Miroslav Hlaváček

Ještě k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ celými čísly

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D43--D46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122809

Ještě k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ celými čísly.

Dr Miloslav Hlaváček, Náchod.

V článku v Časopise pro pěst. mat. a fys. 67, str. D1—D4 (Praha 1937—1938), jsem použil k řešení nadepsané rovnice funkce $\wp$ a její součtové poučky. K témuž účelu se však hodí i Jacobiovy funkce theta a součtové věty podílů funkcí theta.

Nechť jsou x, y, z, u celá čísla, hovící nadepsané rovnici. Je-li poměr

$$r = \frac{x+y}{z+u} \left[\text{neboli } r^{-1} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(z-u)(z^2+u^2)}, \text{ ježto} \frac{x^4-y^4}{z^4-u^4} = 1\right]$$

stálý, pak, jak z uvedeného článku patrno, lze nekonečnou řadu příslušných řešení nadepsané rovnice vyjádřiti funkcí $\wp$. *Je-li však* $k = \dfrac{x^2+u^2}{z^2-y^2}$ *stálý, pak se dá nekonečná řada příslušných řešení nadepsané rovnice vyjádřiti funkcemi theta.* — Toto tvrzení si dokážeme.

O Jacobiových funkcích theta platí, jak známo, identicky

$$\vartheta_2^4(v, \tau) - \vartheta_3^4(v, \tau) = \vartheta_1^4(v, \tau) - \vartheta_0^4(v, \tau).$$

Předpokládejme, že modul τ je ryze imaginární, takže funkce theta jsou reálné. Dělme tuto rovnici $\vartheta_0^4(v, \tau)$, a položme pro stručnost

$$\frac{\vartheta_2(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)} = \eta(v), \quad \frac{\vartheta_3(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)} = \zeta(v), \quad \frac{\vartheta_1(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)} = \xi(v),$$

takže máme

$$\eta^4(v) - \zeta^4(v) = \xi^4(v) - 1. \qquad [1]$$

Jsou-li $\xi(\alpha), \eta(\alpha), \zeta(\alpha)$, *dále* $\xi(\beta), \eta(\beta), \zeta(\beta)$ *racionálné, pak* $\xi(\alpha+\beta)$, $\eta(\alpha+\beta)$, $\zeta(\alpha+\beta)$ *nejsou současně racionálné.*

Důkaz: Pro $v = 0$ plyne z [1], jestliže funkce theta s nulovým argumentem označíme krátce ϑ_α, $\alpha = 0, 2, 3$

$$\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^4} = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^4} + 1.$$

Podle velké Fermatovy věty, dokázané pro $n = 4$, nejsou $\dfrac{\vartheta_3}{\vartheta_0}$ a $\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$ současně racionálné (pro žádný modul τ).

Užijme nyní součtových vět:

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2} \cdot \xi(\alpha+\beta) = \frac{\xi(\alpha)\,\eta(\beta)\,\zeta(\beta) + \eta(\alpha)\,\zeta(\alpha)\,\xi(\beta)}{1 - \xi^2(\alpha)\,\xi^2(\beta)},$$

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\,\eta(\alpha+\beta) = \frac{\eta(\alpha)\,\eta(\beta) - \xi(\alpha)\,\zeta(\alpha)\,\xi(\beta)\,\zeta(\beta)}{1 - \xi^2(\alpha)\,\xi^2(\beta)},$$

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\,\zeta(\alpha+\beta)=\frac{\zeta(\alpha)\,.\,\zeta(\beta)-\xi(\alpha)\,\eta(\alpha)\,\xi(\beta)\,\eta(\beta)}{1-\xi^2(\alpha)\,\xi^2(\beta)}.$$

Za učiněného předpokladu jsou pravé strany těchto rovnic vesměs racionálné; označme je po řadě R_1, R_2, R_3. Dostáváme pak

$$\xi(\alpha+\beta)=\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\,R_1.$$

$$\eta(\alpha+\beta)=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\,R_2,$$

$$\zeta(\alpha+\beta)=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,R_3.$$

Avšak $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}$, $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$ nemohou být současně racionálné; proto platí totéž i o $\eta(\alpha+\beta)$ a $\zeta(\alpha+\beta)$, c. b. d.

Naproti tomu, *jestliže kromě pro* α *a* β *jsou funkce* ξ, η, ζ *také ještě pro arg.* γ *racionálné, platí, že*

$$\xi(\alpha+\beta+\gamma),\ \eta(\alpha+\beta+\gamma),\ \zeta(\alpha+\beta+\gamma)$$

jsou současně racionálné.

Důkaz: Položme $\alpha+\beta=\delta$ a užijme na $\xi(\delta+\gamma)$, $\eta(\delta+\gamma)$, $\zeta(\delta+\gamma)$ opět součtových vět. Obdržíme:

$$\xi(\delta+\gamma)=\frac{\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1\,\eta(\gamma)\,\zeta(\gamma)+\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_2R_3\,\xi(\gamma)}{1-\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1^2\,\xi^2(\gamma)},$$

$$\eta(\delta+\gamma)=\frac{\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}R_2\,\eta(\gamma)-\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1R_3\,\xi(\gamma)\,\zeta(\gamma)}{1-\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1^2\,\xi^2(\gamma)},$$

$$\zeta(\delta+\gamma)=\frac{\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}R_3\,\zeta(\gamma)-\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1R_2\,\xi(\gamma)\,\eta(\gamma)}{1-\frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_2^2\,\vartheta_3^2}R_1^2\,\xi^2(\gamma)}.$$

Platí však, jak lze snádno odvoditi ze základních poznatků o funkcích theta [viz na př. *Dusl*: Úvod do nauky o thetafunkcích (Praha 1919), str. 188],

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}=\frac{\vartheta_3^4(v)-\vartheta_2^4(v)}{\vartheta_0^2(v)\,\vartheta_2^2(v)+\vartheta_1^2(v)\,\vartheta_3^2(v)}=\frac{\zeta^4(v)-\eta^4(v)}{\eta^2(v)+\xi^2(v)\,\zeta^2(v)},\qquad [2]$$

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2} = \frac{\vartheta_3^4(v) - \vartheta_2^4(v)}{\vartheta_0^2(v)\,\vartheta_3^2(v) + \vartheta_1^2(v)\,\vartheta_2^2(v)} = \frac{\zeta^4(v) - \eta^4(v)}{\zeta^2(v) + \xi^2(v)\,\eta^2(v)}$$

identicky, tedy také na př. pro $v = \alpha$; z toho plyne, že za učiněných předpokladů jsou $\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}$, $\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}$ racionálné. Jsou tedy racionálné i

$$\xi(\delta + \gamma),\ \eta(\delta + \gamma),\ \zeta(\delta + \gamma), \text{ c. b. d.}$$

Z toho dále plyne, že, jsou-li funkce ξ, η, ζ racionálné ještě pro další dva arg. μ, ν, jsou také $\xi(\alpha + \beta + \gamma + \mu + \nu)$ atd. racionálné, obecně tedy pro *lichý* počet takových sčítanců. Tito nemusí býti ovšem od sebe různí. Můžeme tedy zcela obecně tvrditi:

Jsou-li funkce ξ, η, ζ racionálné pro arg. $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$, pak jsou racionálné i

$$\xi(n\alpha + m\beta + \ldots + p\sigma),\ \eta(n\alpha + m\beta + \ldots + p\sigma),$$
$$\zeta(n\alpha + m\beta + \ldots + p\sigma),$$

kde $n, m, \ldots, p$ jsou celá čísla, vázaná podmínkou, že součet $n + m + \ldots + p$ jest lichý, jinak však zcela libovolná.

Na př. pro $m = \ldots = p = 0$, $n = 3, 5, 7, \ldots$ dostáváme nekon. řadu řešení

$$\xi(3\alpha),\ \eta(3\alpha),\ \zeta(3\alpha),$$
$$\xi(5\alpha),\ \eta(5\alpha),\ \zeta(5\alpha) \text{ atd.}$$

Za $\xi(\alpha), \eta(\alpha), \zeta(\alpha)$ můžeme vzíti kterékoliv racionálné řešení $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$ nadepsané rovnice. Pro identitu $x^4 - y^4 = x^4 - y^4$ vychází však $\alpha = \frac{1}{4}$; pak $|\xi(\alpha)| = |\xi(3\alpha)| = |\xi(5\alpha)| = \ldots, |\eta(\alpha)| = |\eta(3\alpha)| = |\eta(5\alpha)| = \ldots$ atd., takže nedospíváme k novým řešením.

Vraťme se k rovnici [2]. Převrácenou hodnotu zlomku na pravé straně lze upraviti na

$$\frac{1}{2}\,\frac{\xi^4(v) + \zeta^4(v) - 1 - \eta^4(v) + 2\xi^2(v)\,\zeta^2(v) + 2\eta^2(v)}{\zeta^4(v) - \eta^4(v)}$$

(kde jsme v čitateli přičtli $\xi^4(v) + \zeta^4(v) - 1 - \eta^4(v)$ čili 0), a dále rozložiti na součin

$$\frac{1}{2}\,\frac{\zeta^2(v) - \eta^2(v) + 1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) - \eta^2(v)} \cdot \frac{\zeta^2(v) + \eta^2(v) - 1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) + \eta^2(v)}$$

čili

$$\frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) - \eta^2(v)}\right] \cdot \left[1 + \frac{-1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) + \eta^2(v)}\right].$$

Položme

$$\frac{1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) - \eta^2(v)} = k; \text{ pak } \frac{-1 + \xi^2(v)}{\zeta^2(v) + \eta^2(v)} = -\frac{1}{k},$$

a dostáváme tak

$$\tfrac{1}{2}(1+k)\,.\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_0^2}.$$

Mění-li se tedy v, zůstává

$$k=\frac{1+\xi^2(v)}{\zeta^2(v)-\eta^2(v)}=\frac{x^2+u^2}{z^2-y^2}$$

konstantní. — Tím důkaz toho, co tvrdíme na začátku tohoto článku, proveden.

Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně.

Dr **František Kadeřávek**, Praha.

Sestrojme k elipse k (obr. 1), dané osami p, q a tečnou t s bodem dotyku K, normálu n. Platí tu vztahy

$$\overline{SK'}\,.\,\overline{ST}=a^2;\ \overline{SN}\,.\,\overline{ST}=e^2,$$

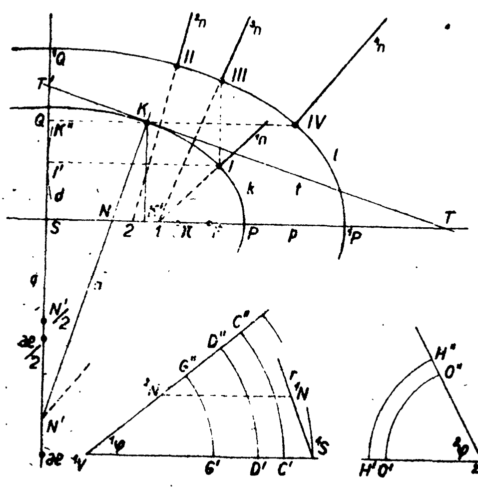
z čehož

$$\overline{SN}:\overline{SK'}=e^2:a^2=(a^2-b^2):a^2=\left(a-\frac{b^2}{a}\right):a,$$

kde a, b, e jsou délky poloos a lineární výstřednost křivky k. Hodnota

$$a-\frac{b^2}{a}$$

je vzdálenost středu křivosti π pro vrchol P od středu křivky. Platí tedy věta, že *poměr vzdálenosti bodu elipsy od vedlejší osy k vzdálenosti průsečíku normály téhož bodu s osou hlavní je hodnota stálá, rovná poměru hlavní poloosy k vzdálenosti středu křivosti na ní položeného od středu křivky.*



Obr. 1.

Sestrojíme-li redukční úhel $^1\varphi$ o vrcholu ^1V, který délku $a={}^1VC'$