některé další vlastnosti trojin oskulačních na kuželosečce.

I. *Normály trojiny oskulační protínají se v jednom bodě.*

Jsou-li

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \ y = \frac{2pu}{u^2 - q} \tag{1}$$

rovnice kuželosečky, obdržíme parametry bodu t příslušné oskulační trojiny jako kořeny rovnice

$$u^3 + 3tu^2 + 3qu + qt = 0. \tag{2}$$

Parametry oskulační trojiny vyhovují tudíž relacím

$$(u)_1 = - 3t, \quad (u)_2 = 3q, \quad (u)_1 = - qt, \tag{3}$$

---

[1]) *Steinerovy* spisy díl 2. pag. 377.

[2]) *Steiner* ibid. *Zahradník*, Vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce. Weyrův Archiv math. a fysiky. Praha 1879, díl II.

[3]) Tato práce vyšla ve zprávách Kr. české společnosti nauk. 1910.