Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O nové poučce determinantní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 3, 97--103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122867`

O nové poučce determinantní.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Jak známo, zvýší se stupeň determinantu libovolně přidáváním tak zvaných polorámců, majících v rohu 1, dále pak v jedné straně prvky libovolné a v druhé straně samé nully,*) jakož patrno z příkladu

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 0, & a_1, & b_1 \\ 0, & a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 0, & 1, & x, & y \\ 0, & 0, & a_1, & b_1 \\ 0, & 0, & a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Zvyšování toto slouží často velmi dobře při násobení determinantů, o jehož výsledku víme, že se jeví opět co determinant stupně takového, jaký je nejvyšší mezi jednotlivými činiteli, takže na př. součin čtyř determinantů, z nichž jeden jest stupně druhého, dva stupně třetího a poslední stupně pátého, jest determinantem stupně pátého.

Kdo ví, jak nesnadno se vyčíslují determinanty stupňů vyšších, zejména pátým počínajíc, zajisté se zeptá, zdali není možná stupeň determinantu též libovolně snížiti, v předcházejícím příkladě, dejme tomu, na stupeň třetí uvésti činitele posledního, aby součin byl determinantem stupně taktéž třetího. A v té příčině že možná vyhověti, budiž v následujících řádcích ukázáno.

Již v základech nauky o determinantech se ukazuje,**) že hodnota determinantu se nemění, připočítá-li se ku prvkům kterékoli řady p-násobná hodnota soulehlých prvků některé

*) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 22.

**) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy středních škol“ I. vyd. pag. 125 II. vyd. pag. 112.

řady souběžné. Této vlastnosti můžeme především užiti k tomu, abychom v jedné řadě determinantu zjednali si prvky stejné, načež se snadno sníží co do stupně o jednotku odečítáním řad druhých. A opakuje-li se v determinantu takto sníženém pochod tento dále, sníží se co do stupně tak, že obdržíme konečně vzorec ukazující, jak se determinant stupně n-tého dá vyjádřiti determinantem stupně $(n-k)$tého.

Poněvadž můžeme beze změny hodnoty determinantu řádky v něm souměrně vyměniti za sloupce*) a po případě jen se změnou označení každý sloupec přivésti na první místo,**) neublíží se ničím všeobecnosti u vedení důkazu, přidržíme-li se vesměs sloupce prvního, od něho vždy vycházejíce.

Položíme-li za základ determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \dots l_3 \\ \vdots & & \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{vmatrix} \tag{1}$$

a připočteme-li ku prvkům k-tého řádku m_k-násobné hodnoty soulehlých prvků řádku prvního pro

$$k = 2, 3, 4, \dots, n,$$

obdržíme podle předcházejícího pravidla

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & , b_1 & , c_1 & , \dots, l_1 \\ a_2 + m_2 a_1, & b_2 + m_2 b_1, & c_2 + m_2 c_1, & \dots, l_2 + m_2 l_1 \\ a_3 + m_3 a_1, & b_3 + m_3 b_1, & c_3 + m_3 c_1, & \dots, l_3 + m_3 l_1 \\ \vdots & & & \\ a_n + m_n a_1, & b_n + m_n b_1, & c_n + m_n c_1, & \dots, l_n + m_n l_1 \end{vmatrix}.$$

Aby se pak staly hodnoty prvků sloupce prvního stejnými, nutno, aby násobitelé m_k vyhověli podmínkám těmto:

$$a_2 + m_2 a_1 = a_1, \text{ z čehož plyne } m_2 = 1 - \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 + m_3 a_1 = a_1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad m_3 = 1 - \frac{a_3}{a_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n + m_n a_1 = a_1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad m_n = 1 - \frac{a_n}{a_1}.$$

*) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 21.
**) ibid. pag. 22.

Dosadíme-li tyto hodnoty do předcházejícího determinantu a vyloučíme-li pak společného činitele a_1, obdržíme napřed

$$\varDelta = a_1 \begin{vmatrix} 1, & b_1 & , c_1 & , \ldots \\ 1, & b_2 + b_1\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right), & c_2 + c_1\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right), & \ldots \\ 1, & b_3 + b_1\left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right), & c_3 + c_1\left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right), & \ldots \\ \vdots & & & \\ 1, & b_n + b_1\left(1 - \frac{a_n}{a_1}\right), & c_n + c_1\left(1 - \frac{a_n}{a_1}\right), & \ldots \end{vmatrix};$$

uvedeme-li pak složené prvky na stejného jmenovatele a odečteme-li na to prvky řádku prvního od soulehlých prvků řádků ostatních, obdržíme po krátkém zjednodušení

$$\varDelta = \frac{1}{a_1^{\,n-2}} \begin{vmatrix} (a_1\, b_2), & (a_1\, c_2), & (a_1\, d_2), & \ldots, & (a_1\, l_2) \\ (a_1\, b_3), & (a_1\, c_3), & (a_1\, d_3), & \ldots, & (a_1\, l_3) \\ (a_1\, b_4), & (a_1\, c_4), & (a_1\, d_4), & \ldots, & (a_1\, l_4) \\ \vdots & & & & \\ (a_1\, b_n), & (a_1\, c_n), & (a_1\, d_n), & \ldots, & (a_1\, l_n) \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

kdež užito označení determinantu *Binetova*, podle něhož

$$(a_i\, b_j) = \begin{vmatrix} a_i, & b_i \\ a_j, & b_j \end{vmatrix} = a_i\, b_j - a_j\, b_i.$$

Ze vzorce (2) patrno, jak *determinant stupně n-tého možná vyjádřiti determinantem stupně (n—1)ho, jehož prvky jsou však determinanty stupně druhého.*

Jestli tedy ve zvláštním případě $n = 3$, obdržíme známý vzorec

$$a_1\,(a_1\, b_2\, c_3) = (a_1\, b_2)\,(a_1\, c_3) - (a_1\, b_3)\,(a_1\, c_2)$$

anebo zavedeme-li kratší označení

$$\varDelta = (a_1\, b_2\, c_3)$$

$$(a_1\, b_2) = C_3,\ (a_1\, c_3) = B_2,\ (a_1\, b_3) = C_2,\ (a_1\, c_2) = B_2',$$

ve spůsobu známějším *)

$$\varDelta\, a_1 = (B_2\, C_3). \qquad (3)$$

Nežli postoupíme dále, užijme obdobných vzorců

$$\varDelta\, b_1 = (C_2\, A_3)$$

$$\varDelta\, c_1 = (A_2\, B_3)$$

a násobme poslední tři rovniny, jak po sobě jdou, veličinami

*) ibid. pag. 41.

$$A_1,\ B_1,\ C_1,$$

načež obdržíme, sečítajíce na obou stranách,

$$\Delta(a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) = A_1 (B_2 C_3) + B_1 (C_2 A_3) + C_1 (A_2 B_3),$$

anebo zavedeme-li příslušné hodnoty za tyto trinomy,

$$\Delta^2 = (A_1\ B_2\ C_3) = \Delta'.$$

Přidružený determinant stupně třetího rovná se tedy druhé mocnině determinantu původního, což zvláštní jest případ pravidla všeobecného, odvozeného pomocí poučky o násobení determinantů.*)

Vrátíme-li se nyní k determinantu (2) a provedeme-li tu stejný obrat, jako v determinantu (1), obdržíme dále, za násobitele μ_k volíce,

$$\Delta = \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2) & , (a_1 c_2) & , \dots \\ (a_1 b_3) + \mu_3 (a_1 b_2), & (a_1 c_3) + \mu_3 (a_1 c_2), & \dots \\ (a_1 b_4) + \mu_4 (a_1 b_2), & (a_1 c_4) + \mu_4 (a_1 c_2), & \dots \\ \vdots & & \\ (a_1 b_n) + \mu_n (a_1 b_2), & (a_1 c_n) + \mu_n (a_1 c_2), & \dots \end{vmatrix},$$

kdež nutno, mají-li hodnoty prvků sloupce prvního býti stejny, aby násobitelé μ_k vyhověli podmínkám těmto:

$$(a_1 b_3) + \mu_3 (a_1 b_2) = (a_1 b_2), \text{ z čehož jde } \mu_3 = 1 - \frac{(a_1 b_3)}{(a_1 b_2)},$$

$$(a_1 b_4) + \mu_4 (a_1 b_2) = (a_1 b_2), \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu_4 = 1 - \frac{(a_1 b_4)}{(a_1 b_2)},$$

. . . .

$$(a_1 b_n) + \mu_n (a_1 b_2) = (a_1 b_2), \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu_n = 1 - \frac{(a_1 b_n)}{(a_1 b_2)}.$$

Zavedeme-li tedy tyto hodnoty do vzorce předcházejícího a uvážíme-li, že podle významu vzorce (3) platí

$$(a_1 c_3) + \left[1 - \frac{(a_1 b_3)}{(a_1 b_2)}\right] (a_1 c_2) = (a_1 c_2) + \frac{a_1 (a_1 b_2 c_3)}{(a_1 b_2)},$$

$$(a_1 c_4) + \left[1 - \frac{(a_1 b_4)}{(a_1 b_2)}\right] (a_1 c_2) = (a_1 c_2) + \frac{a_1 (a_1 b_2 c_4)}{(a_1 b_2)}$$

. . . .

obdržíme z poslední rovniny, odečteme-li pak od prvků druhého, třetího, ..., posledního řádku souhlehlé prvky řádku prvního, po vyzdvižení společných činitelů konečně

*) ibid. pag. 40.

$$\varDelta = \frac{1}{(a_1 b_2)^{n-3}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3), & (a_1 b_2 d_3), & \ldots, & (a_1 b_2 l_3) \\ (a_1 b_2 c_4), & (a_1 b_2 d_4), & \ldots, & (a_1 b_2 l_4) \\ (a_1 b_2 c_5), & (a_1 b_2 d_5), & \ldots, & (a_1 b_2 l_5) \\ \vdots & & & \\ (a_1 b_2 c_n), & (a_1 b_2 d_n), & \ldots, & (a_1 b_2 l_n) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Ze vzorce tohoto jde na jevo, že determinant stupně n-tého možná vyjádřiti determinantem stupně $(n-2)$ho, jehož prvky jsou determinanty stupně třetího.

Pro $n = 4$ plyne pak ze vzorce (4) známá rovnina

$$\varDelta (a_1 b_2) = (a_1 b_2 c_3)\ (a_1 b_2 d_4) - (a_1 b_2 c_4)\ (a_1 b_2 d_3)$$

anebo zavedeme-li kratší označení

$$\varDelta = (a_1 b_2 c_3 d_4)$$

$(a_1 b_2 c_3) = D_4$, $(a_1 b_2 d_4) = C_3$, $(a_1 b_2 c_4) = D_3$, $(a_1 b_2 d_3) = C_4$, ve formě obvyklejší

$$\varDelta (a_1 b_2) = (C_3 D_4). \quad (5)$$

Nežli pokračovati budeme v dalším postupu, seřaďme tuto ještě obdobné rovniny

$$\varDelta (a_1 c_2) = (B_3 D_4)$$
$$\varDelta (a_1 d_2) = (B_3 C_4)$$
$$\varDelta (b_1 c_2) = (A_3 D_4)$$
$$\varDelta (b_1 d_2) = (A_3 C_4)$$
$$\varDelta (c_1 d_2) = (A_3 B_4)$$

a násobme všech šest, jak po sobě jdou, podobnými rovninami, stejnolehlé spojujíce v součin, totiž

$$\varDelta (c_3 d_4) = (A_1 B_2)$$
$$\varDelta (b_3 d_4) = (A_1 C_2)$$
$$\varDelta (b_3 c_4) = (A_1 D_2)$$
$$\varDelta (a_3 d_4) = (B_1 C_2)$$
$$\varDelta (a_3 c_4) = (B_1 D_2)$$
$$\varDelta (a_3 b_4) = (C_1 D_2)$$

a sestavme pak algebraický součet

$$\varDelta^2 \left.\begin{aligned} [(a_1 b_2)\ (c_3 d_4) - (a_1 c_2)\ (b_3 d_4) + (a_1 d_2)\ (b_3 c_4) \\ + (b_1 c_2)\ (a_3 d_4) - (b_1 d_2)\ (a_3 c_4) \\ + (c_1 d_2)\ (a_3 b_4) \end{aligned}\right\} =$$

$$\begin{aligned} = (A B_2)\ (C_3 D_4) - (A_1 C_2)\ (B_3 D_4) + (A_1 D_2)\ (B_3 C_4) \\ + (B_1 C_2)\ (A_3 D_4) - (B_1 D_2)\ (A_3 C_4) \\ + (C_1 D_2)\ (A_3 B_4); \end{aligned}$$

obdržíme tu pomocí příslušných symbolů

$$\Delta^3 = (A_1 B_2 C_3 D_4) = \Delta',$$

což znamená, že *přidružený determinant stupně čtvrtého se rovná třetí mocnině determinantu původního.*

Že bychom, vrátivše se k odvození původnímu, obdobným spůsobem obdrželi pomocí vzorce (5) z rovniny (4) dále

$$\Delta = \frac{1}{(a_1 b_2 c_3)^{n-4}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3 d_4), (a_1 b_2 c_3 e_4), \ldots, (a_1 b_2 c_3 l_4) \\ (a_1 b_2 c_3 d_5), (a_1 b_2 c_3 e_5), \ldots, (a_1 b_2 c_3 l_5) \\ (a_1 b_2 c_3 d_6), (a_1 b_2 c_3 e_6), \ldots, (a_1 b_2 c_3 l_6) \\ \vdots \\ (a_1 b_2 c_3 d_n), (a_1 b_2 c_3 e_n), \ldots, (a_1 b_2 c_3 l_n) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

poznává se z předcházejícího postupu velmi snadno; i možná tedy *determinant stupně n-tého vyjádřiti determinantem stupně (n — 3)ho, jehož prvky jsou determinanty stupně čtvrtého.*

Z dosavádního postupu poznáváme, jak snížením stupně determinantu zároveň stejně se zvýší stupeň prvků jeho, takže vždy, jako v determinantu původním (1), představuje součet $(n+1)$ stupeň determinantu se stupněm prvku dohromady. A poněvadž tu indukce zcela vystačuje, možná podle vzorců (2), (4) a (6) sestaviti vzorec všeobecný

$$\Delta = \frac{1}{(a_1 b_2 \ldots g_{h-1})^{n-h}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 \ldots h_h) \;\;, (a_1 b_2 \ldots i_h) \;\;, \ldots \\ (a_1 b_2 \ldots h_{h+1}), (a_1 b_2 \ldots i_{h+1}), \ldots \\ (a_1 b_2 \ldots h_{h+2}), (a_1 b_2 \ldots i_{h+2}), \ldots \\ \vdots \\ (a_1 b_2 \ldots h_n) \;\;, (a_1 b_2 \ldots i_n) \;\;, \ldots \end{vmatrix}, \quad (7)$$

jímž se vyjadřuje poučka na počátku již vyslovená, že *determinant stupně n-tého možná vyjádřiti determinantem stupně (n — h + 1)ho, jehož prvky jsou determinanty stupně h-tého.*

Pro $n = h + 1$ plyne pak ze vzorce (7) relace

$$\Delta\,(a_1 b_2 \ldots g_{h-1}) = \begin{vmatrix} (a_1 b_2 \ldots h_h) \;\;, (a_1 b_2 \ldots i_h) \\ (a_1 b_2 \ldots h_{h+1}), (a_1 b_2 \ldots i_{h+1}) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

jíž možná různým spůsobem dobře užiti, jakož jsem na různých místech ukázal.*)

Všeobecný vzorec (7), jejž bychom transformačním mohli nazvati, zajisté jest tak fundamentalním, jako vzorec rozkladný, multiplikační a poměr přidruženosti vyjadřující, kteréž tři vzorce

*) Viz *Studnička* „O duchu mathematickém". Časop. p. pěstov. math. a fys. Roč. VIII. pag. 85.

základními obyčejně slují; neb užíváním jeho přicházíme k důležitým výsledkům i v theorii i v praksi.

Jak dříve bylo již ukázáno, odvozeny při zvláštních případech vzorce (3) a (5) a stejným postupem jest možná vyvésti i vzorec všeobecný, jejž symbolicky vyjadřujeme rovninou

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

značí-li Δ' determinant přidružený a Δ determinant původní stupně n-tého.

Co do stránky praktické možná vzorce transformačního prospěšně užiti k vyčíslení hodnoty determinantu, zejména je-li stupně vyššího. Již při determinantu stupně pátého jeví se tato výhodnost jeho; neb obyčejným rozkladem v součet součinů, kdež první činitel jest determinantem stupně druhého, druhý pak stupně třetího, obdrželi bychom *deset* determinantů druhého a taktéž *deset* determinantů třetího stupně, kdežto užitím vzorce (4) jen *jeden* determinant stupně druhého a *devět* determinantů stupně třetího třeba vyčísliti. Při determinantu stupně *šestého* vyžaduje se podle téhož vzorce (4) jen *šestnácte* determinantů stupně třetího, kdežto obyčejný vzorec rozkladný jich předpokládá *čtyřicet*.*)

Poznámka k číslům Bernoulliho.

Podal

V. Jung v Pardubicích.

1. Při rozvinování nižších funkcí transcendentních tgx a $cotx$ v nekonečné řady dle stoupajících mocností oblouku x přicházíme na tak zvaná čísla Bernoulliho,*) jež podléhají zajímavým rovnicím rekurrentním.

Ze známých vzorců:

$$sinx = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots in\ inf.\ldots \quad (1)$$

---

*) Toto odvození vzorce (7) uveřejnil jsem poprvé v „Sitzungsber. d. kön. b. Ges. d. Wiss.“ 28. Nov. 1879.

*) Viz „Herr“: Höhere Mathematik. II. Band. pag. 168—170. (1864) aneb „Schlömilch“: Handbuch der höheren Analysis. pag. 211. (1862).