Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Kadeřávek

Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D46--D49

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122815`

a dostáváme tak

$$\tfrac{1}{2}(1 + k)\,.\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_0^2}.$$

Mění-li se tedy v, zůstává

$$k = \frac{1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) - \eta^2(v)} = \frac{x^2 + u^2}{z^2 - y^2}$$

konstantní. — Tím důkaz toho, co tvrdíme na začátku tohoto článku, proveden.

Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně.

Dr **František Kadeřávek**, Praha.

Sestrojme k elipse k (obr. 1), dané osami p, q a tečnou t s bodem dotyku K, normálu n. Platí tu vztahy

$$\overline{SK'}\,.\,\overline{ST} = a^2;\ \overline{SN}\,.\,\overline{ST} = e^2,$$

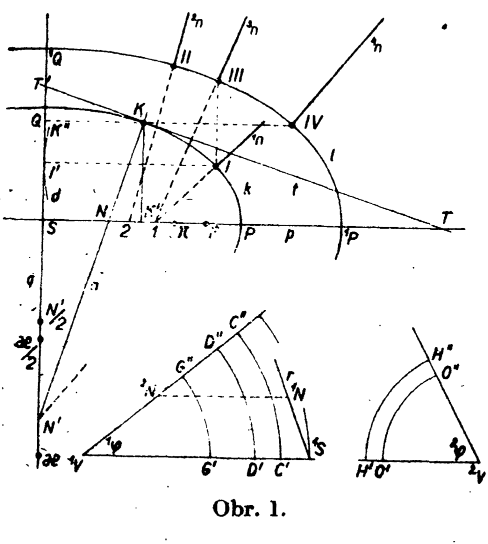
z čehož

$$\overline{SN} : \overline{SK'} = e^2 : a^2 = (a^2 - b^2) : a^2 = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) : a,$$

kde a, b, e jsou délky poloos a lineární výstřednost křivky k. Hodnota

$$a - \frac{b^2}{a}$$

je vzdálenost středu křivosti π pro vrchol P od středu křivky. Platí tedy věta, že *poměr vzdálenosti bodu elipsy od vedlejší osy k vzdálenosti průsečíku normály téhož bodu s osou hlavní je hodnota stálá, rovná poměru hlavní poloosy k vzdálenosti středu křivosti na ní položeného od středu křivky.*



Obr. 1.

Sestrojíme-li redukční úhel ${}^1\varphi$ o vrcholu ${}^1V$, který délku $a = {}^1VC'$

zkracuje na délku $S\pi = \overline{C'C''}$, můžeme bez jakýchkoli čar rýsovati normály křivky k. Tak normálu v bodě I vyhledáme takto: Kružítkem naměřenou vzdálenost II' od vedlejší osy — bez rýsování kružnice d i kolmice II'! — zredukujeme na úhlu ${}^1\varphi$ na úsečku $D'D''$, kterou naneseme na p od středu S do bodu 1. Spojnice $I1$ je hledaná normála. Tentýž úhel ${}^1\varphi$ řeší normály i pro elipsy podobné k elipse k. Tak pro křivku l soustřednou k dané elipse k vyšetřena normála ${}^2n$ v bodě II za pomoci bodu 2, kde $\overline{S2} = \overline{G'G''}$ je zredukovanou délkou vzdálenosti bodu II od osy q. Normála ${}^3n$ křivky l v bodě III položeném v téže odlehlosti od osy q jako bod I křivky k jde bodem 1. Je z toho patrno, že *normály soustředných a homothetických elips v bodech položených na rovnoběžce s vedlejší osou procházejí jediným bodem na hlavní ose.*

Totéž, co jsme odvodili pro hlavní osu platí i pro osu vedlejší. Poměr vzdálenosti bodu K křivky k od hlavní osy p ke vzdálenosti průsečíku příslušné normály s vedlejší osou od středu S je stálý a rovný poměru poloosy vedlejší b k vzdálenosti středu křivosti $\varkappa$ pro vrchol Q od středu křivky. Tento poměr je zpravidla větší než jednotka a proto si tu pořizujeme redukční úhel ${}^2\varphi$ pouze pro díl vzdálenosti průsečíku normály s vedlejší osou od středu S; v uvažovaném případě byl sestrojen pro polovinu této úsečky. Pro bod IV křivky l vyhledána normála tak, že na úhlu ${}^2\varphi$ byla zredukována vzdálenost bodu IV od osy p, výsledek $O'O''$ redukce nanesen na q od S dvakrát do bodu N' a $N'IV$ je hledanou normálou ${}^4n$. I tu platí, že *normály homothetických a soustředných elips v bodech položených na rovnoběžce s osou hlavní jdou jediným bodem na ose vedlejší.*

Označíme-li poměr hlavní poloosy k vedlejší vztahem $a = b\sqrt{\lambda}$, je hodnota poměru

$$\overline{KK''} : \overline{NS} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

a hodnota poměru

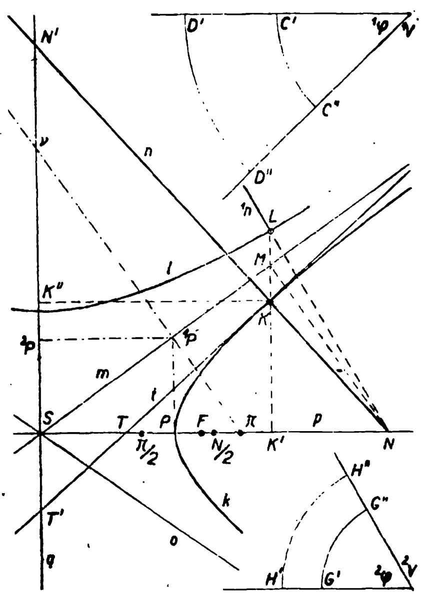
$$\overline{KK'} : \overline{N'S} = \frac{-1}{\lambda - 1}.$$

Je tedy pro elipsu o poměru poloos $a : b = \sqrt{2} : 1$

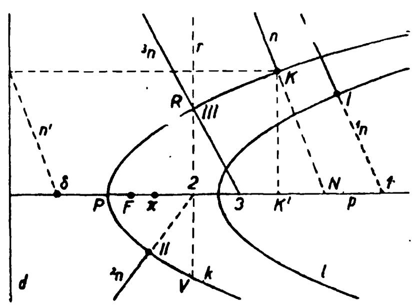
$$\overline{NS} = \tfrac{1}{2}\overline{KK''} \text{ a } \overline{N'S} = -\overline{KK'},$$

obdobně pro elipsy, pro něž $a = b\sqrt{3}, \ldots$

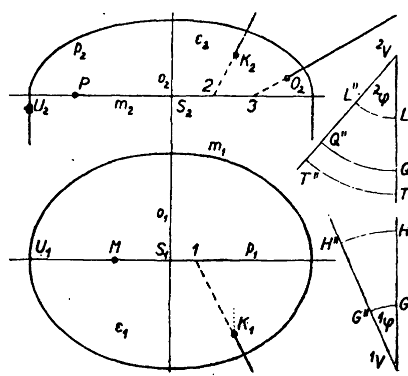
Konstrukce, které jsme dokázali pro elipsu, můžeme sledovati i u hyperboly (obr. 2). Poměr $\overline{KK''} : \overline{NS}$ je stálý a rovný poměru $\overline{PS} : \pi S$, kde π je střed křivosti vrcholu P. Ježto tento vztah platí i pro soustředné a homothetické hyperboly, vidíme, že normálu n v bodě K získáme, vztyčíme-li v průsečíku M rovnoběžky KM, vedené k vedlejší ose, s asymptotou m k této asymptotě kolmici. Jejím průsečíkem N s hlavní osou jde žádaná normála. Zpravidla poměr $\overline{PS} : \overline{\pi S}$ je téhož druhu, jako byl při vedlejší.ose elipsy, a užíváme proto dílu úsečky $\overline{NS}$; v obraze byl sestrojen redukční úhel pro polovinu úsečky $\overline{NS}$. Pro osu vedlejší je poměr $\overline{KK'} : \overline{N'S} = {}^2\overline{PS} : \overline{\nu S}$; $\nu^1 P\pi$ je kolmice k asymptotě m. I tu musíme zpravidla používati jen dílu úsečky $\overline{N'S}$; úhel ${}^2\varphi$ byl sestrojen pro třetinu úsečky $\overline{N'S}$. Z uvedených vztahů vyplývá pro rovnoosou hyperbolu, že její



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

subnormála pro bod K na hlavní ose rovná se vzdálenosti bodu K od vedlejší osy, a dále, že průsečík N' normály n bodu K s vedlejší osou q je od středu S ve dvojnásobné vzdálenosti bodu K od hlavní osy.

Uvedenými vztahy lze řešiti i úlohu: *Bodem na ose vésti k dané elipse (hyperbole) normály.* Tak pro bod N na ose p (obr. 1) naneseme

$\overline{SN} = \overline{{}^1S^1N}$ na $r \parallel C'C''$; bodem ${}^1N$ vedená přímka ${}^1N{}^2N \parallel {}^1V{}^1S$ dává bod ${}^2N$ a $\overline{{}^2N{}^1V} = \overline{SK'}$.

Chceme-li obdobu pro shodné a souosé paraboly o ose p (obr. 3), vytkneme si bod δ a od něho ve vzdálenosti parametru kolmici d k ose. Kolmici n v bodě K bez rýsování pomocných čar vyhledáme takto: Naměříme vzdálenost bodu K od d, naneseme od δ na p do bodu N a $\overline{NK}$ je žádaná normála křivky k, stejně pro křivku 1 stanovena v 1 normála. Chceme-li v bodě 3 sestrojiti normálu, učiníme $\overline{3\delta}$ rovné vzdálenosti přímky r od d; V, R jsou žádané paty.

Je-li na příklad dána elipsoidální klenba o líci v ploše ε (obr. 4), sestrojíme si kdekoliv redukční úhly ${}^1\varphi$ o vrcholu ${}^1V$ pro poměr ${}^1\lambda = \overline{U_1S_1} : \overline{MS_1}$ a ${}^2\varphi$ o vrcholu ${}^2V$ pro poměr ${}^2\lambda = \overline{U_2S_2} : \overline{PS_2}$, kde M a P jsou středy hlavních křivostí řezů m a p. Pro bod K vyšetříme normálu tím, že na m_2 od S_2 do bodu 2 naneseme na ${}^2\varphi$ redukovanou vzdálenost $K_2 \dashv o_2$ a na p_1 od S_1 do bodu 1 na úhlu ${}^1\varphi$ redukovanou vzdálenost $K_1 \dashv o_1$. $1K_1$ je půdorys, $2K_2$ je nárys požadované normály. Nárys i půdorys lze stanoviti neodvisle; tak byl pro bod O plochy ε sestrojen pouze nárys $3O_2$ za pomoci redukčního úhlu ${}^2\varphi$.

Uvedené konstrukce jsou výhodné zejména tím, že jsou velmi stručné a nezatěžují nákresnu pomocnými čarami vůbec.

Odhad prosté hodnoty integrálů a kriteria pro konvergenci nevlastních integrálů.

Jan Mařík, Praha.

Úvod. Mějme reálnou funkci f, definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$. Systém čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ (n je přirozené číslo ≥ 1), splňující vztah $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, nazveme dělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Každému dělení přiřaďme číslo $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Je-li množina těchto čísel shora ohraničená, řekneme, že funkce f má v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci. Supremum té množiny označíme $V(a, b)$ a nazveme je variací f v $\langle a, b\rangle$. Podobně definujeme $V(x_1, x_2)$, kde $a < x_1 < x_2 < b$. Bez důkazu uvádím, že platí $V(a, x_1) + V(x_1, x_2) = V(a, x_2)$. Je tedy $V(a, x)$ neklesající funkcí proměnné x. Dále uvádím bez důkazu, že funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$ má tam integrál Cauchy-Riemannův.

Věta 1. *Mějme interval $\langle a, b\rangle$. V tomto intervalu mějme reálné funkce f, g; funkci f integrovatelnou a funkci g s kon. variací V. Pak*