František Krňan

Metodické poznámky k vete sinovej

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D87--D88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122804`

VYUČOVÁNÍ

Metodické poznámky k vete sinovej.

Dr **Frant. Krňan,** Bratislava.

Sinusovú vetu elegantne vyvodíme takto: Danému trojuholníku opíšeme kružnicu, viď obr. 1. Niektorý vrchol napr. B posunieme do bodu B' — spojnica CB' je priemer kružnice. $\sphericalangle AB'C$ je β.

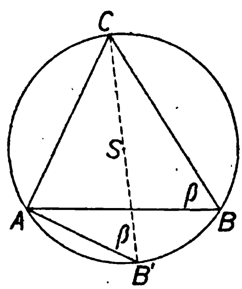
Platí $\quad \sin\beta = \dfrac{b}{2r}, \quad$ odkiaľ $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2r.$

Práve tak isto sme mohli posunovať vrchol A prípadne C. Tým dochádzame pre trojuholník ostrouhlý k tejto formulácii sinusovej vety:

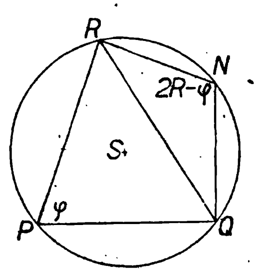
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

ktorá hovorí viac ako formulácia:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$



Obr. 1.



Obr. 2.

lebo z prvej formulácie vidíme nielen, že pomer strany a sinu protiľahlého uhlu je stály, ale aj to, že tento pomer rovná sa priemeru kružnice opísanej. Možno z nej aj ďalej ťažiť. Ak $2r = 1$, je

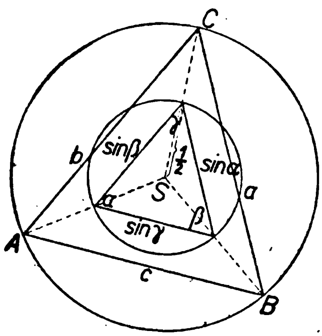
$$a = \sin\alpha, \; b = \sin\beta, \; c = \sin\gamma,$$

inými slovami: Ak do kružnice s jednotkovým priemerom vpíšeme ľubovoľný trojuholník, jeho strany sú číselne rovné sinusom protiľahlých uhlov. Veta platí aj pre trojuholník tupouhlý, ak predpokladáme (obr. 2)

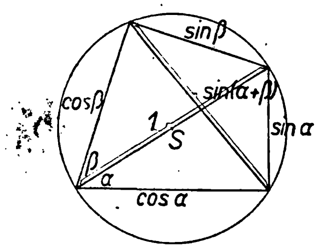
$$\sin(2R - \varphi) = \sin\varphi,$$

lebo tetiva $\overline{QR}$ leží jak proti uhlu φ tak aj proti uhlu $(2R - \varphi)$.

Tetiva v kružnici s jednotkovým priemerom vzrastá od 0 po 1, ak proti nej ležiaci uhol sa zväčšuje od 0 po 90°; ak uhol ďalej rastie po 180°, tetiva sa zmenšuje od 1 po 0. Stretávame sa tu s inou možnosťou realizovania sinusu uhlov od 0 po 180°.



Obr. 3.



Obr. 4.

Keďže v kružnici s jednotkovým priemerom sú strany číselne priamo rovné sinusom protiľahlých uhlov, žiak názorne pochopí, že v kružnici s priemerom $2r$krát väčším budú strany tiež $2r$krát väčšie. Z obr. 3 možno priamo vyčítať vzťah:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r.$$

Pre zaujímavosť uvádzam ešte obr. 4, z ktorého vzhľadom na známu vetu o súčine uhlopriečok v tetivovom štvoruholníku potvrdzuje sa pre ostré uhly známy vzťah:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

Pozn. red. O něco později došel redakci článek prof. Fr. Hradeckého, v němž byly touž methodou odvozeny i některé další vzorce goniometrické platné pro ostré úhly. Redakce pro úsporu místa dala přednost kratšímu článku Krňanovu.