Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Bílek

O jedné kubické involuci v prostoru a jejím použití k stanovení počtu přímek na obecné kubické ploše

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 73 (1948), No. 4, D37--D42

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122821`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 73 (1949)

# ČLÁNKY A REFERÁTY

## O jedné kubické involuci v prostoru a jejím použití k stanovení počtu přímek na obecné kubické ploše.

Jan Bílek, Praha.

### I.

Předpokládejme, že $f = 0$ je rovnice obecné kubické plochy. Je známo, že obecná kubická plocha může mít jen konečný počet přímek.[1]) Lze tedy zvoliti na dané kubické ploše bod $O_4$, kterým nejde žádná přímka plochy $f = 0$. Zvolme dále libovolný bod $P$ v prostoru a spojme ho s bodem $O_4$ a stanovme zbývající průsečíky této spojnice s plochou $f = 0$. Nechť to jsou body $A$, $B$. Sestrojme dále na přímce $O_4P$ bod $P'$, který odděluje s bodem $P$ harmonicky dvojici bodů $A$, $B$.[2]) Vidíme takto, že každému libovolnému bodu $P$ v prostoru touto konstrukcí odpovídá jediný bod $P'$ a obráceně. Dostali jsme tak prostorovou involuci, jejíž stupeň ještě určíme.

Splyne-li bod $P$ s bodem $O_4$, pak všechny paprsky trsu se středem $O_4$ můžeme považovati za spojnici $O_4P$ a tedy podle známé vlastnosti první poláry bodu na ploše $f = 0$, bodu $O_4$ odpovídají všechny body první poláry bodu $O_4$ vzhledem k ploše $f = 0$. Bodu $O_4$ odpovídá tedy kvadratická plocha $f_4 = 0$, která se plochy $f = 0$ v bodě $O_4$ dotýká. Plocha $f_4 = 0$ protne plochu $f = 0$ v prostorové sextice $\omega_6$, která v bodě $O_4$ má dvojnásobný bod. Zvolíme-li $P$ na křivce $\omega_6$, pak s bodem $P$ splynou body $A$, $B$ a bod $P'$ může tedy býti libovolný bod spojnice $O_4P$. Odpovídá tedy bodu na křivce

[1]) V. d. Waerden: Einführung in die alg. Geometrie, pg. 150.

[2]) V dalším se nám objeví případy, kdy splynou základní body $A$, $B$, nebo jeden bod základní s jedním bodem z druhé dvojice. Pro dvojici bodů $C(x)$, $D(x')$, jež odděluje harmonicky dvojici $A(a)$, $B(-a)$ platí $xx' = a^2$. Počátek souřadnic v přímce $AB$ jsme volili ve středu úsečky $AB$. Když $x = a$, pak $x' = a$, což říká, že bodu $A$ odpovídá zase bod $A$. Když $a > 0$ je veličina nekonečně malá, pak z rovnice $xx' = a^2$ plyne, že bodu vně úsečky $AB$ odpovídá bod na úsečce $AB$. Proto zavedeme následující úmluvu: Když $A = B$, pak všechny body přímky $q$ jdoucí bodem $A$ můžeme považovati za čtvrtý harmonický bod k bodu $A$ vzhledem k základním bodům $A$, $B$.

$\omega_6$ spojnice tohoto bodu s bodem $O_4$. Křivce $\omega_6$ odpovídá podle toho kužel čtvrtého stupně, který promítá křivku $\omega_6$ z bodu $O_4$. Snadno nahlédneme, že jiných hlavních bodů není, neboť hlavní bod může vzniknouti, když 1. spojnice $O_4P$ je neurčitá, 2. průsečík spojnice $O_4P$ s plochou $f = 0$ je neurčitý, 3. čtvrtý harmonický bod $P'$ k bodu $P$ vzhledem k základním bodům $A$, $B$ je neurčitý. Druhý případ je vyloučen vzhledem k volbě bodu $O_4$. Plocha samodružných bodů této involuce je plocha $f = 0$.

Abychom našli stupeň naší involuce, stačí, když nalezneme její rovnice. Bod $O_4$ vezmeme za souřadnicový vrchol $O_4(0, 0, 0, 1)$. Souřadnice libovolného bodu na spojnici $O_4P'$ jsou dány rovnicemi

$$\varrho x_i = \lambda_1 x_i', \ i = 1, 2, 3, \ \varrho x_4 = \lambda_1 x_4' + \lambda_2 z_4, \text{ kde } z_4 = 1.$$

Poměr parametrů $\lambda_1 : \lambda_2$ pro body $A$, $B$ vypočítáme z rovnice

$$\lambda_1^3 f(x') + \lambda_1^2\lambda_2 z_4 f_4(x') + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2^2 z_4^2 f_{44}(x') + \lambda_2^3 f(z) = 0.$$

Poněvadž $O_4$ leží na ploše $f = 0$, tedy $f(z) = 0$ a předchozí rovnice se redukuje na

$$2\lambda_1^2 f(x') + 2\lambda_1\lambda_2 f_4(x') + \lambda_2^2 f_{44}(x') = 0. \qquad (1)$$

Kořen $\lambda_1 = 0$, který plynul z předchozí rovnice, odpovídá bodu $O_4$. Z rovnice (1) plyne

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-f_4(x') \pm \sqrt{f_4^2(x') - 2f(x') \cdot f_{44}(x')}}{2f(x')}.$$

Souřadnice bodu $A$ jsou

$$\varrho x_i = x_i' M, \ i = 1, 2, 3, \ \varrho x_4 = x_4' M + 2f(x'),$$

a souřadnice bodu $B$ jsou

$$\varrho x_i = x_i' \overline{M}, \ i = 1, 2, 3, \ \varrho x_4 = x_4' \overline{M} + 2f(x'),$$

kde $M$ je rovno čitateli ve výrazu pro $\lambda_1 : \lambda_2$ se znaménkem $+$ u druhé odmocniny a $\overline{M}$ pak se znaménkem $-$ u druhé odmocniny.

Vezměme nyní na spojnici $O_4P'$ za základní body $A$, $B$; souřadnice libovolného bodu jsou dány rovnicemi

$$\varrho x_i = x_i'(M\mu_1 + \overline{M}\mu_2),$$
$$\varrho x_4 = x_4'(M\mu_1 + \overline{M}\mu_2) + 2f(x')(\mu_1 + \mu_2).$$

Abychom dostali bod $P'$, musí $\mu_1 + \mu_2 = 0$, t. j. $\mu_1 = -\mu_2$. Bod $P$, který je harmonicky sdružen k bodu $P'$ vzhledem k bodům $A$, $B$, má souřadnice

$$\varrho x_i = x_i' f_4(x'), \ i = 1, 2, 3, \ \varrho x_4 = x_4' f_4(x') - 2f(x'). \qquad (2)$$

Rovnice (2) ukazují, že naše involuce je kubická. Snadno nahlédneme, že inversní rovnice k rovnicím (2) jsou formálně stejné.

Dosadíme-li do pravé strany souřadnice bodu $O_4$, dostaneme nuly; dosaďme proto do levé strany a ptejme se, kdy budou tyto rovnice splněny. Aby první tři rovnice byly splněny, stačí, když buď $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, nebo $f_4(x') = 0$. Ale první případ je vyloučen, neboť pak by také $\varrho x_4 = 0$, což je vyloučeno. Tedy zbývá druhý případ $f_4(x') = 0$. Zvolme nyní obecný bod $O_3$ na křivce $\omega_6$. Potom $f(0, 0, 1, 0) = 0$ a $f_4(0, 0, 1, 0) = 0$. Dosazení souřadnic bodu $O_3$ do rovnice (2) dává zase nuly. Proto dosaďme do levé strany a vidíme, že $f_4(x') \neq 0$ a tudíž $x_1' = x_2' = 0$. Snadno zjistíme, že dosadíme-li do poslední rovnice (2) $x_1' = x_2' = 0$, že je splněna. To však znamená, že bodu $O_3$ odpovídají všechny body přímky $O_3O_4$. Poněvadž bod $O_3$ je obecný bod na křivce $\omega_6$, platí tento výsledek pro každý bod křivky $\omega_6$. Z rovnic (2) snadno plyne, že plocha samodružných bodů je $f = 0$. Tím jsme potvrdili analyticky naše dřívější výsledky.

Hledejme nyní pomocí této involuce počet všech přímek obecné kubické plochy $f = 0$. Bodem $O_4$ položme rovinu a snadno zjistíme, že v této rovině nám naše involuce indukuje kubickou rovinnou involuci. Veďme bodem $O_4$ dvojnásob tečnou rovinu ke křivce $\omega_6$. V ní indukovaná rovinná involuce má křivku samodružných bodů rozpadlou na přímku a kuželosečku. Vede tedy taková rovina k přímce plochy $f = 0$. V rovině, určené tečnami křivky $\omega_6$ v bodě $O_4$, vzniká kubická involuce, jejíž křivka samodružných bodů je ireducibilní a má v $O_4$ dvojnásobný bod.[3]) Nechť obráceně přímka $p$ je přímkou plochy $f = 0$, která, podle předpokladu o bodu $O_4$, neprochází bodem $O_4$. Přímkou $p$ a bodem $O_4$ položme rovinu. V ní indukovaná rovinná involuce má křivku samodružných bodů rozpadlou na přímku a kuželosečku, které se protínají ve dvou bodech. Je známo, že tento případ nastane tehdy a jen tehdy, když dva a dva hlavní jednoduché body vzniklé rovinné involuce splynou. Z toho dále plyne, že rovina $(O_4p)$ je dvojnásob tečnou rovinou vedenou z bodu $O_4$ ke křivce $\omega_6$. Obráceně každá taková rovina vede k přímce plochy $f = 0$. Jest tedy stanovení počtu všech přímek plochy $f = 0$ převedeno na stanovení počtu všech dvojnásob tečných rovin křivky $\omega_6$ vedených z bodu $O_4$. Tuto úlohu převedeme na stanovení dvojnásob tečných rovin kužele promítajícího křivku $\omega_6$ z bodu $O_4$, a tuto úlohu zase převádíme na stanovení dvojnásobných tečen rovinné kvartiky, v níž nám seče obecná rovina uvedený kužel. Takto vzniklá rovinná kvartika je rodu 3, neboť z $O_4$ nelze vésti přímku, která by křivku $\omega_6$ protala v dalších dvou bodech. Neboť kdyby to bylo možné, pak by tato přímka měla s plochou $f = 0$ 4 společné průsečíky a byla by přímkou plochy jdoucí bodem $O_4$, což je proti předpo-

[3]) Hudson: Cremona transf. pg. 117.

kladu. Je známo, že rovinná kvartika rodu 3 má 28 dvojnásobných tečen. Avšak tečna, jež leží v rovině určené tečnami křivky $\omega_6$ v bodě $O_4$, nevyhovuje. Dostáváme tak známý výsledek:

Kubická obecná plocha obsahuje 27 přímek.

Zbývalo by nám zkoumání vzájemné polohy těchto přímek. ale tuto věc provedeme jinak. Upozorněme ještě, že obecné rovině v uvažované prostorové involuci odpovídá kubická plocha s jedním konickým bodem v $O_4$. Snadno pomocí naší involuce ukážeme. že bodem $O_4$ prochází 6 přímek této opovídající plochy a že existuje ještě dalších 15 přímek. Pro jednoduchost od toho upouštíme.

## II.

Pozorujme nyní případ, kdy bod $O_4$ zvolíme na přímce plochy $f = 0$ tak, že bodem plochy $O_4$ prochází jediná přímka plochy. Podstatně vše zůstává jako v odst. I., toliko na zvolené přímce nastává změna. Volíme-li totiž bod $P'$ na zvolené přímce $O_3O_4$, pak každou dvojici bodů na ní můžeme pokládat za dvojici $A$, $B$ z odst. I. a tedy každému bodu $P'$ na $O_3O_4$ odpovídají všechny body přímky $O_3O_4$. Snadno nahlédneme, že hlavní kvadrika $f_4 = 0$ obsahuje také přímku $O_3O_4$ a tedy křivka $\omega_6$ se rozpadne na prostorovou kvintiku $\omega_5$ a přímku $O_3O_4$. Poněvadž žádáme, aby $f = 0$ obsahovala přímku $O_3O_4$, lze její rovnici psáti $x_1A + x_2B = 0$, kde $A$, $B$ jsou kvadratické formy proměnných. Potom $f_4 = x_1A_4 + x_2B_4 = 0$, z čehož vidíme, že $f_4(x) = 0$ obsahuje také přímku $x_1 = x_2 = 0$. Napišme si nyní rovnici tečné roviny v bodě $(0, 0. y_3, y_4)$ jak k ploše $f_4 = 0$, tak k ploše $f = 0$. Jejich rovnice jsou

$$\Sigma x_i f_{4i}(y) = 0, \quad \Sigma x_i f_i(y) = 0.$$

Ptejme se, v kolika bodech přímky $O_3O_4$ mohou tyto dvě tečné roviny splynouti. Z této podmínky plyne rovnice

$$f_1(y)f_{42}(y) - f_2(y)f_{41}(y) = 0,$$

jež je homogenní rovnicí třetího stupně pro $y_3 : y_4$. Dostáváme tak výsledek, že přímka $O_3O_4$ vedle bodů $O_3$, $O_4$ protíná ještě v jednom bodě kvintiku $\omega_5$. Dokážeme, že bodem $O_4$ neprochází další přímka, která by $\omega_5$ protťala ještě ve dvou dalších bodech. Kdyby taková přímka existovala, byla by nutně přímkou plochy $f_4 = 0$ a rovina určená touto přímkou a $O_3O_4$ by byla tečnou rovinou plochy $f_4 = 0$ v bodě $O_4$ a tedy také plochy $f = 0$, ale pak by byla přímkou plochy $f = 0$, majíc s ní společné čtyři průsečíky a bodem $O_4$ by procházely dvě přímky plochy $f = 0$, což je proti předpokladu.

V každé rovině svazku o ose $O_3O_4$ indukuje naše involuce kvadratickou inversi. Když se kuželosečka této inverse rozpadne, dostaneme další dvě přímky plochy $f = 0$, které protínají přímku

$O_3O_4$. Svazek rovin vytne na $\omega_5$ lineární soustavu $g_2^1$ se šesti dvojnásobnými body, neboť křivka $\omega_5$ je rodu 2, majíc jeden zdánlivý dvojnásobný bod. Avšak rovina určená $O_3O_4$ a tečnou kvintiky v bodě $O_4$ je oskulační rovinou kvintiky $\omega_5$ v bodě $O_4$. V této rovině vznikne kvadratická inverse se třemi splývajícími hlavními body, u níž se kuželosečka samodružných bodů nerozpadne.[4]) Zbývá nám pět rovin jdoucích přímkou $O_3O_4$, v nichž vznikne kvadratická inverse s rozpadlou kuželosečkou. Tento výsledek lze vysloviti takto:

Každou přímkou obecné kubické plochy lze položiti pět rovin, v nichž se zbývající průsečná kuželosečka rozpadne na dvě různé přímky.

Degeneraci kuželosečky v různé přímky snadno nahlédneme, když uvážíme, že v případě dvojnásobné přímky by uvažovaná rovina byla společnou tečnou rovinou podél celé této přímky a každému bodu této přímky by odpovídaly všechny body přímky, která jej spojuje s bodem $O_4$, čili $\omega_5$ by se musila rozpadnout na další přímku, což nenastane.

Dostali jsme již 11 přímek dané kubické plochy $f = 0$. Podobně jako v odst. I. vyšetříme počet dvojnásob tečných rovin vedených z $O_4$ ke křivce $\omega_5$. Stejnou úvahou jako v odst. I. převedeme tuto úlohu na stanovení počtu dvojnásobných tečen rovinné kvartiky rodu 2. Je známo, že tato kvartika má 16 dvojnásobných tečen a tudíž kubická plocha $f = 0$ má 27 přímek. Žádná z nalezených šestnácti přímek nemůže protnouti přímku $O_3O_4$. Dokážeme, že žádná z těchto šestnácti přímek nemůže procházet singulárním bodem průsečné kuželosečky, jež leží v některé z pěti dříve uvažovaných rovin jdoucích $O_3O_4$. Předpokládejme, že by taková jedna přímka $p$ bodem singulárním $Z$ procházela. Pak jsou dvě možnosti; buď $Z$ leží mimo dotykové body roviny $(O_4p)$ a pak by $\omega_5$ protťala rovinu $(O_4p)$ v šesti bodech, což je vyloučeno, nebo bod $Z$ splyne s některým bodem dotyku roviny $(O_4p)$. V tomto případě jak rovina $(O_4p)$, tak rovina kuželosečky s dvojnásobným bodem $Z$ by obsahovaly tečnu kvintiky v bodě $Z$ a tudíž by splynuly a přímka $p$ by protťala $O_3O_4$, což je nemožné. Z toho plyne:

U obecné kubické plochy žádné tři přímky neprocházejí jedním bodem.

Označme si jednu ze šestnácti přímek dříve obdržených $b_1$ a přímku $O_3O_4$ označme $a_1$. Pak víme, že $a_1$, $b_1$ jsou mimoběžné. Přímka $b_1$ protne pět význačných rovin jdoucích $a_1$, musí proto protnouti jednu přímku v ní ležící a druhá přímka je pak k $b_1$ mimoběžná. Takto získaných pět přímek mimoběžných k $b_1$ označme $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$. Rovina $(a_1b_i)$, $i = 2, \ldots, 6$ protne kubickou

[4]) Hudson: Crem. transf. pg. 54.

plochu $f = 0$ v přímce $c_i$, která je příčkou přímek $a_1$, $b_1$. Ze způsobu vyšetřování plyne, že funkci přímek $a_1$, $b_1$ můžeme zaměnit. Tedy položme rovinu $(c_i b_1)$ a ta protne plochu $f = 0$ ještě v přímce $a_i$, jež je mimoběžná k $a_1$ a k $b_i$. Přímka $a_i$ nemůže však protnout žádnou $c_k$, kde $k \neq i$, neboť by se kubická plocha rozpadla a tedy $a_i$ neprotne $b_i$ a protne $b_k$, $i \neq k$. Dostáváme tak 12 přímek

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,$$

jež tvoří známou dvojšestici. Další vlastnosti konfigurace 27 přímek nechme stranou.

Analytické vyjádření této involuce bychom dostali z rovnic (2).

## III.

Volme nyní bod $O_4$ v průsečíku dvou přímek obecné kubické plochy. Plocha $f_4 = 0$ protne plochu $f = 0$ v degenerované sextice, jež se skládá z dvojice přímek, jež se protínají v bodě $O_4$ a z prostorové kvartiky I. druhu a přímky uvažované, jsou bisekantami prostorové kvartiky, vedené z bodu $O_4$. Tato kubická involuce má $O_4$ za hlavní bod druhého řádu prvního druhu, prostorovou kvartiku a dvě přímky bodů prvního řádu druhého druhu. Kvartikou prvního druhu lze položiti svazek kvadrik, který má tuto kvartiku za basi. Označíme-li rovnice základních kvadrik $h = 0$, $g = 0$, pak $f_4 = 0$ lze psáti $bh(x) - ag(x) = 0$, kde $a$ je koeficient u $x_4^2$ v $h(x)$, $b$ u $x_4^2$ ve formě $g(x)$. Podle Hilbertovy věty o nulových bodech za předpokladu, že prostorová kvartika je jednoduchá, lze rovnici kubické plochy $f = 0$ psáti ve tvaru

$$f = h(x)m(x) + g(x)n(x),$$

kde $m$, $n$ jsou lineární formy. Plocha $f = 0$ prochází bodem $O_4$ a z toho plyne, že $am_4 + bn_4 = 0$, kde $m_4 = \frac{\partial m}{\partial x_4}$ a podobně $n_4$. Odtud plyne $a : b = - n_4 : m_4$. Vypočítejme nyní $f_4 = h_4 m + hm_4 + g_4 n + gn_4 = h_4 m + g_4 n + \varrho(bh - ag) = 0$. Z toho plyne, že $h_4 m + g_4 n = 0$. Z poslední rovnice plyne $h_4 : g_4 = - n : m$. Rovnici plochy $f = 0$ lze pak psáti $hg_4 - gh_4 = 0$. Rovnice (2) pak mají tvar

$$\begin{aligned} \varrho x_i &= x_i'[bh(x') - ag(x')], \; i = 1, 2, 3, \\ \varrho x_4 &= x_4'[bh(x') - ag(x')] - 2[h(x')g_4(x') - g(x')h_4(x')]. \end{aligned} \tag{3}$$

Rovnice (3) však vyjadřují kubickou involuci, kterou můžeme vytvořiti takto: volíme obecný bod $P'$, jím je ve svazku kvadrik jdoucích prostorovou kvartikou určena jediná kvadrika. Tato protne spojnici $O_4P'$ ještě v bodě $P$ a dvojice bodů $P$, $P'$ je homologickou dvojicí v naší involuci. O této involuci a její degeneraci chystá autor pojednání.