Rudolf Piska

Příspěvek ke konstrukci tečen a středů křivosti jistých bicirkulárních kvartik

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D78--D83

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122787`

z čehož plyne, že průsečíky odpovídajících si přímek hvězdic ve vztahu (8) dávají kuželosečku, a to hyperbolu, označenou v řešení h. Má tuto vlastnost: spojíme-li libovolný její bod, označený H_r, s bodem V, dostáváme tečnu v tomto bodě k určité parabole (procházející body V, A, B), jejíž osa je rovnoběžná se směrem $\overline{H_rB}$. Z tohoto důvodu řeší kružnice k naši úlohu.

Pro bod B (t. j. čtvrtý průsečík kružnice k s hyperbolou h) dostáváme jako výsledek parabolu složenou (z přímky $\overline{VB}$ a rovnoběžky s touto bodem A), což vyplývá z vlastnosti hyperboly h. Tato parabola ovšem nevyhovuje našim podmínkám. Úloha má tedy tři řešení.

Pro zajímavost si uveďme případ, kde *body A, B nahradíme tečnou t s dotykovým bodem T.* Řešení je zde jednodušší, neboť hyperbola h stává se složenou ze svých asymptot (sestrojí se stejně jak bylo uvedeno vpředu. $\overline{VA}$ nahradím $\overline{VT}$; $\overline{AB} \equiv t$) a kružnice k se opíše nad průměrem $\overline{VT}$. Obecně dostáváme dvě jednoduché kuželosečky, a abychom byli důslední, musíme též do řešení vzíti parabolu složenou z dvojnásob počítané přímky $\overline{VT}$. Tím dostáváme i pro tento případ tři řešení, což nebývá u této úlohy uváděno. Odůvodnění posledního tvrzení o složené parabole si provede laskavě čtenář sám.

Poznámky: 1. Úlohy zde uvedené lze zobecnit, nahradíme-li podmínku: vrchol kuželosečky v daném bodě, podmínkou: úhel tečny a sdruženého průměru v daném bodě.

2. Úloha: sestrojit kuželosečku z daných čtyř tečen, z nichž jedna je vrcholová, není duální k úloze 1.

3. Úlohu 2. lze řešit způsobem elementárním, založeným na jiném principu. Přenechávám to čtenáři. (Elementární způsob řešení se provede podle způsobu odvozeného v knize: Dr. V. Hlavatý, Projektivní geometrie, I. díl, Praha 1944, str. 273, poučka (6,3)).

Příspěvek ke konstrukci tečen a středů křivosti jistých bicirkulárních kvartik.

Rudolf Piska, Kroměříž.

1. Výtvarný zákon, rovnice.

Pohybuje-li se bod $A(\xi; \eta)$ po kružnici

$$(\xi - m)^2 + (\eta - n)^2 = r^2 \quad (r \neq 0), \tag{1,1}$$

pak trajektorie (c) bodu C, pro nějž platí vztahy: $\overline{CA} = \overline{OA}$, $CA \parallel y$, je bicirkulární křivka čtvrtého stupně. Souřadnice bodu C jsou určeny podmínkami (viz obr. 1)

$$x = \xi, \quad y = \eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{1,2}$$

Vyloučením parametrů ξ a η z rovnic (1,1) a (1,2) obdržíme po úpravě

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(nx^2 - 2mxy - ny^2)\, y + 4(m^2 + n^2 - r^2)\, y^2 = 0, \tag{1,3}$$

což je hledaná rovnice křivky.

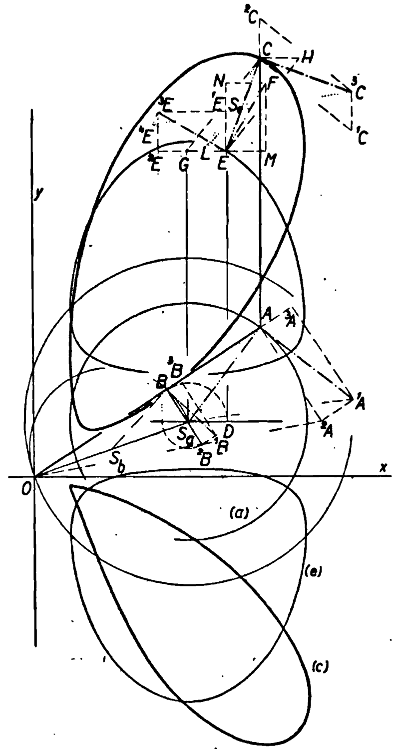
V počátku má křivka vyšší singularitu, neboť pro $y = 0$ dostaneme $x^4 = 0$.

Z výtvarného zákona je zřejmé, že počátek je pro vztah $m > r$ bodem isolovaným, pro $m = r$ bodem vratu druhého druhu (vyjímaje případ $n = 0$) a pro $m < r$ reálným bodem taknodálním (vyjímaje opět případy pro $m^2 + n^2 = r^2$, kdy počátek je bodem trojnásobným).

V případě $m = n = 0$ se křivka rozpadá ve dvě kružnice $x^2 + y^2 + 2ry = 0$ a $x^2 + y^2 - 2ry = 0$. Zajímavý je však případ, kdy $m^2 + n^2 = r^2$. Pak (1,3) nabude tvaru

$$(x^2 + y^2)^2 + 4(nx^2 - 2mxy - ny^2)\, y = 0, \tag{1,4}$$

což je rovnice šikmého trojlístku. Počátek je bodem trojnásobným a tečny jednotlivých větví křivky jsou určeny rovnicí



Obr. 1.

$$(nx^2 - 2mxy - ny^2)\, y = 0, \tag{1,5}$$

nebo

$$t_1 \equiv y = 0, \quad t_{2,3} \equiv y = \frac{-m \pm r}{n}\, x.$$

Je-li $m = 0$, $n = r \neq 0$, má rovnice (1,3) tvar

$$(x^2 + y^2)^2 - 4n\,(x^2 - y^2)\, y = 0. \tag{1,6}$$

Křivka se nazývá přímým trojlístkem a tečny větví v trojnásobném bodě mají rovnice

$$t_1 \equiv y = 0, \quad t_{2,3} \equiv y = \pm x. \tag{1,7}$$

Konečně pro $n = 0$, $m = r \neq 0$ obdržíme z rovnice (1,3) rovnici

$$(x^2 + y^2)^2 - 8mxy^2 = 0, \tag{1,8}$$

t. zv. přímého dvojlístku. V počátku je bod vratu s tečnou v ose x. Také osa y je tečnou křivky v počátku.

2. Konstrukce tečny.

Pohyb bodu C závisí na pohybu bodu A. Zvolíme-li pro danou polohu (viz obr. 1) za základní rychlost jednotkovou rychlost $\overline{A^1A} \perp\!\!= \overline{S_aA}$ bodu A v tečně t_a kružnice (a), pak složka rotační rychlosti $A^2A \perp OA$ bodu A kolem bodu O je omezena rovnoběžkou ${}^1A^2A \parallel OA$ a složka posuvné rychlosti v OA je vyjádřena délkou A^3A, kde bod ${}^3A$ je průsečík kolmice ${}^1A^3A \perp OA$ s OA.

Výsledný pohyb bodu C určíme tedy takto: Rychlost $\overline{C^1C} \#$ $\# \overline{A^1A}$ tvoří jednu složku výsledné rychlosti bodu C, druhá $\overline{C^2C}$ (posuvná ve spojnici AC) se rovná posuvné rychlosti $\overline{A^3A} = {}^2\overline{A^1A}$ bodu A ve spojnici OA. Uhlopříčka C^3C v rovnoběžníku rychlostí $C^1C^3C^2C$ určuje směr i velikost výsledné rychlosti bodu C, tedy tečnu trajektorie (c) pro vytčenou polohu.

3. Konstrukce normály.

Užitím kolmých rychlostí bodu C sestrojíme normálu n_c snadněji než tečnu. Kolmá rychlost CG otáčení bodu C je délkou i směrem rovna kolmé rychlosti rotace bodu A kolem S_a, tedy $\overline{CG} \# \overline{AS_a}$. Kolmá rychlost posouvání CH bodu C v přímce AC je $CH \perp AC$, $\overline{CH} = {}^2\overline{A^1A}$.

Uhlopříčka CE rovnoběžníka $CGEH$ je výslednou kolmou rychlostí bodu C a zřejmě ze shodnosti tohoto rovnoběžníka s rovnoběžníkem $C^1C^3C^2C$ prostých rychlostí plyne rovnost $\overline{CE} \perp\!\!= \overline{C^3C}$.

Bod E normály n_c se však nyní určí velmi snadno. Veďme totiž středem S_a kolmici $S_aB \perp OA$. Užitím kolmých rychlostí bodu A a ze shodnosti trojúhelníků $\triangle AS_aB \cong \triangle A^1A^2A$ je patrné, že $\overline{BS_a} \perp\!\!= {}^2\overline{A^1A} = \overline{GE}$. Otočíme-li tedy úsečku S_aB kolem S_a do polohy $\overline{S_aD} = \overline{S_aB}$, $S_aD \perp AC$, je patrně $\overline{DE} \# \overline{S_aG} \# \overline{AC} =$ $= \overline{OA}$.

Stačí tedy sestrojit bod E normály n_c tak, že kolmici $S_aB \perp$ $\perp OA$ otočíme do S_aD (na průměru kružnice (a), který je rovnoběžný s x) a od bodu D naneseme ve směru rovnoběžném s AC délku $\overline{DE} = \overline{OA}$.

4. Sestrojení středu křivosti.

Známe-li rychlosti dvou bodů C, E normály n_c, dovedeme určit i střed kružnice křivosti bodu C.

Určeme nejdříve rovnici trajektorie (e) bodu E. Souřadnice bodu E vyhovují patrně vztahům

$$\begin{aligned} x &= m + \overline{S_a B} \\ y &= n + \overline{OA}. \end{aligned} \tag{4,1}$$

Dále ale platí

$$\overline{S_a B} = \frac{\eta m - \xi n}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \text{ a } \overline{OA} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{4,2}$$

Mají tedy rovnice (4,1) tvar

$$\begin{aligned} x &= \frac{m\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \eta m - \xi n}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y &= n + \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned} \tag{4,3}$$

a prvou rovnici vztahů (4,3) lze pak psáti ve tvaru

$$x = \frac{m(y - n) + \eta m - \xi n}{y - n}$$

a po úpravě

$$\xi n - \eta m = -(x - m)(y - n) \tag{4,4}$$

a podobnou úpravou rovnice (1,1) dostaneme druhý vztah

$$2\xi m + 2\eta n = (y - n)^2 + (m^2 + n^2 - r^2). \tag{4,5}$$

Řešením rovnic (4,4) a (4,5) dle ξ a η obdržíme

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-2n(x - m) \cdot (y - n) + m[(y - n)^2 + \varrho^2 - r^2]}{2\varrho^2} \\ \eta &= \frac{2m(x - m)(y - n) + n[(y - n)^2 + \varrho^2 - r^2]}{2\varrho^2}, \end{aligned} \tag{4,6}$$

kde $\varrho^2 = m^2 + n^2$. Dosazením vztahů (4,6) do rovnice (1,1) a úpravou dostaneme rovnici hledané trajektorie (e) ve tvaru

$$\begin{aligned} (y - n)^2 [4(x - m)^2 + (y - n)^2] - 2(y - n)^2 (\varrho^2 + r^2) + \\ + (\varrho^2 - r^2)^2 = 0, \end{aligned} \tag{4,7}$$

což je rovnice zobecněné Bernoulliovy kvartiky. Pro $\varrho^2 = 2r^2$ a po transformaci $x = x' + m$, $y = y' + n$ dostaneme známou rovnici Bernoulliovy kvartiky ve tvaru

$$y^2 (4x^2 + y^2) - 6r^2y^2 + r^4 = 0. \tag{4,8}$$

Ovšem rovnici trajektorie (e) jsme nemuseli odvozovat, ježto ji k dalšímu bezprostředně nepotřebujeme. Tím bylo jen poukázáno na souvislost uvažovaných kvartik se zobecněnou Bernoulliovou kvartikou a jiná konstrukce této, než jak byla odvozena v mém pojednání: „Jisté zobecnění Bernoulliovy kvartiky“, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky (1946, D str. 58-62).

Tečnu trajektorie (e) dovedeme určit pomocí složek rychlostí bodu E ve spojnici DE a směru na DE kolmém. Ježto bod E vykoná ve spojnici DE stejný posuvný pohyb jako bod A v OA, je patrně $\overline{E^1E} \perp\!\!\!\!= \overline{S_aD}$. Složka E^2E rychlostí bodu E ve směru kolmém k DE je rovna posuvné rychlosti bodu B ve spojnici BS_a.

Při otáčení spojnice OA kolem O jest rychlost $B^2B \perp OA$ bodu B úměrná rychlosti A^2A bodu A. Je tedy rychlost B^2B omezena spojnicí O^2A. Bod B opisuje však kruhovou trajektorii (b) o středu S_b, sestrojenou nad průměrem OS_a, takže výsledná rychlost B^1B bodu B v tečně t_b při rotaci kolem S_b je omezena ${}^2B^1B \parallel OA$. Posuvná rychlost bodu B ve spojnici S_aB při otáčení této kolem S_a je rovna ${}^1\overline{B^3B} \parallel S_aB$, kde ${}^3B$ leží na spojnici OB. Ostatně také ${}^1\overline{B^3B} \# {}^2\overline{BB}$.

Je tedy posuvná rychlost $E^2E \perp DE$ rovna rychlosti $\overline{B^2B}$. Uhlopříčka E^3E v rovnoběžníku rychlostí $E^1E^3E^2E$ určuje směr i velikost výsledné rychlosti. Tím je také znovu ukázána jiná konstrukce tečny Bernoulliovy kvartiky, než jak je provedena ve výše uvedeném pojednání.

Konstrukce středu křivosti trajektorie (c) je již nyní jednoduchá. Stačí určit rychlost $\overline{E^4E} \perp \overline{CE}$, která je omezena spojnicí ${}^3E^4E \parallel CE$; spojnice ${}^4E^3C$ protíná normálu n_c v hledaném středu křivosti S_c.

Střed křivosti S_c můžeme však určit též s pomocí kolmých rychlostí CE a EF bodů C a F, sestrojením normály EF.

Kolmá posuvná rychlost $\overline{EM} \perp \overline{DE}$ bodu E v přímce DE je patrně rovna dle předešlého $\overline{S_aB}$ a kolmá rychlost $\overline{EN}$ bodu E (N na prodloužení DE) v rovnoběžce s x rovná se $\overline{B^2B}$. V případě $m^2 + n^2 = r^2$ rovná se tato rychlost $\overline{S_bB}$.

Úhlopříčka v rovnoběžníku $EMFN$ je výsledná kolmá rychlost bodu E a určuje tedy normálu n_e. Stačí nyní rovnoběžku $CL \parallel EF$ omezit kolmicí $EL \perp CE$ a spojnice LF protne normálu n_c v hledaném středu křivosti S_c. Svírá-li spojnice LF s normálou CE malý úhel, je určení průsečíku S_c nepřesné. V tomto případě užijeme zobecněné konstrukce. Omezíme totiž libovolné rovnoběžky $CL' \parallel EF'$ kolmicemi $EL' \perp CE$ a $FF' \perp CE$. Pak spojnice $L'F'$ určí na normále n_c střed křivosti S_c.

Konstrukce tečny a středu křivosti zůstává nezměněna i v případech (1,4), (1,6) a (1,8). Zajímavá je však zde změna trajektorie (e). Je-li $m^2 + n^2 = r^2 = \varrho^2$, degeneruje zobecněná Bernoulliova kvartika ve dvojnásobně branou rovnoběžku s osou x o rovnici $(y - n)^2 = 0$ a elipsu

$$\frac{(x - m)^2}{r^2} + \frac{(y - n)^2}{4r^2} = 1. \qquad (4,9)$$

Základní rovnice pro pohyb proměnného rovinného útvaru a její použití v theorii rovinných křivek.

Zdeněk Pírko, Praha.

V pojednání „Pohyb proměnného rovinného útvaru"*), otištěném v tomto časopise, odvodil jsem jisté velmi obecné rovnice (nazval jsem je „zobecněné rovnice Cesàrovy") a ukázal, že vhodnou jejich specialisací lze dospět k rovnicím, které v podstatě nejsou nic jiného než „základní rovnice Mannheimovy — d'Ocagneovy", z nichž vychází kinematická geometrie při studiu vlastností proměnného rovinného útvaru. Methoda, kterou jsem dospěl k zobecněným rovnicím Cesàrovým a odtud k základní rovnici pro pohyb proměnného rovinného útvaru, byla methoda pohyblivé soustavy souřadnic.

V tomto článku podávám jiné (dva) elementární důkazy této základní rovnice a to methodou klasické diferenciální geometrie a zároveň ukazuji na jinou možnost jejího použití, totiž v theorii rovinných křivek.

1. Budiž dána rovinná křivka Γ s obloukem σ a s parametrickými rovnicemi

$$\xi = \xi(\sigma), \quad \eta = \eta(\sigma), \qquad (1)$$

kdež $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ jsou jednoznačné funkce parametru σ v jistém společném oboru, které mají první a druhou derivaci. Je-li τ úhel, který svírá kladná tečna této křivky s kladnou osou úseček soustavy, k níž je křivka Γ rovnicemi (1) vztažena, tu platí nejprve $\xi' = \cos \tau$, $\eta' = \sin \tau$ čili $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$ (jestliže jsme akcenty označili derivace podle oblouku σ) a tedy

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' = 0. \qquad (2_1)$$

Dále ze vztahu $\operatorname{tg} \tau = \eta' : \xi'$ plyne

$$\xi'\eta'' - \eta'\xi'' = \tau'. \qquad (2_2)$$

Z obou rovnic obdržíme

$$\xi'' = -\eta'\tau', \quad \eta'' = \xi'\tau'. \qquad (3)$$

*) Časopis pro pěst. mat. a fys., 71 (1946), 71—77.