M. Kruml

Tečny a normály kuželoseček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D22--D24

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122783`

VYUČOVÁNÍ

Tečny a normály kuželoseček.

M. Kruml, rg. Poděbrady.

V hodinách analytické geometrie řeší se zpravidla úlohy o tečnách a normálách kuželoseček řešením soustav rovnic, kde neznámými jsou souřadnice dotykových bodů. Chci zde krátce poukázat na jinou methodu řešení těchto úloh, která není nová, ale vede rychleji k cíli.

1. Tečny kuželoseček.

Pro jednoduchost uvažujme rovnice kuželoseček v poloze středové (kružnice, elipsa, hyperbola) a vrcholové (parabola). Z podmínek pro to, aby daná přímka

$$a \equiv y = kx + q \tag{1}$$

byla tečnou kuželosečky, dostaneme za předpokladu konstantního k (směrnice přímky) pro příslušný úsek q na ose y tyto rovnice:

u kružnice .... $q = \pm r \,.\, \sqrt{k^2 + 1}$,

u elipsy a hyperboly ..... $q = \pm \sqrt{a^2 . k^2 \pm b^2}$,

u paraboly .... $q = \dfrac{p}{2k}$.

Potom rovnice přímky a jako rovnice tečny kuželosečky bude

u kružnice .... $t \equiv y = kx \pm r . \sqrt{k^2 + 1}$, (2)

u elipsy a hyperboly ..... $t \equiv y = kx \pm \sqrt{a^2 . k^2 \pm b^2}$, (3)

u paraboly .... $t \equiv y = kx + \dfrac{p}{2k}$. (4)

Rovnice tečny kuželosečky obsahují nyní jedinou neznámou veličinu k, čímž výpočet se stává snadnější a rychlejší. Uveďme si příklady:

1. Bodem A (— 2; 1) veďte tečny ku parabole $y^2 = 4x$.

Jelikož bod A bude na tečně ležet, musí jeho souřadnice vyhovovati rovnici tečny paraboly (4); tato rovnice po dosazení souřadnic bodu A a polovičního parametru $p = 2$ a po úpravě dává rovnici:

$$2k^2 + k - 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$k_1 = -1 \text{ a } k_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Dosazením těchto veličin do rovnice (4) dostaneme ihned rovnice tečen:

$$t_1 \equiv x + y + 1 = 0 \text{ a } t_2 \equiv x - 2y + 4 = 0.$$

2. Napište rovnici tečny elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$, která stojí kolmo na danou přímku $a \equiv 5x + 4y - 8 = 0$.

Z dané podmínky kolmosti dostaneme pro směrnici tečny hodnotu $k_t = -\dfrac{1}{k_a} = \frac{4}{5}$; jejím dosazením do rovnice (3) dostaneme ihned rovnice tečen:

$$t_{1,2} \equiv 4x - 5y \pm 25 = 0.$$

3. Určete geometrické místo průsečíků tečen hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2 . b^2$, které stojí na sobě kolmo.

Rovnice tečen na sebe kolmých jsou podle rovnice (3):

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 . k^2 - b^2}$$

$$y = -\frac{1}{k} . x \pm \sqrt{\frac{a^2}{k^2} - b^2}.$$

Násobíme-li druhou rovnici k, obě rovnice umocníme a sečteme, dostaneme po menší úpravě:

$$(k^2 + 1) . x^2 + (k^2 + 1) . y^2 = (k^2 + 1) . (a^2 - b^2),$$

t. j. rovnici kružnice ve středové poloze

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2,$$

kde

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Geometrickým místem průsečíků tečen hyperboly, které stojí na sobě kolmo, jest tedy — jak je nám odjinud známo — kružnice soustředná s hyperbolou o poloměru rovném $\sqrt{a^2 - b^2}$.

2. Normály kuželoseček.

Abychom snadno našli rovnici normály kuželoseček, vyjdeme od rovnice přímky určené bodem dotyku $T(x_1, y_1)$ a směrnicí k:

$$y - y_1 = k (x - x_1). \tag{5}$$

Na příklad: Vyjděme od rovnice hyperboly, do níž dosadíme souřadnice bodu dotyku x_1, y_1; směrnice normály jest $k = -\frac{a^2 . y_1}{b^2 . x_1}$.

Řešením těchto dvou rovnic podle x_1 a y_1 dostaneme:

$$x_1 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - k^2 . b^2}} \text{ a } y_1 = \mp \frac{k . b^2}{\sqrt{a^2 - k^2 . b^2}},$$

které po dosazení do rovnice (5) určují již rovnice normál hyperboly:

$$n_{1,2} \equiv y = kx \pm \frac{k . (a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 - k^2 . b^2}}$$

o známé směrnici k. Stejným způsobem lze odvoditi i rovnice normál ostatních kuželoseček, takže dostaneme:

u kružnice .... $y = k . x$ (6)

u elipsy a hyperboly ..... $y = kx \pm \frac{k . (a^2 \mp b^2)}{\sqrt{a^2 \pm k^2 . b^2}}$ (7)

u paraboly .... $y = k . x - \frac{kp}{2} . (k^2 + 2)$. (8)

Uveďme si opět několik příkladů:

1. K elipse $9x^2 + 64y^2 = 576$ jest vésti normálu rovnoběžnou s přímkou $a \equiv 2x - y + 3 = 0$.

Dosadíme směrnici normály $k_n = k_a = 2$ a délky poloos $a = 8$, $b = 3$ do rovnice (7) a dostaneme po úpravě ihned rovnice hledaných normál:

$$n_{1,2} \equiv 2x - y \pm 11 = 0.$$

2. Napište rovnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$, která jest současně normálou k elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Dosazením hodnot r, a, b z daných rovnic do rovnice (2) a (7) a vzájemným srovnáním těchto dvou rovnic dostaneme trinomickou rovnici:

$$k^4 - 4k^2 + 4 = 0,$$

která má dva dvojnásobné kořeny:

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2}.$$

Jejich dosazením do rovnice (2) nebo (7) dostaneme pak rovnice žádaných přímek:

$$\sqrt{2} . x - y \pm \sqrt{3} = 0,$$
$$\sqrt{2} . x + y \mp \sqrt{3} = 0.$$
