Jan Odstrčil

# Nový způsob, jak se mohou vypočítati realní kořeny rovnic třetího stupně

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 7 (1878), No. 4, 218--235

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122889`

stupně na těchto plochách, *křivky parabolické podobné a podobně položené.*

Následkem toho můžeme vysloviti zcela všeobecnou větu:

*Stereografický průmět křivek 2ho stupně na plochách libovolných 2ho stupně jsou podobné a podobně položené křivky 2ho stupně téhož druhu, jakého jsou body plochy 2ho stupně samy.*

Co zvláštní případ této věty sluší vytknouti, že stereografické projekce křivek 2ho stupně na ploše kuželové z jejího středu, jsou všechny se stotožňující křivky parabolické, zároveň s pronikem průmětny stereografické s plochou kuželovou v jedno spadající.

Jest nám milou povinností podotknouti, že při práci naší jsme se vynasnažili zákony vyvinuté odvozovati ve smyslu „*Ikonognosie*“ pana professora *Fr. Tilšera*, při čemž jsme užili k vyjádření pojmů útvarů geometrických názvů i symbolů obdobných, dokud typografické prostředky nám to dovolovaly.

---

# Nový způsob, jak se mohou vypočítati realní kořeny rovnic třetího stupně.

Sepsal

prof. Dr. J. **Odstrčil** v Těšíně.

1. Než-li přistoupíme k řešení rovnic svrchu vytknutých, zdá se mi býti užitečným poukázati, jak se s prospěchem počty vedlejší při odmocňování třemi uspořádati dají.

Utvoříme-li první číslici odmocniny, odčítáme-li pak třetí mocninu její od odmocněnce a utvoříme-li konečně trojnásobný její čtverec, obdržíme číslici druhou, když zbytek onen tímto trojnásobným čtvercem odnásobíme, nebo v znameních

$$Z_1 : 3a^2 = m_1\ ,$$

kdež $Z_1$ zbytek, $a$ číslici první, $m_1$ číslici druhou neb následující značí.

Chceme-li se o pravdivosti číslice $m_1$ přesvědčiti, třeba jest, abychom sestavili tři součiny

$$3a^2 . m_1\ ,\quad 3am_1^2\ ,\quad m_1^3$$

a jich součet od zbytku $Z_1$ odečetli, čímž obdržíme nový zbytek $Z_2$. Když pak utvoříme trojnásobný čtverec již určeného dílu odmocniny, totiž $3(a+m_1)^2$, což se rovná třem součinům

$$3a^2,\quad 6am_1,\quad 3m_1{}^2,$$

obdržíme nového dělitele, kterým nový zbytek $Z_2$ odnásoben, nám podá následující číslici odmocniny $m_2$.

Z předešlého patrno jest, že součin $3am$ a čtverec $m^2$ dvojnásobně upotřebeny býti mohou. Předně co odčítanci, násobení číslicí $m$, a pak co sčítanci, když první násobíme 2 a druhý 3.

Bude tedy prospěšno utvořiti 3 sloupce

$$3a,\quad 3am,\quad m^2,$$

čísla druhého a třetího sloupce, násobena číslicí $m$, se od zbytku odčítají; čísla druhého sloupce násobena číslicí 2 a třetího číslicí 3 se v děliteli přičítají a tak nový dělitel utvoří. Což se opakuje.

*Příklad.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[3]{12,928}$ | $= 23{\cdot}469$ | | | |
| 8 | | | | |
| 4 9,28 | : 12 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| 3 6 | 3 6 | 6 | 18 | 9 |
| 5 4 | 27 | 69 | 276 | 16 |
| 27 | | 702 | 4212 | 36 |
| 7 61·0,00 | : 15 87 | 7038 | 63342 | 81 |
| 6 34 8 | 552 | | | |
| 11 0 4 | 48 | | | |
| 64 | | | | |
| 1 15 0 960,00 | : 16 4268 | | | |
| 98 5 608 | 8424 | | | |
| 2 527 2 | 108 | | | |
| 2 16 | | | | |
| 16 2 822 640,00 | : 16 511148 | | | |
| 14 8 600 332 | 126684 | | | |
| 57 007 8 | 243 | | | |
| 7 29 | | | | |
| 1 4 165 292 91 | : 16 52381883 | | | |

a t. d.

Prospěch, kterého tímto uspořádáním docílíme, záleží v tom, že vždy jen jednou číslicí násobíme a tedy každý součin hned tam psáti můžeme, kam náleží; pak se žádná operace bez potřeby neopakuje; konečně se celé počítání snadno přehlédne a zkrátí.

Jak z předešlého příkladu vidíme, nemohou čtyry první číslice posledního dělitele změněny býti přičítáním následujících čísel v sloupci druhém a třetím; tyto číslice jsou tedy úplně jisté. Můžeme tedy s úplnou jistotou *tolik* číslic v odmocnině pouhým dělením určiti, kolik jistých číslic dělitel má.

Z této příčiny nepřivěsíme (chtíce ještě více číslic odmocniny určiti) následující třídu, nýbrž přetrhneme nejisté číslice dělitele a tolik číslic méně jedné dělence, zkráceným pak dělením obdržíme ještě 4 jisté číslice odmocniny.

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{12928} & = & 23{\cdot}4698572(6) \\
1416529291 & : & 1652381383 \\
9462 & & \\
1200 & & \\
44 & & \\
11 & &
\end{array}$$

Počítání dá se snadno tak uspořádati, že se nepotřebné přetrhnuté číslice nevyvinují, nýbrž vynechávají.

2. Započneme s rovnicí

$$x^3 + Ax^2 + Bx = C,$$

v níž $A$, $B$, $C$ positivní čísla značí. Rovnice taká, jak se dá snadno ukázati, má vždycky positivní kořen.

A tu snadno se určí první číslice kořene, totiž číslice $a$ jistého dekadického řádu, kteráž položena byvši do rovnice na místo $x$, poskytne na levé straně výsledek menší než $C$, kdežto by číslice toho samého řádu avšak o 1 větší vedla k výsledku většímu než $C$.

Tedy známe $a$, kterýmž se stává

$$C - (a^3 + Aa^2 + Ba) = Z_1 \text{ (positivní).}$$

Stalo-li by se při tom, že by $Z_1$ se rovnalo 0, byla by číslice $a$ úplným kořenem rovnice; jinak ukazuje zbytek ten, že číslice ta jakéhosi doplňku zapotřebí má. Budiž doplněk ten $m$.

Budeme tedy míti

$$(a + m)^3 + A(a + m)^2 + B(a + m) = C.$$

Vyvineme-li a spořádáme-li, obdržíme:

$$a^3 + Aa^2 + Ba + [3a^2 + 2Aa + B + (3a + A)m + m^2]m = C,$$

aneb máme-li zřetel k dřívějšímu výsledku,

$$Z_1 : [3a^2 + 2Aa + B + (3a + A)m + m^2] = m,$$

z čehož patrno jest, že lze obdržeti doplněk dělením.

Dělenec jest úplně znám, dělitel ale jen částečně. Část známá dělitele jest (co číslo dekadické) vyššího řádu než část neznámá. Již při obecném odnásobení hledíme určiti číslice podílu (má-li jich dělitel více) odnásobením první neb dvěma prvními číslicemi dělitele, nikoli však celým dělitelem. Tak též zde. Určíme tedy první číslici doplňku odnásobením zbytku známou částí dělitele, a přesvědčíme se o její pravdivosti, tvoříce tři násoby a sice:

1. části známé dělitele a číslice této $m_1$

aneb $(3a^2 + 2aA + B)m_1$

2. $(3a + A)m_1{}^2$,

3. $m_1{}^3$.

Předpokládajíce, že jsme vzali za číslici první $m_1$ číslici co možná největší, nalezneme, že jest příliš velkou, nedá-li se součet těchto tří násob od zbytku $Z_1$ odčítati, tak že bude zapotřebí ji o jednu zmenšiti. Byl-li by nový zbytek roveň 0, jsou $a + m_1$ úplný kořen rovnice. Zbyde-li ale nový (positivní) zbytek $Z_2$, má kořen zapotřebí nového doplňku.

Dělitele pro druhou číslici doplňku nebo známou část jeho nalezneme, položíce $a + m_1$ na místo předešlého dělitele

$$3a^2 + 2Aa + B;$$

obdržíme tedy

$$3(a + m_1)^2 + 2(a + m_1)A + B$$
$$= 3a^2 + 2Aa + B + 2(3a + A)m_1 + 3m_1{}^2,$$

z čehož patrno, že se druhý dělitel utvoří, připočteme-li ku předešlému

$$2(3a + A)m_1 + 3m_1{}^2.$$

Zařídíme tedy troje sloupce

$$3a + A; \quad (3a + A)m \quad \text{a} \quad m^2.$$

Čísla druhého a třetího sloupce, násobena číslicí $m_1$, dají násoby, které se od dělence musí odčítati, a násobena (v sloupci druhém) číslicí 2 a (v sloupci třetím) číslicí 3 ony násoby, které se k děliteli přičítati mají.

Každá následující číslice kořene obdrží se touže operací.

### *Příklady.*

V rovnici

$$x^3 + x^2 + 5x = 120$$

jest první číslice kořene 4.

Tedy zařídí se výpočet takto:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 120 | : $(x^2 + x + 5) = x = 4{\cdot}30727182$ | | | |
| 100 | | | | |
| 20·0,00*) | : 61 $(= 3a^2 + 2aA + B)$ | | | |
| 18 3 | 7 8 | | | |
| 1 1 7 | 2 7 | | | |
| 27 | | $(3a + A)$, | $(3a + A)m$, | $m^2$ |
| 5 030,000,00 | : 69 0 7 00 | 13 | 3·9 | 0·09 |
| 4 834 900 | 1 9 460 | 13·9 | 00 | 00 |
| 6 811 0 | 147 | 13·90 | 9730 | 49 |
| 3 43 | | 13·921 | 27842 | 4 |
| 188 285 570,00 | : 69 2 6 4747 | | | |
| 138 529 494 | 55684 | | | |
| 5 568 4 | 12 | | | |
| 8 | | | | |
| 49 750 507 52 | : 69,2,7,031552**) | | | |
| 1 261 3 | | | | |
| 568 6 | | | | |
| 14 4 | | | | |
| 6 | | | | |

2. $$x^3 + 2x^2 + 3x = 13089030.$$

První číslice kořene jest 200.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13089030 | : $x^2 + 2x + 3 = x = 235$ | | | |
| 8000000 | $120000 = 3a^2$ | | | |
| 80000 | $800 = 2aA$ | | | |
| 600 | $3 = B$ | | | |
| 5008430 : | 120803 | $(3a + A)$ | , $(3a + A)m$ , | $m^2$ |
| 362409 | 36120 | | | |
| 54180 | | 602 | $1806_0$ | $9_{00}$ |
| 2700 | 2700 | 692 | 3460 | 25 |
| 815540 : | 159623 | | | |
| 798115 | | | | |
| 17300 | | | | |
| 125 | | | | |
| 0 | | | | |

*) Poněvadž dělitel nemůže býti obsažen ve zbytku, proměnili jsme tento v jednotky nižšího řádu přívěšením 0, a aby se pohodlněji násoby odčítati mohly, přívěsili jsme ještě dvě nicky.

**) Snadno poznáme, že následující opravy dělitele neb čísla druhého a

3. $x^3 + 1234x^2 + 234x = 123.$

Počáteční číslice jest 0·2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 123· | : $x^2 + 1234x + 234 = x = 0·23481$ | | | | |
| 0·008 | 0·12 | $= 3a^2$ | | | |
| 49·36 | 49 3·6 | $= 2aA$ | | | |
| 46·8 | 23 4· | | | | |
| 26·8320,00 | : 72 7·72 | | $(A + 3a)$, | $(A + 3a)m$, | $m^2$ |
| 21·8316 | 7 4·076 | | | | |
| 1·1111 4 | 27 | | 1234·6 | 37·038 | 0·0009 |
| 27 | | | 1234·69 | 4·93876 | 16 |
| 3·8892 330,00 | : 80 1·7987 | | | | |
| 3·2071 948 | 9·87752 | | | | |
| 197 550 4 | 48 | | | | |
| 64 | | | | | |
| 6622 830 96 | : 81,1·676268 | | | | |
| 129 | | | | | |
| 48 | | | | | |

Ostatní dvě číslice obdrželi jsme zkráceným dělením. Ostatně možná výpočet tak zaříditi, že se přetrhnuté číslice dělitele a dělence ani nevyvinují.

*Poznamenání.* Kdyby se stalo, že by se při dělení postavila menší číslice do kořene než by býti měla, pozná se to na zbytku.

Zbytek totiž vždy menší býti musí než následující dělitel, rozmnožen o číslo v prvním sloupci postavené a o jedno, neb naznačíme-li již nalezenou část kořene písmenou $a$,

$$Z < 3a^2 + 2aA + B + (3a + A) + 1 .$$

Byl-li by

$$Z \gtreqless 3a^2 + 2aA + B + (3a + A) + 1 ,$$

byla by nalezená část aspoň o 1 (příliš) malá.

Budiž $P$ část čísla $C$ až doposud v účet vzatá, $a$ část kořene k tomu náležící; tu platí vždy relace

$$P = a^3 + Aa^2 + Ba + Z .$$

Bylo-li by však

$$Z \gtreqless 3a^2 + 2aA + B + 3a + A + 1$$

a kdybychom nahradili v relací $Z$ rovnou nebo menší veličinou na pravé straně stojící, bylo by

třetího sloupce nemohou více dosáhnouti 5 prvních číslic dělitele, 4 první číslice dělitele jsou úplně jisté a můžeme tedy jistě 4 číslice pouhým dělením obdržeti. Z té příčiny přetrhneme 5 nejistých posledních číslic dělitele a 4 poslední zbytku, aniž bychom nicky více ke zbytku připojovali.

$$P \gtreqless a^3 + Aa^2 + Ba + 3a^2 + 2aA + B + 3a + A + 1,$$

nebo spořádáme-li jinak,

$$P \gtreqless (a+1)^3 + (a+1)^2 A + (a+1) B.$$

Jmenujeme-li ale pravou ku $P$ náležící část kořene $x_1$, jest

$$P = x_1^3 + x_1^2 A + x_1 B,$$

z čehož patrno jest, že buď

$$x_1 = a + 1 \quad \text{nebo} \quad x_1 > a + 1,$$

v obou případech jest tedy $a$ menší než by býti mělo.

3. Jsou-li součinitelé rovnice

$$x^3 + Ax^2 + Bx = C$$

vesměs neb částečně čísla negativní, jest prospěšno rovnici takou na tvar

$$x^3 + B_1 x = C$$

uvésti, což se stane, položíme-li $x_1 - {}^1/_3 A$ na místo $x$.

Kořeny rovnice původní rovnají se pak kořenům rovnice přetvořené, zmenšeným o ${}^1/_3 A$.

Tím se dá též snadněji odpovídati na otázku, má-li rovnice ještě více kořenů realních.

Podlé znamení součinitelů $B$, $C$ můžeme pak čtyry případy rozeznávati a sice:

$$\begin{aligned} \text{I. } & x^3 + Bx = C, \\ \text{II. } & x^3 + Bx = -C, \\ \text{III. } & x^3 - Bx = C, \\ \text{IV. } & x^3 - Bx = -C. \end{aligned}$$

Rovnice tvaru I. a III. mají vždy kořen positivní; neb položíme-li 0 místo $x$, obdržíme 0, což menší jest než $C$, a položíme-li velké číslo místo $x$, obdržíme na levé straně nějaké velké číslo, které jest větší než $C$. Musí tedy mezi 0 a $\infty$ nějaké číslo positivní býti, které levou stranu rovnice rovnou učiní pravé straně, totiž $C$.

Taktéž se přesvědčiti můžeme, že rovnice tvaru II. a IV. kořen negativní mají.

Ten kořen, který v znamení s $C$ souhlasí, mohl by se nazvati *kořenem hlavním*, poněvadž se vždy vyskytuje.

Rovnice tvaru prvního

$$x^3 + Bx = C$$

nemá žádného kořene positivního mimo hlavní, který naznačíme písmenou $p$. Neboť kdyby se takový nalezal ku př. $q$, musil by buď větší neb menší býti než $p$, tedy by musilo

$$\begin{array}{c} q^3 \gtreqless p^3 \\ Bq \gtreqless Bp \\ \hline \end{array}$$

a

$$q^3 + Bq \gtreqless p^3 + Bp \quad \text{aneb}$$

$$q^3 + Bq \gtreqless C.$$

Nemůže tu tedy mimo $p$ jiný positivní kořen býti.

Rovnice tato nemůže ale také negativní kořeny míti, nebo napíšeme-li ji tvarem

$$x(x^2 + B) = C,$$

poznáme, že $x$ nemůže negativní býti, protože druhý součinitel vždycky positivní jest.

Rovnice (I.) má tedy jediný kořen positivní.

Vypočítání kořene toho dá se snadno provésti podlé předešlého pravidla, neb se líší tento případ jen tím, že $A = 0$.

*Příklad.*

Má se řešiti rovnice

$$x^3 + 8477244x = 12340000000.$$

První číslice jest 1 a znamená tisíce.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12340000,000 | : | $(8477244 + x^2) = 1234$ | | | |
| 9477244 | | 1 | | | |
| 2862756 0 | : | 11477244 | | | |
| 2295448 8 | | 1200000 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| 120000 0 | | 120000 | 3000 | 600000 | 40000 |
| 8000 0 | | | 3600 | 108000 | 900 |
| 439307 20 | : | 12797244 | 3690 | 14760 | 16 |
| 383917 32 | | 216000 | | | |
| 3240 00 | | 2700 | | | |
| 27 00 | | | | | |
| 52122 880 | : | 13015944 | | | |
| 52063 776 | | | | | |
| 59 040 | | | | | |
| 64 | | | | | |
| 0 | | | | | |

Kořen 1234 jest úplný; více kořenů realních tato rovnice nemá.

Podobným spůsobem dá se ukázati, že rovnice tvaru

$$x^3 + Bx = -C$$

má jediný kořen (hlavní) negativní.

*Příklad.*

Má se řešiti rovnice

$$x^3 + 477244x = -2358000000\,.$$

Počáteční číslice kořene jest 1 a znamená tisíce.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| — 2358000,000 | : | $(477244 + x^2) = -1211{\cdot}840$ | | | |
| 1477244 | | 1 | | | |
| — 880756 0 | : | + 34 7 7244 | | | |
| ∓ 695448 8 | | + 12 0 0000 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| ∓ 120000 0 | | + 1 2 0000 | — 3000 | + 600000 | + 40000 |
| ∓ 8000 0 | | | 3600 | 36000 | 100 |
| — 57307 20 | : | + 47 9 7244 | 3630 | 3630 | 1 |
| 47972 44 | | 7 2000 | | | |
| 360 00 | | 300 | | | |
| 1 00 | | | | | |
| — 8973 760 | : | + 48 6 9544 | | | |
| 4869 544 | | 7260 | | | |
| 3 630 | | 3 | | | |
| 1 | | | | | |
| — 4100 585 | : | + 48,7,6807 | | | |
| 199 1 | | | | | |
| 4 1 | | | | | |

4. Rovnice tvaru

$$x^3 - Bx = C$$

má (hlavní) kořen positivní. Napíšeme-li ji ve formě

$$x(x^2 - B) = C,$$

hned poznáme, že kořen tento větší býti musí než $\sqrt{B}$.

Abychom poznali, má-li rovnice tato ještě jiných kořenů realních, jest jen třeba podotknouti, že by se tito od hlavního kořene $p$ lišili nějakou realní hodnotou $u$; musilo by tedy nejen

$$p^3 - Bp = C$$

nýbrž také býti

$$(p-u)^3 - B(p-u) = C\,.$$

Vyvinouce pak a spořádajíce, obdržíme

$$p^3 - Bp - u^3 + 3pu^2 - 3p^2u + Bu = C;$$

vypustíme-li pak na jedné straně $p^3 - Bp$ a $C$ na druhé a odnásobíme-li číslem $-u$, máme

$$u^2 - 3pu = B - 3p^2,$$

z čehož jde

$$u = \frac{+3p \pm \sqrt{4B - 3p^2}}{2};$$

$u$ má tedy dvě hodnoty realní, platí-li

$$3p^2 < 4B \quad \text{aneb} \quad p < 2\sqrt{\frac{B}{3}}.$$

Tato poslední podmínka dá se nahraditi podmínkou

$$\left(\frac{B}{2}\right)^3 > \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$ [1]

V tomto případě má tedy rovnice $x^3 - Bx = C$ ještě dva kořeny realní:

$$q = p - u_1 = \frac{-p + \sqrt{4B - 3p^2}}{2},$$

$$r = p - u_2 = \frac{-p - \sqrt{4B - 3p^2}}{2}.$$

A tu se snadno dokáže, že tyto kořeny jsou negativní, že jejich absolutní součet se rovná $p$ a že jeden jest menší, druhý větší než $\sqrt{\frac{B}{3}}$.[2]

---

[1]) Nahradíme-li $p$ v rovnici totožné

$$p(p^2 - B) = C$$

číslem větším a sice $2\sqrt{\frac{B}{3}}$, zůstane levá strana větší, tedy

$$2\sqrt{\frac{B}{3}}\left[4 \cdot \frac{B}{3} - B\right] > C$$

aneb

$$\left(\frac{B}{3}\right)^3 > \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

---

[2])

$$2\sqrt{\frac{B}{3}} > p > \sqrt{B},$$

$$4B > 3p^2 > 3B,$$

tedy

$$4B - 3p^2 < 4B - 3B,$$

$$\sqrt{4B - 3p^2} < \sqrt{B} < p,$$

následovně

$$\sqrt{4B - 3p^2} < p$$

pročež

$$q = \frac{-p + \sqrt{4B - 3p^2}}{2} \text{ negativní.}$$

$$r = \frac{-p - \sqrt{4B - 3p^2}}{2} \text{ taktéž negativní.}$$

Jich součet $\quad q + r = -p.$

Dále se též nalezne $\quad q^2 + r^2 + qr = B$

a poněvadž $r$ absolutně větší jest než $q$, můžeme požloiti $q + \varepsilon$ na místo $r$ a obdržíme

$$3q^2 + 3q\varepsilon + \varepsilon^2 = B$$

aneb

$$q^2 + q\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3} = \frac{B}{3}.$$

Stejným spůsobem dá se ukázati, že rovnice

$$x^3 - Bx = -C$$

mimo kořen hlavní $p$, který jest negativní, ještě dva positivní kořeny má, jichžto součet se rovná $p$, a sice jeden menší, druhý větší než $\frac{B}{3}$, jest-li $\left(\frac{B}{3}\right)^3 > \left(\frac{C}{2}\right)^2$.

5. Vypočítání hlavních kořenů rovnic dvou posledních tvarů dá se stejným spůsobem provésti, jako při dřívějších rovnicích. Kořeny dva pobočné obdržíme buď z formul svrchu uvedených, byl-li již hlavní kořen vypočítán, aneb stejným počítáním, kdež ale při vypočítání menšího bedlivě šetřiti musíme znamení.

*Příklady.*

Má se řešiti rovnice

$$x^3 - 1142103x = 469725802\,.$$

Kořen hlavní větší musí býti než $\sqrt{1142103} = 1\ldots$*)

Poněvadž $\sqrt{\frac{B}{3}} = \sqrt{\frac{1142103}{3}} = 617{\cdot}09$, a tedy $p = 1234$

Počáteční číslice jest 1000; tedy

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $+3000000$ | | | |
| 469725 802 | : | $(x^2 - 1142103) = x = 1234$, | | | |
| $\mp$ 142103 | | $+1000000$ | | | |
| $+$ 611828 8 | : | $+$ 1857897 | | | |
| 371579 4 | | 1200000 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| 120000 0 | | 120000 | 3000 | 600000 | 40000 |
| 8000 0 | | | 3600 | 108000 | 900 |
| 112249 40 | : | 3177897 | 3690 | 14760 | 16 |
| 95336 91 | | 216000 | | | |
| 3240 00 | | 2700 | | | |
| 27 00 | | | | | |
| 13645 492 | : | 3396597 | | | |
| 13586 388 | | | | | |
| 59 040 | | | | | |
| 64 | | | | | |
| 0 | | | | | |

Avšak $$q < \sqrt{q^2 + q\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3}} < q + \varepsilon,$$

z čehož vysvítá, že $$q < \sqrt{\frac{B}{3}} < r\,.$$

*) Viz dole poznamenání o mezích kořenů.

menší jest než $2\sqrt{\frac{B}{3}} = 1234{\cdot}18$, má rovnice tato ještě dva negativní kořeny. Počáteční hodnota většího z nich tak zvolena býti musí, aby již o sobě byla větší než $\sqrt{\frac{B}{3}}$, tedy zde větší než 617, a mimo to aby prvý zbytek byl co možná malý negativní.*) Těmto požadavkům vyhovuje 620, což tedy za počáteční hodnotu kořene zvolíme.

Budeme tedy míti:

$$
\begin{array}{rcrccc}
+469725802 & : & (-1142103 + x^2) = -623 & & & \\
\pm 4546218 & & +384400 = a^2 & & & \\
\pm 15154060 & & +757703 & & & \\
 & & +1153200 = 3a^2 & 3a & 3am & m^2 \\
 & & -1142103 = B & -1860 & +5580 & 9 \\
\hline
-50058 & : & +11097 & & & \\
\mp 33291 & & & & & \\
\mp 16740 & & & & & \\
\mp 27 & & & & & \\
\hline
0 & & & & &
\end{array}
$$

Třetí kořen jest menší než $\sqrt{\frac{B}{3}} = 617{\cdot}09$.

Za počáteční číslici zvolíme 600; každý dělenec jest positivní, dělitel negativní, tedy číslice doplňku negativní.

$$
\begin{array}{rcrccc}
4697258,02 & : & (-1142103 + x^2) = x = -611 & & & \\
\pm 4692618 & & +360000 & & & \\
 & & -782103 & & & \\
 & & -1142103 = B & & & \\
 & & +1080000 = 3a^2 & & & \\
\hline
+4640\ 0 & : & -62103 & & & \\
\pm 6210\ 3 & & +36000 & & & \\
\mp 1800\ 0 & & +300 & 3a & 3am & m^3 \\
\mp 10\ 0 & & & -1800 & +18000 & +100 \\
\hline
+239\ 72 & : & -25803 & -1830 & +1830 & 1 \\
\pm 258\ 03 & & & & & \\
\mp 18\ 30 & & & & & \\
\mp 1 & & & & & \\
\hline
0 & & & & &
\end{array}
$$

*) Pak bude každá nová číslice kořene negativní, poněvadž dělitel positivním a dělenec negativním zůstane.

2. $x^3 - 578x = -3500.$

Hlavní kořen jest negativní a absolutně větší než

$$\sqrt{578} = 24\,.\,.$$

Prvá číslice jest 2 desítky.

Výpočet děje se tu takto:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-3500$ | $:(x^2-578) = x = -26{\cdot}6347048$ | | | |
| $\pm 3560$ | | | | |
| $-7060$ | $:+622$ | | | |
| $\mp 3732$ | 720 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| $\mp 2160$ | 108 | $-60$ | $+360$ | $+36\cdot$ |
| $\mp 216$ | | 78 | 468 | 0·36 |
| $-9520,00$ | : 1450 | 798 | 2394 | 09 |
| 8700 | 936 | 7989 | 31956 | 16 |
| 2808 | 108 | | | |
| 216 | | | | |
| 537040,0 00 | : 154468 | | | |
| 463404 | 4788 | | | |
| 7182 | 27 | | | |
| 27 | | | | |
| 72917530,00 | : 15494707 | | | |
| 61978828 | 63912 | | | |
| 127824 | 48 | | | |
| 64 | | | | |
| 1092591896 | : 1550109868 | | | |
| 752 | | | | |
| 132 | | | | |
| 8 | | | | |

Poněvadž $\left(\frac{B}{3}\right)^3 > \frac{C}{4}$, aneb $2\sqrt{\frac{B}{3}} > p$

$$\left[\sqrt{\frac{B}{3}} = \sqrt{192{\cdot}6\,.} = 13{\cdot}8\,.\,;\quad 2\sqrt{\frac{B}{3}} = 27{\cdot}6\,.\,.\right],$$

má rovnice tato ještě dva kořeny positivní, jeden větší než $\sqrt{\frac{B}{3}} = 13{\cdot}8$, druhý menší než 13·8.

Počáteční hodnota 2o vyvodí nejmenší positivní zbytek.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3500$ | : $(x^2-578)=x=+20{\cdot}0955804$ | | | | |
| $\mp 3560$ | | | | | |
| $+60{\cdot}0000000$ | : $+62\,2\,00$ | $3a$ | $3am$ | $m^2$ | |
| $55{\cdot}9\,800$ | $1\,0\,800$ | $+60{\cdot}0$ | $+5{\cdot}400$ | $0{\cdot}0081$ | |
| $4\,860\,0$ | $243$ | $60{\cdot}27$ | $30135$ | | $25$ |
| $7\,29$ | | | | | |
| $3{\cdot}5\,332\,710\,00$ | : $63\,2\,8243$ | | | | |
| $3{\cdot}1\,641\,215$ | $60270$ | | | | |
| $15\,067\,5$ | $75$ | | | | |
| $1\,25$ | | | | | |
| $3\,676\,42625$ | : $63\,3\,427075$ | | | | |
| $509\,3$ | | | | | |
| $2\,6$ | | | | | |

Druhý positivní kořen menší než $\sqrt{\frac{B}{3}}$ má počáteční číslici 6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-3500$ | : $(-578+x^2)=x=+6{\cdot}5391244$ | | | |
| $\mp 3252$ | | | | |
| $-2480\,00$ | : $-47\,0$ | | | |
| $\mp 2350$ | $+1\,8\,0$ | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| $\pm 45\,0$ | $+75$ | $+18$ | $+9\,0$ | $+0{\cdot}25$ |
| $\pm 1\,25$ | | $195$ | $585$ | $09$ |
| $-176\,250\,00$ | : $-45\,1\,25$ | $1959$ | $17631$ | $81$ |
| $\mp 135\,375$ | $+1\,170$ | | | |
| $\pm 175\,5$ | $+27$ | | | |
| $\pm 27$ | | | | |
| $-41\,050\,770\,00$ | : $-45\,0\,0773$ | | | |
| $\mp 40\,506\,957$ | $+35262$ | | | |
| $\pm 15\,867\,9$ | $+243$ | | | |
| $\pm 7\,29$ | | | | |
| $-559\,688\,19$ | : $-44\,9\,724437$ | | | |
| $-109\,9$ | | | | |
| $-20\,0$ | | | | |
| $2\,0$ | | | | |

Součet dvou posledních kořenů jest, jak býti má

$$\begin{array}{r} 20{\cdot}0955804 \\ 6{\cdot}5391244 \\ \hline 26{\cdot}6347048 = -p\,, \end{array}$$

rovná se tedy kořenu hlavnímu s převráceným znamením.

Tu se též přihoditi může, že položíme-li za první číslici většího kořene pobočního, trojnásobnou mocninu $\sqrt{\frac{B}{3}}$, tato se $B$ rovná, čímž se stává, že první dělitel jest 0. Tento případ ukazuje (což již bez toho víme), že další doplněk buď positivní neb negativní býti může. V tomto případě musíme ještě další číslici zkoušením hledati. Což není nesnadno, poněvadž

$$r < p < 2\sqrt{\frac{B}{3}}, \text{ tedy } r < 2\sqrt{\frac{B}{3}}.$$

*Příklad.*

Má se řešiti rovnice

$$x^3 - 3x = -1.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $: -3 + x^2 = +1{\cdot}5321$ | | | |
| $\mp 2$ | | | | |
| $+10\,00$ | : 0 | | | |
| 00 | 30 | | | |
| ,75 | 75 | $3a$ | $3am$ | $m^2$ |
| 12 5 | | 3 | 1·5 | 0·25 |
| 12 50 00 | : 375 | 4·5 | 135 | 9 |
| 11 25 | 270 | | | |
| 40 5 | 27 | | | |
| 27 | | | | |
| 84 23 | : 40227 | | | |

*Dodatek.*

Aby se snadněji určiti daly počáteční číslice kořenů, připojíme ještě meze jich neb čísla, jimiž kořeny obmezeny jsou.

1. Kořen $p$ rovnice

$$x^3 + Bx = C$$

jest obmezen

1. jest-li $\sqrt[3]{C} > \sqrt{\frac{B}{3}}$ nebo $B < 3\sqrt[3]{C^2}$,

$$\sqrt[3]{C} - \frac{B}{3\sqrt[3]{C}} < p < \sqrt[3]{C}\,{}^{*)} \text{ jest;}$$

---

*) Položíme-li v rovnici $\sqrt[3]{C} - \frac{B}{3\sqrt[3]{C}}$ na místo $x$, obdržíme

$$x^3 = C - \sqrt[3]{C}\,.\,B + \frac{B^2}{3\sqrt[3]{C}} - \frac{B^3}{27C}$$

$$Bx = \sqrt[3]{C}\,.\,B - \frac{B^2}{3\sqrt[3]{C}};$$

2. jest-li $\sqrt[3]{\frac{C}{2}} < \sqrt{B}$,

jest $\frac{C}{B} - \left(\frac{C}{B}\right)^3 \cdot \frac{1}{B} < p < \frac{C}{B}$.*)

Dalo by se tedy také říci: Rozdělí se $C$ na třídy o třech číslicích, $B$ na třídy o dvou číslicích; je-li množství tříd z $C$ povstalých mnohem větší než možství tříd z $B$, dá se jedna neb více číslic kořene nalézti odmocněním $C$ třemi, v opáčném případě pak pouhým odnásobením $C$ číslem $B$.

Z toho též vysvítá, že v prvním případě

$$\sqrt[3]{C} - p < \frac{B}{3\sqrt[3]{C}}$$

v druhém pak případě

$$\frac{C}{B} - p < \left(\frac{C}{B}\right)^3 \cdot \frac{1}{B}.$$

*Příklady.*

Má se řešiti rovnice

$$x^3 + 3x = 1234567.$$

Kořen této rovnice dá se až na stotiny pouhým vypočítáním třetí odmocniny z 1234567 (tedy na 5 platících číslic) určiti.

---

z toho jde, že $x^3 + Bx = C - \frac{B^3}{27C}$, což vždy jest menší než $C$, a z toho vysvitá, že $x$ neb kořen větší jest.

*) Položíme-li $\frac{C}{B} - \frac{C^3}{B^3} \cdot \frac{1}{B}$ na místo $x$, bude

$$x^3 = \left(\frac{C}{B}\right)^3 - 3\frac{C^2}{B^2} \cdot \frac{C^3}{B^3} \cdot \frac{1}{B} + 3\frac{C}{B} \cdot \left(\frac{C^3}{B^3}\right) \cdot \frac{1}{B^2} - \frac{C^9}{B^{12}},$$

$$Bx - \frac{C^3}{B^3} + C,$$

tedy $$x^3 + Bx = C - \frac{3C^5}{B^6}\left[1 + \frac{C^4}{3B^6} - \frac{C^2}{B^3}\right],$$

což pod hořejší podmínkou vždy menší jest než $C$, neboť v závorkách obsažený člen jest vždy positivní.

Abychom se o tom přesvědčili, rozvažme, že

$$B^6 - 2B^3C^2 + C^4 = (B^3 - C^2)^2$$

jest vždy *positivní*, a že jest-li $2B^3 > C^2$, také $2B^6 - B^3C^2$ jest positivní, tedy i součet $3B^6 - 3B^3C^2 + C^4$ positivní, a dělíme-li $3B^6$, jest konečně i $1 + \frac{C^4}{3B^6} - \frac{C^2}{B^3}$ positivní.

Kořen rovnice

$$x^3 + 7921x = 80$$

dá se pouhým odnásobením 80: 7921 v devíti decimalkách anebo v 8 platících číslicích vyvinouti.

2. Kořen rovnice

$$x^3 + Bx = C$$

nalezá se ve stejných mezích jako při rovnici (1), jen jest negativní.

3. Kořen hlavní rovnice

$$x^3 - Bx = C$$

leží v mezích

$$\sqrt{B} < x < \sqrt{B} + \frac{C}{2B} \text{ *)}$$

Hlavní kořen rovnice

$$x^3 - Bx = -C,$$

nalezá se ve stejných mezích, jen jest negativní.

Číslo $\sqrt{\frac{B}{3}}$, které dělí positivní kořeny poslední rovnice, může nahraženo býti číslem $\frac{3C}{2B}$, **) tak že se může psáti

buď $$q < \sqrt{\frac{B}{3}} < r$$

---

*) Položíme-li $x = \sqrt{B} + \frac{C}{2B}$, obdržíme

$$x^3 = \sqrt{B^3} + 3\frac{C}{2} + 3B.\frac{C^2}{4B^2} + \frac{C^3}{8B^3},$$

$$-Bx = -\sqrt{B^3} - \frac{C}{2}$$

a tedy $$x^3 - Bx = C + \sqrt{B}\,.\,\frac{C^2}{4B^2} + \frac{C^3}{8B^3},$$

což vždy větší jest než $C$.

**) $$-C : (-B + q^2) = q$$

aneb $$C : (B - q^2) = q,$$

nahradíme-li $q^2$ číslem větším $\frac{B}{3}$, stane se dělitel $B - \frac{B}{3} = \frac{2B}{3}$ menším, podíl ale větším,

tedy $$q < \frac{3C}{2B}.$$

Tak též $$r > \frac{3C}{2B}.$$

aneb $$q < \frac{3C}{2B} < r,$$

při čemž podotknouti třeba, že $\sqrt{\frac{B}{3}}$ a $\frac{3C}{2B}$ vůbec rozdílná čísla jsou.

Stejným způsobem dělí $-\frac{3C}{2B}$ negativní kořeny rovnice

$$x^3 - Bx = + C.$$

---

# Příspěvek ku grafickému mocnění.

Podává

místoředitel **Frant. Šanda.**

1. Úkolem grafického mocnění jest ze známé délky $l$ nějaké přímky *obrazně* určiti hodnotu $l^n$, při čemž $n$ může býti číslo kladné, záporné, celé nebo i lomené. V užším smyslu brává se při mocnění za mocnitele $n$ *číslo celé* a tento případ, z něhož se ty ostatní dají potom snadno vyvoditi, jest také následujícímu pojednání položen za základ.

Jest tedy nejprvé naší úlohou, ze známé délky $l$ určiti přímky, jichžto délky mají hodnoty dle řady:

$$\ldots\ l^{-2},\ l^{-1},\ l^0,\ l^1,\ l^2,\ l^3,\ \ldots$$

kdežto potom určení délek hodnoty $\ldots l^{-1/2},\ l^{-1/1},\ l^{1/0},\ l^{1/1},\ l^{1/2},\ l^{1/3}\ldots$ značiti bude grafické odmocnění $(\sqrt[-2]{l},\ \sqrt[-1]{l},\ \sqrt[0]{l},\ \sqrt[1]{l},\ \sqrt[2]{l},\ \sqrt[3]{l},\ldots)$.

Řešení první úlohy zakládá se na následujícím*) Na libovolné přímce $Ax$ (obr. 2.) budiž úsek $AB$ jedničkou t. j. mírou, jížto se přímka $l$ i její mocniny mají měřiti. Vztyčíme-li $BI \perp Ax$ a sestrojíme z $A$ danou délkou $l = A1 = A\alpha$ oblouk $1\alpha$, který kolmici $BI$ v bodu 1 prosekne, potřebujeme jen ve spodním průsečníku $\alpha$ vztýčiti na $Ax$ kolmici, která prodlouženou $A1$ řízne v bodu 2. Délka $A2$ udává potom hodnotu $l^2$, neboť jest v trojúhelníku $A\alpha 2$

*) Viz Měřictví pro vyšší třídy středních škol od Fr. Šandy, druhé vydání str. 98.