Vladimír Ryšavý

Dvě eliptické kubatury

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D52--D56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122812

konečnou variaci $V(a, c)$ *a platí* $V(a, c) < B$. *Budiž* $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0$ (*resp.* $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$). *Pak existuje vlastní nebo nevlastní integrál* $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$.

Důkaz. (Výraz lim znamená buď $\lim\limits_{x \to b-}$ nebo $\lim\limits_{x \to \infty}$.) Protože je $V(a, x)$ neklesající a ohraničená funkce x, existuje $\lim V(a, x) = \sup V(a, x)$; označíme je V. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $c_1 < b$ tak, že $c_1 < x < b \Rightarrow V - V(a, x) < \frac{\varepsilon}{4A}$. Protože jest $\lim g(x) = 0$, existuje $c_2 < b$ tak, že $c_2 < x < b \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4A}$. Budiž $c_0 = \max(c_1, c_2)$. Pak $c_0 < x_1 < x_2 < b \Rightarrow$ existuje ξ, že platí $x_1 \leqq \xi \leqq x_2$,

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqq (V(x_1, x_2) + |g(x_2)|) \cdot \left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)\, dx\right|.$$

Platí $0 \leqq V(x_1, x_2) = V(a, x_2) - V(a, x_1) \leqq V - V(a, x_1) < \frac{\varepsilon}{4A}$.

Rovněž platí $|g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4A}$, tedy $V(x_1, x_2) + |g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2A}$. Dále jest $\left|\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)\, dx\right| = \left|\int\limits_a^{\xi} f(x)\, dx - \int\limits_a^{x_1} f(x)\, dx\right| < 2A$. Násobením nerovností dostáváme $\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, dx\right| < \varepsilon$. Je tedy opět splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci integrálu.

Dvě eliptické kubatury.

Dr **Vladimír Ryšavý**, Praha.

Uvádíme dva příklady kubatury těles obsahující integrály eliptických funkcí.

A) Určiti objem tělesa uzavřeného obalovou plochou koulí, jejichž středy leží na elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a jež jdou počátkem.

Rovnice plochy jest

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(a^2x^2 + b^2y^2),$$

ve sférických souřadnicích

$$r = 2 \sin\gamma \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Objem

$$V = 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\gamma \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{r} \varrho^2 \sin\gamma \, d\varrho =$$

$$= \tfrac{64}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \, (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4\gamma \, d\gamma =$$

$$= \tfrac{64}{3} \, \tfrac{3}{16}\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \sin^2\varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

pro

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

$$V = 4\pi a^3 \left[E - k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi \right].$$

α) Pro $a = b$, $k = 0$, $E = \frac{1}{2}\pi$ jest $V = 2\pi^2 a^3$ shodně s Guldinovým pravidlem.

β) Pro $b = 0$, $k = 1$, $E = 1$ jest $V = \frac{8}{3}\pi a^3$, neboť těleso přechází ve dvě shodné koule v dotyku.

γ) V případě $a > b$, $k < 1$, je třeba stanoviti hodnotu integrálu. Užijeme-li substituce $\sin\varphi = \operatorname{sn} u$, $\cos\varphi \, d\varphi = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du$, jest

$$I = k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi = k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi - k^2 \sin^4\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \, d\varphi =$$

$$= k^2 \int_0^{K} (\operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^4 u) \, du,$$

$$\int_0^{K} (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \, du = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi = E,$$

odkud

$$k^2 \int_0^{K} \operatorname{sn}^2 u \, du = K - E.$$

Provedením derivace výrazu $\frac{d}{du} (\operatorname{sn}^{2n-3} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)$ a integrací výsledku jest

$$(2n-1)\,k^2\int \mathrm{sn}^{2n}\,\mathrm{d}u = \mathrm{sn}^{2n-3}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - (2n-3)\,.$$
$$.\int \mathrm{sn}^{2n-4}\,u\,\mathrm{d}u + (2n-2)(1+k^2)\int \mathrm{sn}^{2n-2}\,u\,\mathrm{d}u,$$

odkud

$$3k^2\int_0^K \mathrm{sn}^4\,u\,\mathrm{d}u = 2(1+k^2)\frac{K-E}{k^2} - K =$$
$$= \frac{2K + k^2K - 2(1+k^2)E}{k^2}$$

a

$$I = K - E - \tfrac{1}{3}[2(1+k^2)(K-E) - k^2K] =$$
$$= \tfrac{1}{3}[K - E - k^2(K-2E)].$$

Konečně

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3\,[2E(2-k^2) - K(1-k^2)].$$

B) Plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2b^2\,\dfrac{x^2+y^2}{a^2x^2+b^2y^2}$ má ve sférických souřadnicích rovnici $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$. Její rovinné řezy osou z jsou kružnice se středem v počátku a s poloměrem rovným poloměru elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ vytvořenému onou rovinou. Objem tělesa plochou uzavřeného jest po úpravě

$$V = \tfrac{8}{3}a^3b^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{8}{3}b^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

pro

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} < 1.$$

α) Užijeme-li ve druhém integrálu I opět substituce $\sin\varphi = \mathrm{sn}\,u$, máme

$$I = \int_0^K \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dn}^2\,u} = \frac{1}{k'^2}\int_0^K \mathrm{dn}^2(u+K)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k'^2}\int_0^K \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u = \frac{E}{k'^2}.$$
$$[k'^2 = 1 - k^2].$$

β) Téhož výsledku dojdeme použitím vztahu $\mathrm{cn}(K-u) = k'\,\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$ a úpravou

$$I = \int_0^K \frac{\mathrm{dn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}{\mathrm{dn}^2\,u}\,\mathrm{d}u = K + \frac{k^2}{k'^2}\int_0^K [1 - \mathrm{sn}^2(K-u)]\,\mathrm{d}u.$$

γ) K výpočtu našeho omezeného integrálu je možné užíti též integrálu neúplného, všimneme-li si vztahu

$$k^2\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right)' = \operatorname{dn}^2 u - k'^2 \frac{1}{\operatorname{dn}^2 u},$$

odkud plyne integrací a uspořádáním

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{1}{k'^2}\left[E_u(k) - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right]$$

neboli

$$\int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k'^2}\left[E(k, \varphi) - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\right].\ *)$$

Odtud pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jest $I = \dfrac{E}{k'^2}$.

δ) Integrál $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$ lze též počítati derivací integrálu $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} K$ podle parametrů a, b. Značíme-li odmocninu ve jmenovateli R, jest

$$I_2 = -\frac{1}{a}\frac{\partial I_1}{\partial a} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi}{R^3} = -\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a^2} K - \frac{b^2}{a^4 k}\frac{\partial K}{\partial k}\right].$$

Dosadíme-li za $\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial K}{\partial k} = \dfrac{E - k'^2 K}{k^2 k'^2}$ (viz Petr l. c.), máme

$$I_2 = \frac{1}{a^3}\frac{K - E}{k^2}.$$

Obdobně dostáváme pro $I_3 = -\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial I_1}{\partial b} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi}{R^3} = \frac{1}{a^3}\frac{1}{k}\frac{\partial K}{\partial k}$,

$$I_3 = \frac{1}{a^3}\frac{E - k'^2 K}{k^2 k'^2}.$$

*) Tím je dokázána formule v Petrově „Integrálním počtu“, I. vydání z r. 1915, str. 327 s opravením tiskové chyby.

Sečtením

$$I_0 = I_2 + I_3 = \frac{1}{a^3}\frac{E}{k'^2}.$$

Užijeme-li výsledku z α) nebo γ), jest tím naopak výraz pro $\frac{1}{k}\frac{\partial K}{\partial k}$ dokázán.

Objem shora uvedeného tělesa je tedy $V = \frac{8}{3}b^3\frac{E}{k'^2} = \frac{8}{3}a^3k'E$.

Pro $b = a$ přejde těleso v kouli; $k = 0$, $k' = 1$, $E = \frac{1}{2}\pi$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Pro $b = 0$ těleso se zploští v kruh, $k = 1$, $k' = 0$ a objem je nulový.

Poznámka k určení os rovinného řezu na kvadratické kuželové ploše.

Jan Vyšín, Praha.

Osy kuželosečky, která je průsekem roviny s kvadratickou kuželovou plochou, lze snadno určiti z jejich souvislosti s rovinami kruhových řezů. Platí totiž věta:

Jednoduchá kuželosečka k budiž průsekem kvadratické kuželové plochy S s rovinou ϱ. Pak roviny kružnic na ploše S protínají rovinu ϱ ve dvou osnovách přímek souměrně sdružených podle každé osy kuželosečky k.

Vyslovenou větu dokážeme jednoduše analyticky. Osy soustavy pravoúhlých souřadnic položíme do os kuželové plochy S: její rovnice pak bude

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = 0. \tag{1}$$

Předpokládáme-li, že plocha S je reálná, je aspoň jeden z koeficientů a, b záporný. Označení os souřadnic zvolme tak, aby roviny reálných kruhových řezů byly kolmé k rovině $x = 0$. Směr těchto rovin kruhových řezů určíme vrcholovými rovinami μ, ν, které náležejí do svazku kuželové plochy S a isotropické kuželové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{2}$$

Rovnice rovin μ, ν vyjde odečtením rovnic (1), (2), t. j.

$$(1 - a)\,y^2 + (1 - b)\,z^2 = 0. \tag{3}$$

S ohledem na reálnost dostaneme pro koeficienty omezení $a > 1$, $b < 0$ nebo $a < 0$, $b > 1$.

Rovinu ϱ vyjádříme parametricky