Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D61--D63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122814

ÚLOHY

Řešení úloh o determinantech, Časopis 72, str. D15-D16.

Úloha 1. Budiž D_m ($m \geq 1$) determinant m-tého stupně, jehož $(2i+1)$-ní a $(2i+2)$-há řádka jsou

$$\begin{matrix} 0, a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, \ldots \\ a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, a_4^i, \ldots \end{matrix} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že

$$D_{2n+1} = 0, \quad D_{2n} = (-1)^n \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2. \tag{1}$$

Úloha 2. Budiž D'_m ($m \geq 1$) determinant m-tého stupně, jehož $(2i+1)$-ní a $(2i+2)$-há řádka jsou

$$\begin{matrix} a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, a_4^i, \ldots \\ 0, a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, \ldots \end{matrix} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= (-1)^n D_{2n}, \\ D'_{2n+1} &= (-1)^n \prod_{1 \leq \lambda \leq n} (a_\lambda - a_{n+1}) \,.\, \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

(T. zv. prázdné součiny značí jedničku, takže v (1), (2) je nutno čísti na př. $D_2 = -1$, $D_1' = 1$, $D_3' = a_2 - a_1$.)

Úloha 3. Budiž Δ_{2n} ($n \geq 1$) determinant stupně $2n$, jehož první řádka jest

$$\sin k_1 s, \cos k_1 s, \sin k_2 s, \cos k_2 s, \ldots, \sin k_n s, \cos k_n s,$$

a jehož ostatní řádky obdržíme z první postupně první, druhou, ..., $(2n-1)$-ní derivací podle s. Dokažte:

Δ_{2n} nezávisí na s, načež z (1) dostanete

$$\Delta_{2n} = (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_n \,.\, \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (k_\mu^2 - k_\nu^2)^2.$$

Dr *M. Sypták.*

Řešení. (Zaslal p. Jiří Sedláček, Kutná Hora.)

Řešení úlohy 1. Determinant $D_{2n+1} = 0$, neboť každý z jeho $(2n + 1)!$ členů je roven 0. Nelze totiž najít člen, jenž by byl různý od 0. Chci-li z každého lichého sloupce, kterých je $n + 1$, vzít jeden prvek nenulový, vidím, že to není možné, neboť ve sloupci není víc než n prvků různých od 0 a člen je součinem prvků, z nichž žádné dva nejsou z téže řady.

Důkaz tvrzení

$$D_{2n} = (-1)^n \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2$$

provedeme úplnou indukcí. Tvrzení platí pro $n = 1$, neboť $D_{2n} = -1$. Předpokládejme teď, že je máme dokázáno pro $D_{2(n-1)}$, t. j. že platí

$$D_{2(n-1)} = (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n-1} (a_\mu - a_\nu)^2.$$

V determinantu D_{2n} nechme první dvě řádky beze změny a od každé x-té ($x = 3, 4, \ldots, 2n$) odečtěme řádku $(x - 2)$-hou, znásobenou a_n. Všimněme si, že v posledních dvou sloupcích nového determinantu jsou samé nuly (až na první dva řádky beze změny ponechané), a rozveďme tedy determinant podle těchto sloupců (Laplace). Dostáváme po úpravě:

$$D_{2n} = -(a_1 - a_n)^2 (a_2 - a_n)^2 \ldots (a_{n-1} - a_n)^2 D_{2n-2} =$$
$$= (-1)^n \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2.$$

Tím je důkaz indukcí proveden.

(Jednodušší se zdá být následující postup: Vzájemnou výměnou řádků pořiďme si tento determinant:

$$\begin{vmatrix} 0, & a_1^0, & 0, & a_2^0, & 0, & \ldots, & 0, & a_n^0 \\ 0, & a_1^1, & 0, & a_2^1, & 0, & \ldots, & 0, & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & a_1^{n-1}, & 0, & a_2^{n-1}, & 0, & \ldots, & 0, & a_n^{n-1} \\ a_1^0, & 0, & a_2^0, & 0, & a_3^0, & \ldots, & a_n^0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1}, & 0, & a_2^{n-1}, & 0, & a_3^{n-1}, & \ldots, & a_n^{n-1}, & 0 \end{vmatrix}$$

Při rozvádění podle prvých n řádků (Laplace) vidíme, že je — nehledě ke znaménku — roven čtverci determinantu Vandermondova V_n. Práci si tu musíme dát jen s určením znaménka.)

Řešení úlohy 2. Vyměníme-li v D_{2n} každou lichou řádku za následující sudou (n výměn), dostanem D'_{2n}. Je tedy $D'_{2n} = (-1)^n D'_{2n}$.

Hodnotu D_{2n+1} potvrdíme úplnou indukcí. Postup je analogický případu D_{2n} ad 1. řešenému: První dvě řádky tu necháme beze změny a od x-té ($x = 3, 4, \ldots, 2n + 1$) odečteme ($x - 2$)-hou, násobenou a_{n+1}.

(Nehledě na znaménko, je možno D'_{2n+1} psát jako součin dvou determinantů Vandermondových $V_n \,.\, V_{n+1}$, čehož dosáhneme opět vhodnou, opětovanou výměnou řádků a užitím věty Laplaceovy.)

Řešení úlohy 3. Připomeňme, že $2m$-tý řádek z Δ_{2n} začíná

$$(-1)^{m-1}\, k_1^{2m-1} \cos k_1 s, \;\; (-1)^m\, k_1^{2m-1} \sin k_1 s, \; \ldots$$

a řádek $(2m + 1)$-ní

$$(-1)^m\, k_1^{2m} \sin k_1 s, \;\; (-1)^m\, k_1^{2m} \cos k_1 s, \; \ldots$$

Ukážeme teď, že (řádkový) čtverec determinantu Δ_{2n} nezávisí na s_1. Součin dvou řádků téže parity má totiž tvar

$$(-1)^e\, (k_1^e + k_2^e + \ldots)$$

a jiný řádkový součin je nula. Pro dvě různá s (jakákoliv) má tedy Δ_{2n} touž abs. hodnotu a protože je spojitou funkcí s, má i totéž znaménko.

Položíme-li $s = 0$, je (po vytknutí Πk_i) Δ_{2n} tvaru D_{2n} a poslední vzorec je tedy správný.
