aneb
$$q < \frac{3C}{2B} < r,$$
při čemž podotknouti třeba, že $\sqrt{\frac{B}{3}}$ a $\frac{3C}{2B}$ vůbec rozdílná čísla jsou.

Stejným spůsobem dělí $-\frac{3C}{2B}$ negativní kořeny rovnice
$$x^3 - Bx = +C.$$

Příspěvek ku grafickému mocnění.

Podává

místoředitel **Frant. Šanda.**

1. Úkolem grafického mocnění jest ze známé délky l nějaké přímky *obrazně* určiti hodnotu l^n, při čemž n může býti číslo kladné, záporné, celé nebo i lomené. V užším smyslu brává se při mocnění za mocnitele n *číslo celé* a tento případ, z něhož se ty ostatní dají potom snadno vyvoditi, jest také následujícímu pojednání položen za základ.

Jest tedy nejprvé naší úlohou, ze známé délky l určiti přímky, jichžto délky mají hodnoty dle řady:
$$\ldots\ l^{-2},\ l^{-1},\ l^0,\ l^1,\ l^2,\ l^3,\ \ldots$$
kdežto potom určení délek hodnoty $\ldots l^{-1/2},\ l^{-1/1},\ l^{1/0},\ l^{1/1},\ l^{1/2},\ l^{1/3}\ldots$ značiti bude grafické odmocnění $(\sqrt[-2]{l},\ \sqrt[-1]{l},\ \sqrt[0]{l},\ \sqrt[1]{l},\ \sqrt[2]{l},\ \sqrt[3]{l},\ \ldots)$.

Řešení první úlohy zakládá se na následujícím*) Na libovolné přímce Ax (obr. 2.) budiž úsek AB jedničkou t. j. mírou, jížto se přímka l i její mocniny mají měřiti. Vztyčíme-li $BI \perp Ax$ a sestrojíme z A danou délkou $l = A1 = A\alpha$ oblouk 1α, který kolmici BI v bodu 1 prosekne, potřebujeme jen ve spodním průsečníku α vztýčiti na Ax kolmici, která prodlouženou $A1$ řízne v bodu 2. Délka $A2$ udává potom hodnotu l^2, neboť jest v trojúhelníku $A\alpha 2$

*) Viz **Měřictví pro vyšší třídy středních škol od Fr. Šandy, druhé vydání str. 98.**

$$AB : A1 = A\alpha : A2$$

což můžeme i takto napsati $1 : l = A2$, a z toho

$$A2 = l^2. \tag{1}$$

Přeneseme-li nyní takto určenou délku $A2$ opětně obloukem na Ax (odřízni $A2 = A\beta$) a vztyčíme v průsečníku β kolmici $\beta 3$, obdržíme úsek $A3$ udávající hodnotu l^3. Neboť jest opět v trojúhelníku $A\beta 3$

$A\alpha : A2 = A\beta : A3$, což se může také psáti

$l : l^2 = l^2 : A3$, a z toho

$$A3 = l^3. \tag{2}$$

Podobným způsobem pokračujíce dále určíme délky

$$A4 = l^4,\ A5 = l^5 \text{ atd.}$$

Počínajíce sobě takto i k levé straně od bodu B, odřízneme nejprvé obloukem Bo délku

$$Ao = AB = 1 = l^0. \tag{3}$$

dále pak, jak v trojúhelníku $A1B$ ze srovnalosti

$$A1 : AB = Ao : A\varepsilon$$

plyne, již i takto psáti lze $l : 1 = 1 : A\varepsilon$,

$$\text{úsek } A\varepsilon = A(-1) = \frac{1}{l} = l^{-1}. \tag{4}$$

Rovněž tak plyne z trojúhelníka $A\varepsilon o$ srovnalost

$$Ao : A\varepsilon = A(-1) : A\eta,$$

kterou můžeme také psáti $1 : l^{-1} = l^{-1} : A\eta$, a z toho

$$A\eta = A(-2) = l^{-2}. \tag{5}$$

Takto lze určiti veškeré hodnoty l^n, nechť jest n celistvé číslo kladné nebo záporné, *pokud jen délka* $l > 1$; řešení naší úlohy pro $l < 1$ vyložíme v odstavci 4.

2. Zobrazíme-li touto konstrukcí pro rozličné délky $l = A1$, $l_1 = Aa$, $l_2 = Ab$ ... hodnoty jich mocnin, jak to u přímky Aa naznačeno, obdržíme řady bodů, jichžto vzdálenosti od středu A dávají na paprscích po sobě jdoucích řady mocnin

$\dots\ l^{-2},\ l^{-1},\ l^0,\ l^1,\ l^2,\ l^3,\ \dots$ (na paprsku Az)

$\dots\ l_1^{-2},\ l_1^{-1},\ l_1^0,\ l_1^1,\ l_1^2,\ l_1^3,\ \dots$ („ „ Au)

$\dots\ l_2^{-2},\ l_2^{-1},\ l_2^0,\ l_2^1,\ l_2^2,\ l_2^3,\ \dots$ („ Av) atd.

Spojením bodů udávajících mocniny stejného stupně obdržíme, jak obraz 2. ukazuje, soustavu křivých čar, pomocí nichž lze určiti obrazně libovolnou mocninu *jakékoliv délky* $l > 1$. Maje na př. pomocí těchto křivek (obr. 3.) udati třetí mocninu délky $d = A_m$, protni touto délkou z A kolmici BI, veď průsečníkem m a středem A přímku a bude $At = d^2$, $As = d^3$ ...

Z této příčiny lze křivky tato vzniklé, které jsme v obr. 1. sestrojili jen na jedné straně, v obr. 3. ale úplně, pojmenovati *křivkami mocninovými* (Potenzcurven). Jest křivka $II\,B\,II$ mocninovou křivkou řádu druhého, $IV\,B\,IV$ mocninovou křivkou řádu čtvrtého, $A\,(-I)\,B$ mocninovou křivkou řádu -1. atd.

Jsou pak tyto mocninové křivky rozličného tvaru a podobají se některé z nich (po jedné straně kolmice BI) hyperbole, jenže ke kolmici BI obracejí na blízku bodu B stranu vypuklou, projdouce pak dále bodem obratu zase stranu vydutou.

Na druhé straně kolmice BI jsou všechny tyto křivky uzavřené, rozličného ale tvaru. Abychom povahu jejich blíže seznali, přihlídněme k jich rovnicím.

Budiž v obr. 3. t libovolný bod mocninové křivky řádu druhého a v pravoúhlé soustavě, když přijmem střed A za začátek souřadnic $A\alpha = x$, $t\alpha = y$. Vložíme-li do srovnalosti

$$AB : Am = A\alpha : At$$

příslušné hodnoty, kladouce $AB = 1$ a $At = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, obdržíme

$$1 : x = x : \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ nebo}$$
$$1 : x^2 = x^2 : (x^2 + y^2), \text{ a z toho}$$
$$(x^2)^2 = x^4 = x^2 + y^2 \qquad (\alpha)$$

jakožto rovnici křivky $II\,B\,II$.

Pro křivky řádu třetího buďtež $A\beta = x$, $s\beta = y$ souřadnice bodu s a srovnalosti

$$AB : Am = A\alpha : At$$
$$A\alpha : At = A\beta : As,$$

které můžeme i následovně psáti

$$1 : Am = Am : x$$
$$Am : x = x : \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dosadíce z první srovnalosti hodnotu $Am^{-2} = x$ do umocněné srovnalosti druhé, obdržíme

$$x : x^2 = x^2 : (x^2 + y^2), \text{ a z toho}$$
$$x^3 = x^2 + y^2,$$

což když za příčinou obdoby upravíme, dá žádanou rovnici

$$(x^3)^2 = x^6 = (x^2 + y^2)^2. \qquad (\beta)$$

Podobným způsobem buďtež pro bod u křivky řádu čtvrtého $A\gamma = x$, $u\gamma = y$; zde dlužno vzíti tři srovnalosti

$$AB : Am = A\alpha : At$$
$$A\alpha : At = A\beta : As$$
$$A\beta : As = A\gamma : Au,$$

které můžeme psáti

$$1 : A\alpha = A\alpha : A\beta,$$
$$A\alpha : A\beta = A\beta : x,$$
$$A\beta : x = x : \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Abychom tu obě hodnoty $A\alpha$ a $A\beta$ odstranili, vložme nejprvé z první srovnalosti hodnotu $A\alpha = \pm \sqrt{A\beta}$ do srovnalosti druhé, která potom snadno dá umocněním

$$A\beta : A\beta^{-2} = A\beta^{-2} : x^2,$$

a z toho $A\beta = \sqrt[3]{x^2}$. Dosazením této hodnoty do srovnalosti poslední, obdržíme

$$\sqrt[3]{x^2} : x = x : \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

nebo

$$x^4 : x^6 = x^6 : (x^2 + y^2)^3$$

a z toho konečně rovnice křivky řádu čtvrtého

$$(x^4)^2 = x^8 = (x^2 + y^2)^3 \qquad (\gamma)$$

Takto kdyžbychom pokračovali, vyvinuli bychom rovnice i ostatních křivek mocninových; máme však za to, že porovnáním rovnic α, β a γ bez rozpaku napsati lze rovnici pro mocninovou křivku řádu patého,

$$(x^5)^2 = x^{10} = (x^2 + y^2)^4, \qquad (\delta)$$

a vůbec pro křivku n-tého řádu

$$(x^n)^2 = x^{2n} = (x^2 + y^2)^{n-1} \qquad (\varepsilon)$$

kterou lze i takto psáti

$$x^n = \pm (x^2 + y^2)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (\zeta)$$

3. Znajíce nyní obecnou rovnici křivky mocninové můžeme přistoupiti k jejímu bližšímu ohledání. Z vyobrazení jest sice rozličný tvar jednotlivých křivek viděti; dosadíme-li ale do obecné rovnice (ζ) za n rozličné hodnoty, shledáme, že rovnice ta na př. pro $n = 1$ obdrží tvar

$$x = \pm 1 \qquad (a)$$

t. j. *mocninovou čáru řádu prvního representují dvě k ose y ve vzdálenostech $+1$ a -1 rovnoběžné přímky* (v obr. 3. na př. přímky IBI a $I'B'I'$).

Pro $n = 0$ plyne z obecné rovnice (ζ)

$$1 = \pm (x^2 + y^2)^{-1/2},$$

nebo

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{b}$$

t. j. mocninovou čarou řádu nulltého jest kruh, jehož poloměr rovná se jedničce a střed s počátkem souřadnic v jedno splývá (v obr. 3. na př. kruh 00).

Dosaďme ještě v obecné rovnici (ζ) za $n = -1$; tím obdržíme pro mocninovou křivku řádu $-$ 1. rovnici

$$x^{-1} = \pm (x^2 + y^2)^{-1},$$

nebo

$$x^2 + y^2 \mp x = 0, \tag{c}$$

kteráž rovnice náleží dvěma, počátkem souřadnic procházejícím kruhům poloměru $r = {}^1/_2$, totiž kruhu

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

(v obr. 3. kruhu $B(-I)\,A(-I)$, a kruhu

$$x^2 + y^2 + x = 0$$

(v obr. 3. kruhu $B'(-I')\,A(-I')$.

Že ale $(-1)^m$ mocnina přímky l značí zvrácenou její hodnotu, můžeme mocninovou křivku řádu (-1) t. j. oba tyto kruhy jmenovati také *křivkou zvrácených hodnot,* která, jak dále bude ukázáno, při skutečném zobrazování rozličných mocnin veliké důležitosti nabývá.

Ostatní křivky mocninové jsou již tvaru složitějšího a nebudeme se tu jimi dále obírati.

4. Nyní pak, když jsme grafické mocnění pro délku přímky $l > 1$ blíže seznali, můžeme přistoupiti k řešení dané úlohy i pro $l < 1$, při čemž se kruhy zvrácených hodnot dají s největším prospěchem upotřebiti.

Každá délka $l < 1$, nemohouc z A protnouti kolmici BI (obr. 2.), dá se totiž vnésti *do kruhu zvrácených hodnot co tětiva* z A vybíhající. Je-li na př. v obr. 1. opět délka $AB = 1$, kruh $(-I)$ křivkou zvrácených hodnot a přímka $Ac = l$ co tětiva v tomto kruhu, jejíž na př. mocnina má býti určena; prodluž nejprvé tětivu Ac až ke kolmici BI, čímž obdržíš úsek Aa. Že ale jest dle rovnice (4) v odstavci 1. délka

$$Ac = l = (Aa)^{-1} = \frac{1}{Aa},$$

a z toho

$$Aa = \frac{1}{Ac} = \frac{1}{l},$$

obdržíme mocněním délky Aa dle vyloženého dosud způsobu

$$Al = (Aa)^2 = \frac{1}{l^2}$$

$$Af = (Aa)^3 = \frac{1}{l^3} \text{ atd.}$$

Přeneseme-li nyní této třetí mocniny Af krajní bod f na kolmici BI obloukem fm, tak aby bylo $Af = Am$, a spojíme průsečník m se středem A, bude dle odstavce předešlého tětiva Ag zvrácenou hodnotou délky Am, tedy

$$Ag = \frac{1}{Am} = \frac{1}{Af} = \frac{1}{1/l^3} = l^3.$$

Avšak i bez přenášení bodu f na kolmici BI lze úlohu tuto provésti. Je-li na př. daná délka $l = A(-1)$, tedy dle uvedené již rovnice (4) v odstavci 1. délka $A1 = \frac{1}{l}$, bude na paprsku $A1$

$$A_0 \quad = \left(\frac{1}{l}\right)^0 = 1$$

$$A(-1) = \left(\frac{1}{l}\right)^{-1} = l$$

$$A(-2) = \left(\frac{1}{l}\right)^{-2} = l^2$$

$$A(-3) = \left(\frac{1}{l}\right)^{-3} = l^3 \text{ atd.}$$

z čehož vidno, že jest na paprsku Am úsek Ag roveň úseku Ar na paprsku Aa.

Jest tedy nyní na bíledni, že jakmile máme sestrojenou soustavu křivek mocninových (dle obr. 3.), těmito v každém případu mocnění obrazně provésti lze, nechť jest daná délka $l \gtrless 1$.

5. Konečně budiž mocnitel dané délky *číslo lomené* a sice nejprve tvaru $1/n$; mocnění v tomto případu promění se v *odmocnění* a dají se veškeré odmocniny pomocí sestrojených právě křivek mocninových obrazně určiti.

Budiž nejprve opět daná délka $Aa = l > 1$ (obr. 3.), jejíž odmocniny máme zobraziti. Sestroj touto délkou ze středu A oblouk $a, a_2 \ldots a_4$, který mocninové křivky protne v bodech $a, a_2, s, a_4 \ldots$; spojením těchto průsečníků se středem A obdržíme na paprscích úseky Aa, Ab, Am, $An \ldots$, jakož i těchto zvrácené hodnoty v tětivách Ac_1, Ac_2, Ac_3, $Ac_4 \ldots$, jimiž jsou odmocniny žádaného řádu přímky l vyjádřeny. Neboť jest dle vlastnosti těchto křivek

$$\begin{aligned} Aa_1 &= l \\ \overline{Ab}^2 &= Aa_2 = l \\ \overline{Am}^3 &= As = l \\ \overline{An}^4 &= Aa_4 = l \end{aligned}$$

atd. následovně úseky

$$\begin{aligned} Aa &= \sqrt[1]{l} \\ Ab &= \sqrt{l} \\ Am &= \sqrt[3]{l} \\ An &= \sqrt[4]{l} \end{aligned}$$

Na křivce zvrácených hodnot obdržíme tudíž

$$Ac_1 = \frac{1}{Aa} = \frac{1}{\sqrt[1]{l}} = \sqrt[-1]{l} \text{ atd.}$$

$$Ac_2 = \frac{1}{Ab} = \frac{1}{\sqrt{l}} = \sqrt[-2]{l}$$

$$Ac_3 = \frac{1}{Am} = \frac{1}{\sqrt[3]{l}} = \sqrt[-3]{l}$$

Z toho vidíme, že jest v této soustavě odmocnin obsažena i mocnina $\sqrt[4]{l}$ pro veškeré *kladné i záporné* hodnoty odmocnitele n, vyjma pro $n = 0$, kterýžto případ se vůbec ani obrazně určiti nedá, ježto kruh délkou $l = Aa$ narýsovaný (kruh $a_1\, a_2 \ldots a_4$) mocninovou křivku řádu nultého v žádném bodu neprotíná jsa s ní soustředný. Okolnost tato zakládá se jednoduše na tom, že pro $l > 1$ platí $\sqrt[0]{l} = l^{\frac{1}{0}} = \infty$, kterážto hodnota nedá se ani obrazně ani číselně stanoviti.

Když by v druhém případu byla délka dané přímky $l < 1$, určíme nejprvé známým spůsobem její zvrácenou hodnotu (dle 4) a pokračujeme jako v případu předešlém. Je-li tedy $l < 1$, nanes ji co tětivu Ac, (obr. 3.) do kružnice zvrácených hodnot a bude při téže konstrukci, t. j. když Ac_1 prodloužíš až do a a sestrojíš oblouk $a\ a_2 \ldots a_4$,

$$Aa = \frac{1}{Ac_1} = \frac{1}{l}$$

$$\overline{Ab}^2 = Aa_2 = Aa = \frac{1}{l}$$

$$\overline{Am}^3 = As = Aa = \frac{1}{l}$$

$$\overline{An}^3 = Aa_4 = Aa = \frac{1}{l} \ldots,$$

následovně také

$$Ac_2 = \frac{1}{Ab} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l}}} = \sqrt{l}$$

$$Ac_3 = \frac{1}{Am} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{l}}} = \sqrt[3]{l}$$

$$Ac_4 = \frac{1}{An} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{l}}} = \sqrt[4]{l}$$

I tato soustava podá hodnotu $\sqrt[n]{l}$ pro všechny kladné i záporné hodnoty odmocnitele n vyjma pro $n = 0$ z příčin již vysvětlených.

Nyní již bude velmi snadno, určiti obrazně i hodnotu

$$l^{\pm \frac{m}{n}} = \sqrt[n]{l^m}.$$

Maje na př. obrazně určiti z dané délky $l > 1$ přímku mající hodnotu $\sqrt{l^2}$, přetni nejprvé z A (obr. 3.) délkou $l = Ab$ kolmici Bl, a bude délka $Aa_2 = l^2$; k určení její třetí odmocniny opiš touto délkou z A oblouk až k mocninové křivce řádu třetího (do s) spoj průsečník s s A, a jest $Am = \sqrt[3]{As} = \sqrt[3]{l^2}$. Pro $l < 1$ nanes danou délku l co tětivu Ac_2 do kruhu zvrácených hodnot (obr. 3) a bude

$$Ab = \frac{1}{l}, \text{ tudíž } Aa_2 = \left(\frac{1}{l}\right)^2;$$

přetni nyní z A obloukem $a_1, a_2 \ldots a_4$ mocninovou křivku řádu třetího ($Aa_2 = As$) a bude

$$Am = \sqrt[3]{As} = \sqrt[3]{\frac{1}{l^2}}$$

následovně tětiva co zvrácená hodnota

$$Ac_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{l}}} = \sqrt[3]{l^2}.$$

Grafické stanovení logarithmů.

Podává

Julius Filcík.*)

Buďtež

$$u = f(\varphi) \tag{1}$$

$$u' = a^{f(\varphi)} \tag{2}$$

polarní rovnice dvou křivek. Logarithmováním rovnice (2) pro základní číslo a obdržíme rovnici

$$log\, u' = f(\varphi),$$

která ve spojení s rovnicí (1) dá

$$u = log\, u' \tag{3}$$

t. j. buďsi funkce oblouku φ jakéhokoliv tvaru, vždy jsou pa-

*) Článek tento původně již r. 1867 sepsal *Jan Ployhar*, professor na realném gymnasii a později ředitel hospodářské školy v Táboře. Opis jeho učinil jsem si téhož roku s laskavým povolením Ployharovým.
Julius Filcík.