Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 4, 252--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122887

Poznámka: Rovnice

$$V_{14} + \lambda V_{24} + \mu V_{34} = 0 \qquad (5)$$

značí při libovolném λ, i μ souhrn všech rovin probíhajících průsekem rovin V_{14}, V_{24}, V_{34}. Jelikož za určité hodnoty λ i μ rovnice rovin V_{12}, V_{13}, V_{23} obdržíme, patří tyto roviny zpomenuté síti rovin (5), t. j. probíhají průsekem rovin V_{14}, V_{24}, V_{34}.

Úloha. Označíme-li písmenem t poloměr koule ve čtyrstěn vepsané a $x'y'z'$ souřadnice jejího středu (společný průsek rovin V_{hk}), máme

$$a_k x' + b_k y' + c_k z' - p_k = -\lambda_k t,$$

z čehož jde

$$a_k x' + b_k y' + c_k z' + \lambda_k t = p_k,$$

kde je $k = 1, 2, 3, 4$, a $\lambda_k = \pm 1$. Jednoduchá úvaha ihned podá, že jsou λ buď *všechna* positivní, aneb tři positivní a jedno negativní, čímž obdržíme pět řešení, což i geometricky jasno. Jmenovatel společný je

$$(a_1 b_2 c_3 \lambda_4) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k L_k.$$

Označíme-li rohu A_k protilehlou stěnu R_k, bude kosinus hrany $A_1 A_2$

$$\cos(A_1 A_2) = \cos(R_3 R_4),$$

kde symetrie označení je jasná; podlé toho můžeme psáti na př.

$$L_4{}^2 = \begin{vmatrix} 1, & \cos(A_3 A_4), & \cos(A_2 A_4) \\ \cos(A_3 A_4), & 1, & \cos(A_1 A_4) \\ \cos(A_2 A_4), & \cos(A_1 A_4), & 1 \end{vmatrix}.$$

V jaké souvislosti je L_4 se sinusem rožným $Op_1 p_2 p_3$?

Vidíme že i zde koefficientu směru λ_k výhodně upotřebiti můžeme, jakož již ve Zprávě I. jedn. č. math. jsem ukázal.

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 1.

Zaslal *Jos. Zvěřina*, žák VII. tř. r. g. v Chrudimi.

Abychom porovnali hodnotu doživotního důchodu 800 zl. s cenou domu, vypočítejme podlé vzorce

$$V_m = v\,\frac{S_{m+1}}{s_m}{}^{*)} = 800\,\frac{67\cdot8}{9\cdot32} = 5819\cdot74\,,$$

z čehož patrno, že majitel domu utrpěl podlé theorie škodu; uvážíme-li však, že v pojištovně by na tento důchod musil nejméně 7000 zl. složiti, poznáme, že v prakci má výhodu.

(Řešení této úlohy zaslal též *Matěj Vaněček* z Tábora, a *Petrov,* žák VII. tř. r. g. obec. na Malé straně v Praze).

Řešení úlohy 2.

Zaslal *Matěj Vaněček,* žák VI. tř. r. v Táboře.

Značí-li x poloměr koule s a S měrnou váhu obou hmot se stýkajících, platí podmínka

$$[x^3 - (x-1)^3]\,S = x^3 s,$$

z níž plyne rovnice stupně třetího, položíme-li $S : s = a$,

$$x^3 - 3\,ax^2 + 3\,ax - a = 0\,,$$

aneb odstraníme-li druhý člen dosazením $x = y + a$,

$$y^3 - 3a\,(a-1)\,y - 2a^3 + 3a^2 - a = 0.$$

A tu jest pro vodu $s = 1$, pro rtuť $s = 13\cdot596$, pro platinu $21\cdot45$, takže v prvním případě máme $a = 21\cdot45$, v druhém pak $a = 1\cdot58$; rovnice naše promění se tedy v

$$y^3 - 1315\cdot9575\,y - 18379\cdot53975 = 0,$$

$$y^3 - \quad 2\cdot7492\,y - \quad 1\cdot979424 = 0.$$

Máme-li na zřeteli všeobecný tvar

$$y^3 - py - q = 0$$

a uvážíme-li, že tu $4p^3 < 27q^2$, můžeme užiti řešení trigonometrického pomocí vzorců

$$y = \frac{2}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{p}{3}}\,,\quad tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\,{}^1\!/_2\beta}\,,\quad \sin\beta = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}\,,$$

načež obdržíme pro první rovnici

$$\beta = 88^0\,36'\,36'',\ \alpha = 44^0\,46'\,6'',\ y = 41\cdot888,\ x = 63\cdot34^{mm}$$

a podobně pro rovnici druhou

$$\beta = 62^0\,24'\,55'',\ \alpha = 40^0\,14'\,9''5,\ y = 1\cdot941,\ x = 3\cdot52^{mm}.$$

(Tutéž úlohu řešili: *Oldřich Kobrle,* žák VII tř. g. v Jičíně, *Jan Mayer,* žák VII. tř. g. v Jindř. Hradci, *Jos. Zvěřina, Jan Vančura,* žák V., *Brandejs,* žák VI., *K. Teige,* žák VIII tř. ob. r. g. v Praze.)

---

*) Viz *Studnička* „Algebra“ pag. 192.

Řešení úlohy 3.

Abychom ukázali, jak se vyšetřuje evoluta lemniskaty, již ustanovují rovnice, značí-li ϱ úhel polarní,

$$x = a \cos\varrho \sqrt{\cos 2\varrho}\,,\ y = a \sin\varrho \sqrt{\cos 2\varrho}\,,$$

zjednejme si napřed differencováním

$$dx = -a \frac{\sin 3\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}} d\varrho\,,\ dy = a \frac{\cos 3\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}} d\varrho\,,$$

takže rovnice normaly pro lemniskatu bude

$$\xi \sin 3\varrho - \eta \cos 3\varrho = a \sin 2\varrho \sqrt{\cos 2\varrho}\,.$$

A tu nutno si zjednati obálku této přímky, jež představuje evolutu. Derivujíce tedy podlé proměnného parametru ϱ, obdržíme

$$\xi \cos 3\varrho + \eta \sin 3\varrho = \frac{a}{3} \frac{2\cos^2 2\varrho - \sin^2 2\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}}\,,$$

načež jest vyloučiti ϱ z posledních dvou rovnic.

Nežli však přistoupíme k vyloučení veličiny ϱ z těchto dvou rovnic, uveďme je na jednodušší tvar

$$\xi \sin 3\varrho - \eta \cos 3\varrho = \frac{a}{2} \frac{\sin 4\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}}\,,$$

$$\xi \cos 3\varrho + \eta \sin 3\varrho = \frac{a}{6} \frac{1 + 3\cos 4\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}}\,,$$

takže řešíce napřed podlé ξ a η obdržíme co rovnici hledané evoluty

$$\xi = \frac{2a}{3} \frac{\cos^3\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}}\,,\ \eta = -\frac{2a}{3} \frac{\sin^3\varrho}{\sqrt{\cos 2\varrho}}\,.$$

Kdybychom chtěli vyloučiti ϱ, bylo by nutno napřed si z těchto rovnic zjednati

$$(\xi^{2/3} + \eta^{2/3})^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^{4/3} \frac{1}{(\cos 2\varrho)^{2/3}}\,,$$

$$\xi^{2/3} - \eta^{2/3} = \left(\frac{2a}{3}\right)^{2/3} (\cos 2\varrho)^{2/3}\,,$$

načež by znásobením se zjednalo přímo

$$(\xi^{2/3} + \eta^{2/3})^2 (\xi^{2/3} - \eta^{2/3}) = \frac{4a^2}{9}\,,$$

což představuje rovnici evoluty v souřadnicích pravoúhlých.

Úloha 4.

Někdo uložil na úroky 1000 zl. a obdržel při poloročním úrokování za 12 let 2560 zl. nazpět; na kolik procent byl tu kapital uložen?

Úloha 5.

Někdo ukládá každoročně 100 zl. do spořitelny na 4% a do záložny taktéž 100 zl. na 6%; za kolik let bude míti v záložně jednou tolik nastřádáno co ve spořitelně?

Úloha 6.

Má se řešiti rovnice transcendentní

$$2^x + 3^x = 4^x.$$

Úloha 7.

Má se určiti geometrické místo bodu, z něhož možná k ellipsoidu trojosému vésti tři kolmo na sobě stojící tečny.

Úloha 8.

Má se určiti orthogonalní trajektorie parabol majících společnou tečnu vrcholovou.

II. Z fysiky.

Úloha 1.

Nakloněné dvě roviny mají společnou výšku 24^m a délky jejich mají se k sobě jako 3 : 4; jak se mají k sobě rychlosti, jimiž se zdola nahoru musí pohybovati hmotné body, aby se v stejné době na vrcholi setkaly.

Úloha 2.

Pověsí-li se 100 pružných koulí, jichž hmoty přibývá podlé řady geometrické, tak vedlé sebe, že středy jich přijdou do jediné přímky, jak velikou rychlostí odletí poslední, udeří-li první na druhou rychlostí 1?

Úloha 3.

Má se vyšetřiti těžisko prostorové křivky, dané rovnicí $y = {}^2/_3 x\sqrt{2x}$, $z = {}^1/_2 x^2$.

Úloha 4.

V romanu Verneově „Cesta kolem měsíce" jedná se o vypočítání tak zvaného neutralního bodu mezi měsícem a zemí; jak daleko jest tento bod, kde přítažnost obou těles jest stejná, od povrchu zemského vzdálen, mají-li se hmoty jejich jako 80 : 1.