Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 25 (1896), No. 1, 76--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122847

# Úlohy.

## Úloha 1.

*Je-li $n$ libovolné číslo celé, jest výraz*

$$n(n^4+35n^2+24)$$

*dělitelný 60ti. Proč?* Prof. *A. Strnad.*

## Úloha 2.

*Kolikaciferná jest hodnota čísla $777^{777}$? Kterou číslicí počíná a kterou končí tato hodnota?* *Týž.*

## Úloha 3.

*Ručičky na hodinách svíraly mezi 3. a 4. hodinou úhel téměř přímý a měly při tom takovou polohu, že kdyby hodinová a minutová vyměnily navzájem své místo, ukazovaly by jiný správný čas. V kterou dobu to bylo?* *Týž.*

## Úloha 4.

*Kolik prvků dá o 441 kombinací s opakováním více než bez opakování a) ve 3tí třídě, b) v 5té třídě?* *Týž.*

## Úloha 5.

*Řešiti soustavu rovnic*

$$1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\ldots=\frac{2y+1}{y-1}$$
$$1-\frac{3}{y}+\frac{9}{y^2}+\frac{27}{y^3}+\ldots=\frac{x+1}{3x-2}.$$

*Týž.*

## Úloha 6.

*Určiti hodnotu součinu $\Pi\,.\,\Pi'$, znamená-li*

$$\Pi=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots$$
$$\Pi'=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$$

*R.*

## Úloha 7.

*Řešiti jest rovnici*

$$\sin 8x \cos 8x \cos 16x \cos 32x \cos 64x \cos 128x \cos 256x = -\frac{1}{64}$$

*R.*

## Úloha 8.

*Řešiti jest soustavu rovnic*

$$m \sin^4 x - n \sin^4 y = m$$
$$m \cos^4 x - n \cos^4 y = n.$$

*R.*

## Úloha 9.

*Dána jest kružnice $K$ a přímky $A$, $B$. Do kružnice $K$ vepsán trojúhelník $abc$ tak, že $bc \parallel A$, $ac \parallel B$. Jakou křivku obaluje třetí strana proměnného trojúhelníka $abc$? Které jest geometrické místo středů kružnic vepsaných do těchto trojúhelníků?*

Prof. *A. Strnad.*

## Úloha 10.

*Sestrojiti harmonický čtyřúhelník, dány-li délky tří jeho stran. (Harmonickým slove čtyřúhelník do kružnice vepsaný, jehož strany $a$, $b$, $c$, $d$ vyhovují podmínce $ac = bd$).*

*Týž.*

## Úloha 11.

*Buďtež $m$, $n$ kořeny rovnice $x^2 - px + q = 0$, kdež $q < 1$, a strany trojúhelníka*

$$a = (1 + m^2)\, n, \qquad b = (1 + n^2)\, m, \qquad c = (m + n)(1 - mn).$$

*Veličinami $p$, $q$ jest vyjádřiti: a) obsah trojúhelníka, b) jeho výšky, c) poloměr kružnice opsané, d) poloměr kružnice vepsané.*

*Týž.*

## Úloha 12.

*Při kterých podmínkách mezi $p$ a $q$ jest úhel proti straně $c$ v trojúhelníku úlohy předešlé a) $90^0$, b) $45^0$, c) $60^0$, d) $120^0$?*

*Týž.*

### Úloha 13.

*Ustanoviti součet dutých úhlů, jichž tangenty jsou kořeny rovnice*

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

prof. *A. Strnad.*

### Úloha 14.

*V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena výška cn a těžnice cm. Řešiti jest trojúhelník, dáno-li* $\overline{mn} = 24$, $tg\ \widehat{mcn} = \frac{1}{7}$.

*Týž.*

### Úloha 15.

*Přepona* $\overline{ab}$ *pravoúhlého trojúhelníka abc rozpůlena v bodě d. Řešiti trojúhelník, dán-li poloměr* $r_1 = 37{\cdot}5$ *kružnice opsané o* $\triangle$ *acd a poloměr* $r_2 = 50$ *kružnice opsané o* $\triangle$ *bcd.*

*Týž.*

### Úloha 16.

*Na jednom rameni úhlu 15° přenesena od vrcholu a úsečka* $\overline{ab} = m$; *pak vedeny od jednoho ramene ke druhému úsečky* $bc = cd \ldots = m$. *Ustanoviti jest obsah trojúhelníků abc, bcd, ... jakož i jich součet.*

*Týž.*

### Úloha 17.

*Značí-li a stranu pravidelného n-úhelníka, r poloměr kružnice opsané, jest dokázati relaci*

$$(a + r) : (a - r) = \mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{R}}{n} + \frac{\mathrm{R}}{6}\right) : \mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{R}}{n} - \frac{\mathrm{R}}{6}\right).$$

*Týž.*

### Úloha 18.

*Na průměru* $\overline{ab}$ *sestrojena polokružnice a poloměr* $\overline{om}$ *prodloužen do n o délku svoji (om = mn); spojnice* $\overline{bn}$ *protíná kružnici v bodě p. Dán-li* $\sphericalangle aom = \alpha$, *jest ustanoviti* $\sphericalangle onb$ *a* $\sphericalangle mop$.

*Týž.*

### Úloha 19.

*Řešiti trojúhelník, dány-li poloměry kružnic vně vepsaných*

$$\varrho_1 = 21, \qquad \varrho_2 = 24, \qquad \varrho_3 = 28.$$

Prof. *A. Strnad.*

### Úloha 20.

*Je-li v trojúhelníku $a < b$ a svírá-li těžnice $t_c$ s půdicí $c$ ostrý úhel $\delta$, jest dokázati, že*

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta).$$

*Týž.*

### Úloha 21.

*Pružná koule vržena z místa a proti stěně, od které se odrazivši narazila na kouli jinou v místě b. Jsou-li místa a, b vzdálena od stěny na 68 cm a 32 cm, a je-li $\overline{ab} = 111$ cm, jak velkou dráhu vykonala koule z a do b, a v kterém úhlu se odrazila od stěny?* *Týž.*

### Úloha 22.

*Les mající 424·8 ha výměry má podobu lichoběžníka, jehož větší půdice jest 2655 m, úhly k ní přilehlé jsou 77° 20′, 87°40′. Která jest výška tohoto lichoběžníka a druhá jeho půdice?*

*Týž.*

### Úloha 23.

*Řešiti jest dvoustředový čtyrúhelník (kružnici vepsaný a jiné kružnici opsaný), dána-li strana $a = 21$ a přilehlé k ní úhly*

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}.$$

*Týž.*

### Úloha 24.

*V čtyrúhelníku o kružnici poloměru $\varrho = 9·6$ opsaném stojí úhlopříčky $m = 40$, $n = 24$ na sobě kolmo. Dokázati, že čtyrúhelník ten jest deltoid a vypočítati jeho strany.* *Týž.*

## Úloha 25.

*Daným bodem vésti jest rovinu, která protíná čtyrhran daný v rovnoběžníku.* Prof. *A. Strnad.*

## Úloha 26.

*Dány jsou dva kolmé kužele tak, že střed základny jednoho jest vrcholem druhého a naopak. Jsou-li $r_1 = 60$, $r_2 = 40$ poloměry základen, $v = 75$ délka společné osy obou kuželů, jest vypočítati: a) poloměr kruhu, ve kterém se kužele pronikají, b) povrch i obsah tělesa pronikem tím vznikajícího.* *Týž.*

## Úloha 27.

*Mísa má kruhové dno poloměru 16 cm a oblou stěnu v podobě kulového pásu, jehož horní okraj má poloměr 24 cm. Výška jest 10 cm. Kolik vody vejde se do mísy, naplní-li se pouze do $^1/_2$ výšky?* *Týž.*

## Úloha 28.

*Dokažte, že přímky dané rovnicemi*

$$y = x, \qquad y + (2 \pm \sqrt{3})\, x = m$$

*omezují rovnostranný trojúhelník a ustanovte jeho obsah.*

*Týž.*

## Úloha 29.

*Trojúhelník abc mění se za těchto podmínek: vrchol a pohybuje se po přímce $A \equiv 5x + 6y - 30 = 0$, vrchol b po přímce $B \equiv 5x - 4y + 20 = 0$; strany bc, ca, ab otáčejí se kolem bodů $a'(-6, 0)$, $b'(9, 0)$, $c'(0, 0)$. Které jest geometrické místo vrcholu c?* *Týž.*