Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Záviška

Poznámka k měření Hallova zjevu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 524--538

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122928

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1912

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámka k měření Hallova zjevu.

Napsal s. doc. Dr. **Frant. Záviška.**

Hallův zjev vzniká, jak známo, u velikého množství látek, prochází-li jimi proud a jsou-li podrobeny účinku silného magnetického pole. Dva body tělesa, jež původně byly na potenciálu stejném, mají v poli potenciál různý, takže, spojíme-li je přes galvanometr, indikuje tento po vzbuzení pole proud, t. zv. Hallův. Zjev tento lze nejkratčeji vyložiti představou, že vlivem magnetického pole nastávají úchylky od jednoduchého zákona Ohmova [1]); vztah mezi složkami hustoty proudové u, v, w a mezi složkami elektrické síly X, Y, Z jest dán obecnými lineárnými funkcemi, jež, jak se dá snadno dokázati, možno vždy uvésti na tvar

$$X = \frac{\partial P}{\partial u} + rv - qw, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial v} + pw - ru, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial w} + qu - pv, \tag{1}$$

kdež P jest homogenní kvadratická forma argumentů u, v, w; koefficienty p, q, r souvisejí se vznikem Hallova zjevu, koefficienty formy P se strukturou látky.

Jde-li o měření Hallova zjevu, pak se užívá nejčastěji praeparátů ve formě tenké rovinné desky zpravidla buď pravoúhelníkové nebo tvaru kříže; silokřivky magnetického pole prostupují desku kolmo, předpokládáme také, že pole jest homogenní. V tom případě rovnice (1) značně se zjednoduší. Zvolíme-li si rovinu desky za rovinu xy, jest pak $w = 0$ a $Z = 0$, byla-li deska mimo to z materiálu původně isotropického, zůstane patrně isotropickou i v poli, a rovnice (1) tu znějí [2])

$$X = Ku - qv, \qquad Y = qu + Kv, \qquad Z = 0, \tag{1'}$$

kdež K značí specifický odpor látky, z níž deska jest zhotovena, v magnetickém poli, q jest konstanta podmiňující Hallův zjev; s t. zv. rotačním koefficientem R, jak jej Hall zavedl, souvisí relací $q = RH$, značí-li H intensitu magnetického pole.

---

1) Viz na př. *F. Koláček*, Elektřina a magnetismus, pag. 241.

2) Viz *F. Koláček*, loc. cit. pag. 244.

Řešíme-li rovnice (1′) dle u a v a vyjádříme-li síly potenciálem φ, obdržíme

$$u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} - q' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad v = q' \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{2}$$

kdež kladeno

$$\lambda = \frac{K}{K^2 + q^2}, \qquad q' = \frac{q}{K^2 + q^2}. \tag{2'}$$

Budeme se nyní zabývati úlohou stanoviti potenciál φ jako funkci souřadnic x a y v některých nejjednodušších případech, jež se při měření Hallova zjevu nejčastěji vyskytují. První podmínka plyne z rovnice kontinuity, jíž komponenty hustoty proudové vyhovují, totiž

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dv}{\partial y} = 0,$$

z níž po dosazení z rovnic (2) obdržíme vzhledem k tomu, že λ a q' na souřadnicích nezávisejí, rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

potenciál splňuje tedy i tu jednoduchou Laplace-ovu rovnici. K ní nyní přistupují podmínky, jež musí býti splněny na okraji desky a na elektrodách, jimiž se přivádí k desce primární proud. První z nich žádá, aby na rozhraní normálná složka hustoty proudové vymizela; značí-li tedy n normálu křivky ohraničující desku, již budeme vždy kladně čítati ve směru ven z desky, musí býti

$$u \cos nx + v \cos ny = 0,$$

čili po dosazení z rovnic (2)

$$\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos ny \right) + q' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos ny \right) = 0.$$

Tuto rovnici upravíme. Buď s délka oblouku hraničné křivky, čítaného kladně známým způsobem, takže pak kladný směr n a s jsou k sobě orientovány tak jako kladné směry os x a y. Jest potom

$$\cos nx = \cos sy, \qquad \cos ny = -\cos sx, \tag{3}$$

takže máme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos ny = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos sx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos sy = \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

podobně jest

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos ny = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

a podmínka na rozhraní zní

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} + q' \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \tag{4}$$

Zbývají nyní ještě podmínky na elektrodách. Způsob, jakým se děje přívod a odvod primárního proudu, jest zpravidla dvojí: buď jsou primárními elektrodami velmi tenké dráty z téhož materiálu jako deska; tento způsob má tu výhodu, že odpadnou tepelné změny na elektrodách, jakož i thermomagnetické effekty v magnetickém poli, anebo se užívá ku měření Hallova zjevu pravoúhelníkové desky, k jejímž dvěma protějším stranám se přiletují po celé délce dva měděné pruhy, jež slouží za primární elektrody. Je-li deska z vizmutu nebo z jiného materiálu, jehož vodivost jest malá proti vodivosti mědi, možno předpokládati, že podél celé elektrody jest potenciál týž, takže proudokřivky v desce jsou vesměs rovnoběžny s druhými dvěma stranami desky. Naproti tomu rozdělení proudokřivek v prvním případě jest naprosto nepravidelné; přes to však, pokud se měření Hallova zjevu týče, jest první případ theoreticky daleko jednodušší než druhý, jenž snadno může vésti k výsledkům úplně nesprávným. Dokážeme totiž v dalším, že v tom případě, kdy primární proud se přivádí resp. odvádí velmi tenkými dráty, čili, jak v dalším budeme říkati, kdy se užívá elektrod bodových, nezáleží ani na tvaru desky ani na poloze primárních elektrod, jež mohou býti buď na okraji desky nebo kdekoliv uvnitř; vždycky, kdykoliv stanovíme na okraji desky dva jakékoliv body, jež jsou na témž potenciálu, pokud pole nepůsobí, obdržíme touž a správnou hodnotu pro velikost Hallova zjevu.

Věta, že v případě bodových elektrod nemá ani tvar desky, ani poloha primárních elektrod vlivu na výsledky měření, jest ostatně známa. Experimentálně ji stvrdili *v. Ettingshausen* a *Nernst* [3]), theoretické odůvodnění podal *Boltzmann* [4]), jenž ji dokázal nejdříve pro desku kruhovou, kde se dá problém detailně řešiti, a pomocí konformního zobrazení rozšířil pak její platnost na desku tvaru libovolného. Vzhledem však k zajímavosti tohoto výsledku nebude snad nevhodno podati přímé a jednodušší řešení.

Aby úloha byla řešitelnou, musíme supponovati, že primární elektrody jsou nekonečně tenké; jinak bylo by nutno vzíti v úvahu i rozměry a tvar elektrod, čímž by se počet značně stížil. Ovšem potenciál na elektrodách stává se pak logarithmicky nekonečně velkým, je však patrno, že řešení bude udávati aspoň správnou rozlohu aequipotenciálních ploch v místech, jichž vzdálenost od elektrod jest dosti veliká proti rozměrům elektrod, a připojíme-li k tomu podmínku skutečnosti asi nejspíše odpovídající, že totiž potenciální rozdíl obou elektrod jest týž bez pole i v poli, pak obdržíme i správné hodnoty potenciálu pro body, jež nejsou v bezprostředním sousedství elektrod. Řešení úlohy, totiž integrace rovnice Laplace-ovy se zřetelem k podmínce (4) platící na rozhraní, dá se pak snadno provésti, známe-li rozdělení potenciálu v případě, kdy není pole, kdy tedy $q' = 0$. Potenciál φ_1 odpovídající tomuto případu splňuje opět rovnici Laplace-ovou, na rozhraní místo podmínky (4) platí tu podmínka jednodušší, totiž

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0.$$

Tato úloha řeší se tak, že se stanoví funkce χ komplexní proměnné $x + iy$, jejíž reálná část vyhovuje příslušným podmínkám na rozhraní i na elektrodách; jest pak

$$\chi = \varphi_1 + i\psi_1.$$

Čáry $\varphi_1 = const$ jsou čáry stejného potenciálu, čáry $\psi_1 = const$ tvoří systém k předešlému orthogonální, neboť platí

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \tag{5}$$

---

[3]) *v. Ettingshausen* u. *Nernst*, Sitzungsb. d. Wien. Akad. *94.*, 606, 1886.

[4]) *L. Boltzmann*, ibidem, pag. 644.

jsou to proudokřivky. Funkce ψ_1 splňuje také rovnici Laplace-ovu, v sousedství elektrod zůstává konečnou, konečně na okraji desky platí vzhledem k rovnicím (3) a (5)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial n}. \tag{6}$$

Klademe nyní jako řešení pro potenciál φ v případě Hallova zjevu výraz

$$\varphi = \varphi_1 + \alpha \psi_1,$$

když α jest konstanta. Rovnice Laplace-ova jest splněna, na elektrodách potenciál φ se stává logarithmicky nekonečně velkým, a dosadíme-li konečně do rovnice (4) udávající podmínky na rozhraní, obdržíme se zřetelem k rovnicím (6)

$$\alpha \lambda - q' = 0,$$

takže hledané řešení jest

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{q'}{\lambda} \psi_1 = \varphi_1 + \frac{q}{K} \psi_1. \tag{7}$$

Výsledek jest tedy velmi jednoduchý a dá se také jednoduše interpretovati. Čáry stejného potenciálu vlivem pole se stočí; naproti tomu rozdělení proudokřivek se nezmění. Dosadíme-li totiž za φ do rovnic (2), obdržíme po snadné úpravě

$$u = -\frac{1}{K} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \qquad v = \frac{1}{K} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \tag{8}$$

svírá-li tedy proudokřivka v libovolném bodě desky s kladnou částí osy x úhel ω, jest

$$tg\, \omega = \frac{v}{u} = -\frac{\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y}},$$

z čehož jest patrno, že proudokřivky jsou zase dány čarami $\psi_1 = const.$ Dá se ostatně snadno ukázati, že úhel, který čáry aequipotenciální v magnetickém poli svírají s proudokřivkami, jest ve všech místech týž a dán relací

$$\cot \beta = \frac{q}{K},$$

takže Hallův zjev vzniká tu jednoduše tím, že plochy aequipotenciální stočí se ve všech místech desky o týž úhel. Jest také patrno, že kdyby naopak na rozhraní byly předepsány hodnoty potenciálu, jež v poli se nemění, pak by rozdělení ploch aequipotenciálních zůstalo totéž, kdežto proudokřivky by se stočily. Jednoduchý případ toho druhu jest mezikruží, k jehož obvodům jsou přiletovány kruhové elektrody měděné.

Ze vzorce (7) plyne také, že aspoň pro body, jež nejsou velmi blízko u elektrod, potenciál se zvýší o hodnotu, která zůstává podél určité proudokřivky stálou. Nezávislost Hallova zjevu na tvaru desky i na poloze primárních elektrod dá se nyní dokázati ze vzorce (7) velmi jednoduše. Předpokládejme nejdříve, že elektrody jsou na okraji desky, pak obě čáry spojující elektrody a běžící po okraji desky jsou patrně proudokřivkami, na obou má ψ_1 hodnotu stálou, ovšem na každé z nich jinou. Označíme-li je ψ'_1 a ψ''_1, pak jich rozdíl $\psi'_1 - \psi''_1$ dá se snadno určiti. Spojme kterékoliv dva body těchto proudokřivek libovolnou čarou po desce probíhající, tou pak proložíme válcovou plochu kolmo k rovině desky. Je-li J intensita primárního proudu, pak celkový proud onou plochou procházející jest také J, takže platí

$$J = \int (u \cos nx + v \cos ny)\, d\omega,$$

značí-li $d\omega$ plošný element oné válcové plochy. Za ten možno psáti $\delta \,.\, ds$, je-li δ tloušťka desky, ds obloukový element křivky, v níž válcová plocha protíná rovinu desky. Dosadíme-li pak za u a v příslušné hodnoty z rovnic (8), obdržíme vzhledem k rovnicím (3)

$$J = -\frac{\delta}{K}\int \frac{\partial \psi_1}{\partial s}\, ds = \frac{\delta}{K}(\psi'_1 - \psi''_1),$$

čili

$$\psi'_1 - \psi''_1 = \frac{KJ}{\delta}.$$

Vyhledáme-li nyní na obou proudokřivkách jakékoliv dva body, které, pokud pole nepůsobí, mají potenciál stejný, pak účinkem pole vytvoří se mezi nimi potenciální rozdíl, pro jehož hodnotu plyne z rovnice (7)

$$\frac{q}{K}(\psi'_1 - \psi''_1) = \frac{qJ}{\delta},$$

a klademe-li $q = RH$, máme známý výraz pro t. zv. elektromotorickou sílu Hallova zjevu. Totéž ostatně platí, i když jedna nebo obě primární elektrody jsou uvnitř desky. V tom případě jest funkce ψ_1 mnohoznačná; jedna z proudokřivek vycházejících z elektrody uvnitř desky umístěné přichází na okraj a tam se větví; oběma větvím odpovídají různé hodnoty ψ_1, pro jichž rozdíl nalezneme stejně touž hodnotu co dříve.

Ve skutečnosti jest ovšem velmi nesnadno nalézti na okraji desky dva body přesně aequipotenciální; proto se užívá různých method, jež tento požadavek odstraňují. Z nich nejpohodlnější jest methoda *Koláčkem* [5]) udaná. Na jedné proudokřivce na okraji desky probíhající si zvolíme libovolný bod, v němž se připojí jedna sekundární elektroda, na proudokřivce druhé připojí se elektrody dvě tak, aby hledaný aequipotenciální bod byl mezi nimi. Tyto elektrody se spojí přes rheostat, v němž jest vřaděn dosti veliký odpor, takže nepatrný potenciální rozdíl, který mezi nimi jest, se rozdělí na celý ten odpor, a měníme-li jej vhodně, můžeme snadno v rheostatu nalézti hledaný aequipotenciální bod. Že touto cestou obdržíme výsledky docela správné, je přímo patrno z toho, co řečeno dříve. Vlivem magnetického pole zvýší se totiž potenciál o hodnotu podél proudokřivky stálou. O to se tedy zvýší i potenciál na obou elektrodách Koláčkových i v celém rheostatu, výsledek jest tedy docela týž, jako kdyby druhý aequipotenciální bod byl také na okraji desky. Deformace proudokřivek, jež vzniká připojením rheostatu, nemá tu podle dřívějšího významu, ostatně nepadá ani v jiných případech na váhu, poněvadž jest příliš nepatrná; jest také zřejmo, že ani na vzdálenosti obou Koláčkových elektrod tu nezáleží. Jiná methoda, jíž se při měření Hallova zjevu také užívá, spočívá v tom, že se připojí na obou stranách desky obě sekundární elektrody přibližně v aequipotenciálních bodech; eventuální potenciální rozdíl mezi nimi se pak kompensuje článkem. Theoretické zpracování této methody

[5]) *Koláček*, loc. cit. pag. 246.

jest velmi nesnadné, dřívější úvahy se tu applikovati nedají, poněvadž naše řešení neplatí pro elektrody. Ostatně i po experimentální stránce byly činěny námitky proti kompensační methodě; uvedu jen měření, jež vykonal nedávno *Raus* [6]) na vizmutu. Ten totiž pozoroval, že Hallův zjev při měření kompensační methodou jevil asymmetrii; bylo-li pole kommutováno, obrátila se sice výchylka v galvanometru, nebyla však stejně veliká. Z dat, jež *Raus* uvádí, není pochyby, že tato asymmetrie souvisí s kompensujícím proudem, poněvadž nevystupuje, jsou-li obě sekundární elektrody na téže aequipotenciální linii, s rostoucím potenciálním rozdílem obou sekundárních elektrod asymmetrie také roste docela pravidelně; konečně měření provedené methodou Koláčkovou dávalo výsledky úplně symmetrické; ale výklad její je velmi obtížný. *Raus* také potvrdil, že methoda Koláčkova dává správné výsledky nezávisle na vzdálenosti obou elektrod; celkem tedy je jisto, že jest Koláčkova methoda i theoreticky i experimentálně daleko jednodušší.

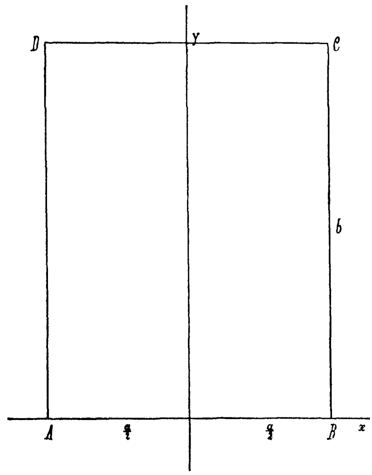
Ettingshausen a *Nernst* ukázali také, že, jsou-li elektrody bodové, možno primární a sekundární elektrody navzájem zaměniti; theoreticky správnost toho dokázal *Boltzmann*, a to zase tím, že provedl důkaz nejdříve pro desku kruhovou, pak větu rozšířil i na desky tvaru libovolného pomocí konformního zobrazení. Výsledek plyne však jednodušeji z věty, již *Maxwell* [7]) uvádí. V tělese, jímž prochází proud, zvolme si čtyři body A, B, C, D. Vstupuje-li proud intensity J v bodě A a vystupuje-li v B, pak potenciální rozdíl mezi C a D jest právě takový, jako by byl mezi A a B, když byl proud téže intensity v C vstupoval a v D vystupoval. Applikujeme-li to na náš případ, můžeme říci: Vyhledáme-li na desce při určitém postavení primárních elektrod dva aequipotenciální body, pak, přeložíme-li primární elektrody do nich, jsou nyní body, v nichž ty elektrody původně byly, na stejném potenciálu. Správnost faktu *Ettingshausenem* a *Nernstem* pozorovaného plyne pak z toho přímo; jest ovšem nutno, aby primární elektrody ležely

---

[6]) *F. Raus*, Rozpravy Čes. Akad. 20, čís. 29. 1911.

[7]) *J. C. Maxwell*, Electricity and Magnetism, I. svazek, II. vyd., pag. 373.

tu také na okraji desky, poněvadž jinak by při výměně elektrod padly elektrody sekundární dovnitř, a měřil by se Hallův zjev odpovídající jen části primárního proudu.



Obr. 1.

Přejdeme nyní k druhému případu, kdy za primární elektrody slouží proužky měděné. Deska nechť má tvar pravoúhelníku $ABCD$ (viz obr. 1.), délky stran nechť jsou a a b, ku stranám AB a CD nechť jsou dále přitaveny elektrody po celé délce, strany AD a BC jsou volné. Podle toho, co řečeno dříve, jest pak na stranách AB a CD všude potenciál týž, na CD nechť má hodnotu P, na AB pak budiž nullou. Na stranách AD a BC musí patrně býti $u = 0$, čili dle rovnice (2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

kdež kladeno

$$\alpha = \frac{q'}{\lambda} = \frac{q}{K}.$$

Jest tedy úlohou stanoviti funkci φ vyhovující Laplace-ově rovnici, jež na AB vymizí, na CD má stálou hodnotu P, na AD a BC pak vyhovuje podmínce (9). Přesné řešení této úlohy jest dosti obtížné, poněvadž podmínky na rozhraní nejsou jednotné, vztahujíce se částečně na potenciál sám, částečně na jeho derivace; přibližné řešení dá se však snadno udati. Při tom užijeme toho, že u valné většiny látek jest Hallův zjev nepatrný, tedy q, jakož i α malé. Nejnepříznivější případ jest tu ovšem u vizmutu, nehledíme-li k telluru; rotační koefficient R jest tu asi 10^{-8}, měříme-li elektrickou sílu na *Volt/cm* a hustotu proudovou na *Amp/cm*^{2}; specifický odpor vizmutu K jest asi $1{\cdot}2 \,.\, 10^{-4}$, v magnetickém poli jest o něco větší, budeme klásti průměrně $K = 1{\cdot}5 \,.\, 10^{-4}$. Pak jest v poli 1000 Gauss $\alpha = \frac{1}{15}$, tedy ještě dosti malé, v poli 7000 Gauss jest α přibližně rovno $\frac{1}{2}$, má tedy již hodnotu dosti velikou; přece však lze říci, že další úvahy podají aspoň přibližně správný obraz o průběhu Hallova zjevu i v tomto případě.

Klademe tedy řešení pro φ ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots, \tag{10}$$

kdež φ_0 nechť jest potenciál platící v případě, kdy není pole, tedy

$$\varphi_0 = P\frac{y}{b}.$$

Funkce φ_1, φ_2, atd. pak musí splňovati Laplace-ovu rovnici, na stranách AB a CD vymizejí; podmínky, jimž musí vyhověti na stranách AD a BC, obdržíme dosazením do rovnice (9), z níž plyne

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \ldots + \frac{P}{b} + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \alpha^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \ldots = 0,$$

z čehož obdržíme dále

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{P}{b} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \text{ atd.} \tag{11}$$

V dalším omezíme se jen na stanovení funkce φ_1, jest ostatně patrno, že funkce φ_2, φ_3 atd. lze stanoviti docela stejně, počet jest pak ovšem čím dál tím komplikovanější. Funkci φ_1 možno ostatně interpretovati jako logarithmický potenciál, t. j.

potenciál hmoty rozestřené po rovině xy a účinkující silami, jež klesají s první potencí vzdálenosti. Podmínka (11) pak znamená, že na stranách AD a BC jest rozestřena hmota s délkovou hustotou navzájem opačnou a úměrnou ku $\pm \frac{P}{b}$, rozdělení ostatní hmoty musíme pak tak voliti, aby na AB a CD byl potenciál nullou. Toho docílíme snadno. Strany AD a BC prodloužíme s obou stran do nekonečna, takže obdržíme nekonečně dlouhý pruh, jehož strany jsou rovnoběžny s osou y. Obě tyto strany rozdělíme na stejné části délky b, a na každé části myslíme si rozestřenou hmotu s hustotou touž jako na stranách AD nebo BC, ale znamení střídavě opačného, takže, je-li hustota hmoty na jedné části kladná, jest na obou sousedních záporná, a naopak. Ze symmetrie jest pak patrno, že potenciál φ_1 vymizí pro $y = mb$, značí-li m jakékoliv číslo celé, podmínkám na stranách AB a CD jest tedy vyhověno.

Poněvadž pak mimo to potenciál φ_1 jest periodickou funkcí y periody $2b$, možno jej rozvinouti ve Fourierovu řadu, takže máme

$$\varphi_1 = X_1 \sin \frac{\pi y}{b} + X_2 \sin \frac{2\pi y}{b} + \ldots + X_n \sin \frac{n\pi y}{b} + \ldots, \tag{12}$$

kdež X_n závisí jen na x. Dosazením do rovnice Laplace-ovy obdržíme rovnici pro X_n tvaru

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X_n = 0,$$

z níž plyne integrací

$$X_n = c_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + d_n e^{-\frac{n\pi}{b}x},$$

a poněvadž potenciál φ_1 jest patrně lichou funkcí x, musí $d_n = - c_n$, tedy

$$X_n = c_n\left(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right). \tag{12'}$$

Konstantu c_n stanovíme z podmínky na stranách AD a BC, při čemž stačí vyhověti jedné z nich, podmínka na druhé straně bude pak splněna současně. Za tím účelem rozvineme $-\frac{P}{b}$

v sinusovou řadu Fourierovu; obdržíme dle známého vzorce

$$-\frac{P}{b}=-\frac{4P}{\pi b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin(2n+1)\pi\frac{y}{b}.$$

Z rovnice (12) a (12′) plyne pak derivací dle x

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\pi}{b}\sum_{n=0}^{\infty} nc_n\left(e^{\frac{n\pi}{b}x}+e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin n\pi\frac{y}{b},$$

dosadíme-li tedy sem $x=\frac{a}{2}$, obdržíme porovnáním

$$c_{2n}=0,\quad c_{2n+1}=-\frac{4P}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{\left(e^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\pi a}{b}}+e^{-\frac{2n+1}{2}\frac{\pi a}{b}}\right)},$$

takže celkem máme

$$\varphi_1=-\frac{4P}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{e^{(2n+1)\frac{\pi x}{b}}-e^{-(2n+1)\frac{\pi x}{b}}}{e^{(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}+e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}}\sin(2n+1)\frac{\pi y}{b}. \tag{13}$$

Místo potenciálního rozdílu P zavedeme raději intensitu primárního proudu J. Protneme-li desku rovinou kolmou k rovině xy a rovnoběžnou se stranou AB, prochází touto plochou proud J, a jest patrně

$$J=-\int v\,d\omega,$$

tak že, dosadíme-li za v hodnotu z rovnic (2) a klademe-li $d\omega=\delta\,.\,dx$, kdež δ zase značí tloušťku desky, jest

$$J=\lambda\delta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx.$$

Při tom jest dle (2′) až na veličiny řádu α^2 patrně $\lambda=\frac{1}{K}$, a dosadíme-li za φ z rovnice (10), obdržíme s toutéž přesností

$$J=\frac{P}{K}\cdot\frac{a\delta}{b},$$

čili

$$P=JK\frac{b}{a\delta}, \tag{13'}$$

což jest týž vztah, jako kdyby Hallova zjevu nebylo; vliv jeho na intensitu primárního proudu jest řádu α^2.

Součin $\alpha\varphi_1$ udává, jak patrno z rovnice (10), zvýšení potenciálu následkem Hallova zjevu; dosadíme-li sem $x = \frac{a}{2}$, jest výraz $2\alpha\varphi_1$ roven t. zv. elektromotorické síle effektu Hallova Ta tedy závisí tu na y; pro $y = 0$ a $y = b$, čili na primárních elektrodách jest rovna nulle, s rostoucí vzdáleností od nich také roste, největší hodnoty dosáhne uprostřed desky, pro $y = \frac{b}{2}$, tu jest

$$E = -\frac{4J}{\pi^2}\frac{qb}{a\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{1-e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}{1+e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}. \tag{14}$$

Provedeme nyní diskussi odvozených vzorců. Předpokládejme napřed, že jest b značně veliké proti a, a to tak, že ještě pro dosti veliká n jest výraz $(2n+1)\frac{\pi a}{2b}$ dosti malý. Pak možno psáti pro $n \leq m$, kdež m značí veliké číslo, jednoduše

$$e^{(2n+1)\frac{\pi x}{b}} - e^{-(2n+1)\frac{\pi x}{b}} = 2\,(2n+1)\frac{\pi x}{b},$$

$$e^{(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} = 2,$$

takže po dosazení do rovnice (13) obdržíme vzhledem ku (13')

$$\varphi_1 = -\frac{4J}{\pi}\cdot\frac{Kx}{a\delta}\left[\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2n+1}\sin\,(2n+1)\frac{\pi y}{b} + R_m\right], \tag{15}$$

kdež zbytek R_m jest pro dosti veliká m libovolně malý. Při tom platí známá relace

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\,(2n+1)\frac{\pi y}{b},$$

a poněvadž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně pro všechna y ležící v intervallu od $-l$ do l, kdež jest $0 < l < b$, možno patrně pro veliká m za hodnotu řady na pravé straně rovnice (15) dosaditi přibližně $\frac{\pi}{4}$, takže konečně máme pro zvýšení potenciálu následkem Hallova zjevu výraz

$$\alpha\varphi_1 = -\frac{qJ}{\delta}\cdot\frac{x}{a}.$$

což jest známá hodnota platící pro nekonečně dlouhý pruh. Pro elektromotorickou sílu Hallova effektu plyne tu hodnota $q\frac{J}{\delta}$, tedy táž jako u bodových elektrod.

Je-li naopak a velmi veliké proti b, pak obdržíme ze vzorce (14) pro elektromotorickou sílu Hallova effektu hodnotu

$$E = \frac{4}{\pi^2}\frac{b}{a}\cdot\frac{qJ}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

nehledíme-li na znamení, aneb, provedeme-li příslušné numerické výpočty,

$$E = 0{\cdot}37\,\frac{b}{a}\cdot\frac{qJ}{\delta},$$

což jest hodnota značně menší než v prvním případě. To jest i přímo pochopitelno, neboť na elektrodách hodnota potenciálu se nemění, v sousedství elektrod stočí se tedy aequipotenciální čáry velmi málo, takže, je-li deska úzká, Hallův zjev nemůže se úplně vytvořiti. To ostatně platí i tehdy, když poměr $a:b$ jest dán číslem ne příliš velikým, poněvadž výraz

$$\frac{1-e^{-\xi}}{1+e^{-\xi}},$$

jenž pro $\xi = 0$ vymizí, s rostoucím ξ konverguje k 1 velmi rychle. Tak na př. pro desku čtvercovou, kde tedy $a = b$, obdržíme

$$\varepsilon = 0{\cdot}338\,\frac{qJ}{\delta},$$

tedy o něco více než třetinu hodnoty odpovídající nekonečně dlouhému pruhu; je-li $a:b = \frac{1}{3}$, máme pořád ještě

$$\varepsilon = 0{\cdot}505\,\frac{qJ}{\delta},$$

něco více než polovici normální hodnoty. Vede tedy tato methoda k příliš nízkým hodnotám rotačního koefficientu přes to, že rozdělení proudokřivek jest tu úplně pravidelné; abychom dostali hodnotu správnou, musili bychom vzíti desku velmi dlouhou.

Bylo již řečeno a dá se dokázati velmi jednoduše ze vzorce (13), že elektromotorická síla Hallova effektu při tomto uspořádání klesá, vzdalujeme-li se od středu desky. Měříme-li tedy *Koláčkovou* methodou, nutno obě elektrody voliti co možná těsně u sebe, jak již *Novák*[8]) nalezl. Kdybychom je přeložili do primárních elektrod, obdržíme patrně poloviční hodnotu, což měřením potvrdil *Raus*[9]).

Ústav pro theoretickou fysiku c. k. české university, 1911.

Odvození Einsteinova addičního theoremu pro skládání rychlostí v případě rychlostí parallelních.

Dr. **Augustin Žáček.**

Libovolné lineární transformace, jež vyjadřují veličiny x', y', z', t' jako lineární funkce proměnných x, y, z, t a nechávají kovariantní kvadratickou formu

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

slují transformace Lorentzovy.

Souhrn všech Lorentzových transformací tvoří gruppu; zůstane-li totiž forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

kovariantní při lineárním přechodu z proměnných x, y, z, t na x', y', z', t', a rovněž při lineárním přechodu z x', y', z', t' na proměnné x'', y'', z'', t'', zůstane kovariantní také při přímém lineárním přechodu z proměnných x, y, z, t na x'', y'', z'', t''.

A z té okolnosti, že Lorentzovy transformace tvoří gruppu, vyplývá přímo známý Einsteinův vzorec pro skládání rychlostí v případě, že tyto jsou stejného směru.

Zjev odehrávající se v čase t v bodě A o souřadnicích x, y, z trojdimensionálného, pravoúhlého systému souřadnicového můžeme si znázorniti v prostoru čtyřdimensionálním „světovým bodem" o souřadnicích x, x, z, t. — Jiný souřadnicový systém (x', y', z', t'), jehož osa x'-ová splývá ne-

---

[8]) *V. Novák*, Časopis pro pěstování mathem. a fysiky, 38, 47. 1908.
[9]) *F. Raus*, loc. cit. pag. 13.