František Josef Studnička

O poměru funkcí goniometrických k některým výrazům algebraickým

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 5, 249--253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122875

hnouti k hypothesám o souvislosti „elektřiny“ s jednotlivými molekulami neb snad atomy hmotnými, jak stal se též už pokus v aetherovém modellu Lodge-ově, o němž jedná ve své knize „Modern Wiews on Electricity“; referát o knize té přineslo „Athaeneum“ roč. VII. 1889 str. 73.

O poměru funkcí goniometrických k některým výrazům algebraickým.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Při skládání II. svazku algebraické analyse, kterýž obsahuje *úvod do nauky o nižších funkcích transcendentních*, bylo mi též objasniti poměr funkcí těchto k funkcím algebraickým vůbec a tedy zvláště též přihlédnouti k obsahu spisku „Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques“, jejž *Ed. Lucas* r. 1878 v Bruselu vydal. A tu jsem poznal, že stran algebraických výrazů tam U_n a V_n zvaných možná hned spředu říditi dedukci směrem jiným, rychleji k cíli našemu vedoucím, jakož tuto budiž ukázáno.

Sestrojíme-li s Lucasem, nevycházejíce však od rovnice kvadratické, přímo výrazy algebraické

$$s_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \tag{1}$$

$$k_n = a^n + b^n, \tag{2}$$

poznáváme ze složení výrazu (1), že tu platí

$$s_{2n} = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{a - b}(a^n + b^n),$$

a tedy se zřetelem ke vzorci (2)

$$s_{2n} = s_n \, . \, k_n \, . \tag{3}$$

Dále poznáváme ze složení obou těchto vzorců, zavedeme-li tam k vůli krátkosti

$$\delta = a - b, \tag{4}$$

že tu současně platí

$$a^m - b^m = \delta s_m,$$
$$a^m + b^m = k_m,$$

takže sečtením a odečtením na obou stranách vznikne

$$2a^m = k_m + \delta s_m, \qquad (5)$$
$$2b^m = k_m - \delta s_m, \qquad (6)$$

a tedy i podobně pro $m = n$ jest

$$2a^n = k_n + \delta s_n,$$
$$2b^n = k_n - \delta s_n;$$

z těchto vzorců pak snadno lze odvoditi napřed násobením příslušným

$$4a^{m+n} = k_m k_n + \delta(s_m k_n + s_n k_m) + \delta^2 s_n s_n,$$
$$4b^{m+n} = k_m k_n - \delta(s_m k_n + s_n k_m) + \delta^2 s_m s_n,$$

načež sečtením a odečtením vzejde podle vzorců (1) a (2)

$$2k_{m+n} = k_m k_n + \delta^2 s_m s_n, \qquad (7)$$
$$2s_{m+n} = s_m k_n + s_n k_m, \qquad (8)$$

z čehož patrno, jak tyto výrazy s příponou $(m+n)$ vyjadřují se obdobnými výrazy s příponou m a n, takže vzorce (7) a (8) představují *součtovou* poučku jejich.

Zároveň plyne z nich pro $m = n$ přímo

$$2k_{2n} = k_n^2 + \delta^2 s_n^2, \qquad (9)$$
$$s_{2n} = s_n k_n, \qquad (10)$$

při čemž poslední relace souhlasí se vzorcem (3).

Z týchže vzorců (7) a (8) plyne mimo to

$$2(k_{m+n} \pm \delta s_{m+n}) = (k_m \pm \delta s_m)(k_n \pm \delta s_n),$$

takže pro $m = n$ se tu obdrží

$$2(k_{2n} \pm \delta s_{2n}) = (k_n \pm \delta s_n)^2.$$

Podobně bude dále, znásobíme-li u tohoto vzorce na obou stranách napřed součtem $(k_m + \delta s_m)$, užijeme-li pak vzorců (7) a (8) a položíme-li konečně $m = n$,

$$2^2(k_{3n} \pm \delta s_{3n}) = (k_n \pm \delta s_n)^3.$$

A že se takovýmto postupem dalším přijde ku všeobecnému vzorci

$$2^{r-1}(k_{rn} \pm \delta s_{rn}) = (k_n \pm \delta s_n)^r, \qquad (11)$$

netřeba ani zvláště připomínati, zasluhuje však bližšího povšimnutí, že tu r značí celistvé číslo a tedy pravá strana vzorce (11) podlé binomické poučky byvši rozvinuta poskytuje konečný počet členů podlé mocnin veličiny δ postupujících.

Že poslední vzorce mají co do složení svého podobnosť se známými vzorci goniometrickými, pozná se ihned, čteme-li místo s a k známé *sinus* a *kosinus*, jelikož pak rozdíl činí jenom koefficienty 2 a δ.

Abychom docílili úplného souhlasu, třeba jen δ vzorcem (4) stanovené určiti přiměřeně podlé toho.

Poněvadž z původních vzorců (1) a (2) pro $n = o$ plyne

$$s_0^2 + k_0^2 = 4,$$

pro $n = 1$ se však obdrží

$$s_1^2 + k_1^2 = 1 + (a + b)^2,$$

nutno, aby na pravé straně platilo, máli tam součet opět 4 činiti, patrně

$$a + b = \sqrt{3}, \tag{12}$$

čímž *prvá* podmínka pro libovolné dosud veličiny a, b stanovena; a poněvadž pak pro $n = 2$ z týchže vzorců základních vznikne

$$s_2^2 + k_2^2 = 3 + (a^2 + b^2)^2,$$

nutno mimo to, má-li součet na pravé straně opět 4 činiti, aby současně bylo též

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{13}$$

čímž *druhá* podmínka pro obě veličiny a, b stanovena, takže jsou nyní již vzorcem (12) a (13) určeny. Plyneť tu přiměřeným řešením napřed

$$ab = 1 \tag{14}$$

a z rovnice na vzorci (4) spočívající pak

$$\delta^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 1 - 2,$$

takže konečně se obdrží

$$\delta^2 = -1,$$

$$\delta = \sqrt{-1} = i, \tag{15}$$

čímž δ přesně jest určeno. A tím stanoveny i nové výrazy zvláštní σ_n, $\varkappa_n$ místo všeobecných s_n, k_n, o nichž platí především, jakož snadno možná přehlédnouti,

$$\varkappa_n = \varkappa_{-n}, \tag{16}$$
$$\sigma_n = -\sigma_{-n}; \tag{17}$$

předcházející vzorce (7), (8), (9) a (10) promění se pak v

$$2\varkappa_{m+n} = \varkappa_m \varkappa_n - \sigma_m \sigma_n, \tag{18}$$
$$2\sigma_{m+n} = \sigma_m \varkappa_n + \sigma_n \varkappa_m, \tag{19}$$
$$2\varkappa_{2n} = \varkappa_n^2 - \sigma_n^2, \tag{20}$$
$$\sigma_{2n} = \sigma_n k_n \tag{21}$$

a mimo to vznikne ze vzorců původních

$$\sigma_n^2 = -(a^{2n} - 2\,a^n b^n + b^{2n}),$$
$$\varkappa_n^2 = a^{2n} + 2\,a^n b^n + b^{2n}$$

jednoduchým sečtením se zřetelem ke vzorci (14)

$$\sigma_n^2 + \varkappa_n^2 = 4\,(ab)^n = 4. \tag{22}$$

Že poslední výrazy a relace těsně přiléhají k základním vzorcům goniometrickým, patrno, takže jenom třeba k nim přímo raziti přechod.

Poněvadž tu dle předešlého platí

$$a + b = \sqrt{3},$$
$$a - b = i,$$

obdrží se jednoduchým řešením

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \tag{23}$$

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i); \tag{24}$$

vyjádříme-li pak tato čísla soujemná tvary kanonickými, bude o těchto sdružených hodnotách platiti

$$a = r\ (\cos\varrho + i \sin\varrho),$$
$$b = r\ (\cos\varrho - i \sin\varrho),$$

z čehož plyne dále

$$r\cos\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad r\sin\varrho = \frac{1}{2},$$

takže konečně tu jest

$$r = 1 \tag{25}$$

$$\varrho = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ. \tag{26}$$

I bude tedy, užijeme-li poučky Moivreovy

$$\varkappa_n = 2 \cos n\varrho, \tag{27}$$
$$\sigma_n = 2 \sin n\varrho, \tag{28}$$

což srovnává se s dřívějšími vzorci pro $n = o$, jelikož

$$\sigma_0 = 0, \ \varkappa_0 = 2,$$

a pro $n = 1$, jelikož i tu

$$\sigma_1 = 1, \ \varkappa_1 = \sqrt{3},$$

jakož i pro $n = 2$, jelikož pak

$$\sigma_2 = \sqrt{3}, \ \varkappa_2 = 1.$$

Taktéž poskytne vzorec (21) známou relaci

$$\sin 2n\varrho = 2 \sin n\varrho \cos n\varrho$$

a vzorec (22) podobně

$$\sigma_n^2 + \varkappa_n^2 = 4,$$

z čehož plyne známý vzorec základní

$$\cos^2 n\varrho + \sin^2 n\varrho = 1;$$

ze vzorce (9) plyne pak

$$\cos 2n\varrho = \cos^2 n\varrho - \sin^2 n\varrho,$$

ze vzorce (11) konečně poučka Moivre-ova, a rozvineme-li tam dle binomické poučky, známá dvojice vzorců

$$2^{r-1}\varkappa_{nr} = \varkappa_n^r - r_2\varkappa_n^{r-2}\sigma_n^2 + r_4\varkappa_n^{r-4}\sigma_n^4 - \ldots$$
$$2^{r-1}\sigma_{nr} = r_1\varkappa_n^{r-1}\sigma_n - r_3\varkappa_n^{r-3}\sigma_n^3 + r_5\varkappa_n^{r-5}\sigma_n^5 - \ldots$$

Jakož patrno, netřeba tu odvozovati, jak *Lucas* činí, vzorce

$$\sigma_n = 2 \sin\left(\frac{ni}{2}\, l\,\frac{a}{b}\right),$$
$$\varkappa_n = 2 \cos\left(\frac{ni}{2}\, l\,\frac{a}{b}\right),$$

jelikož tu platí

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),$$

takže užijeme-li známé relace

$$l\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = i \operatorname{arctg} \sqrt{3},$$

obdržíme přímo vzorce (27) a (28).