Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 3, 130--139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122777

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal pan *Adolf Pařízek,* stud. VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze.)

Mějž prvý mnohoúhelník stran x, druhý y; úloha vyžaduje aby čísly celými a kladnými řešena byla rovnice

$$\frac{x(x-3)}{2} - \frac{y(y-3)}{2} = 20.$$

Rovnici této lze též dáti tvar

$$(x+y-3)(x-y) = 40,$$

z kterého zřejmo, že $x+y-3$ bude jedním, $x-y$ druhým činitelem čísla 40; aby řešení bylo kladné, musí býti

$$x+y-3 > x-y.$$

Bude tedy $x+y-3 = 40, \; 20, \; 10, \; 8,$

$$x-y \;\; = 1, \; 2, \; 4, \; 5;$$

k řešení celistvému vede pouze případ prvý a poslední, totiž:

$$x_1 = 22, \quad y_1 = 21,$$
$$x_2 = 8, \quad y_2 = 3.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Bohumír Tomíček* z VIII. tř. v Jičíně, *A. Smolík* z VIII. a *Jos. Vančura* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *Frant. Navrátil* a *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *K. Ankrt* ze VII. tř. r., *Jan Andres* z VIII. tř. a *Václav Žitek* z V. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Jaroslav Kamper* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Novák* a *Jos. Kábrle* z VIII. tř., *Ant. Vyskočil* ze VII. tř. r. a *Kar. Herzán* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Jos. Hauser,* stud. v Praze, *Jan Krejčí* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Bohuslav Mašek* z VIII. tř. vyšš. gymn. v Truhlářské ulici v Praze, *Jarosl. Máslo* z VIII. tř. v Táboře, *Otakar Pavlovský* a *Josef Janoušek* z V. tř. akad. gymn. v Praze.

Řešení úlohy 2.

(Podává *Karel Herzán,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Přeneseme na stranu ab délku $be = ac'$, tak že jest také $ae = c'b$; je-li $m < n$, protíná přímka $b'e$ stranu $a'c'$ v bodě b''. Poněvadž jest

$$\frac{ac'}{bc'} = \frac{eb}{ea} = \frac{cb'}{ab'} = -\frac{m}{n},$$

bude $b'e \parallel bc$ a proto

$$\frac{c'b''}{a'b''} = \frac{c'e}{be} = \frac{c'a + ae}{c'a} = \frac{m-n}{m}.$$

Dělí tedy bod b'' stranu $c'a'$ dle poměru $\frac{m-n}{n}$.

Z toho již vychází na jevo *řešení*:

Spojme dané body a', b', c' a rozdělme strany takto vzniklého trojúhelníka dle poměru

$$\frac{a'c''}{b'c''} = \frac{b'a''}{c'a''} = \frac{c'b''}{a'b''} = \frac{m-n}{m}.$$

Spojme body dělící s protějšími vrcholy a veďme bodem c' přímku rovnoběžnou $a'a''$, bodem a' rovnoběžku k $b'b''$, bodem b' rovnoběžku k $c'c''$; přímky takto sestrojené omezují žádaný trojúhelník abc.

Poznámka red. Pan prof. *Alois Strnad*, jenž úkol ten proponoval, upravil řešení takto:

O daný trojúhelník $a'b'c'$ mysleme si opsaný trojúhelník abc tak, aby bylo

$$\frac{ac'}{bc'} = \frac{ba'}{ca'} = \frac{cb'}{ab'} = -\frac{m}{n}.$$

Přímky bc, $b'c'$ protínejtež se v bodě a'', přímky ca, $c'a'$ v bodě b'', přímky ab, $a'b'$ v bodě c''.

Hledíme-li ku trojúhelníku $ab'c'$ proťatému příčkou $b'c'$, jest dle věty Menelaovy

$$\frac{ac}{b'c} \cdot \frac{b'a''}{c'a''} \cdot \frac{c'b}{ab} = 1.$$

Jest však

$$\frac{ac}{bc'} = \frac{ab' - cb'}{-bc'} = \frac{m+n}{n},$$

$$\frac{c'b}{ab} = \frac{-bc'}{ac' - bc'} = \frac{n}{m+n},$$

a tedy

$$x = \frac{b'a''}{c'a''} = \frac{m}{n}.$$

Obdobně najdeme

$$y=\frac{c'b''}{a'b''}=\frac{m}{n},\quad z=\frac{a'c''}{b'c''}=\frac{m}{n}.$$

Sestrojme tedy v stranách $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ body a'', b'', c'' dle poměrů

$$x=y=z=\frac{m}{n};$$

přímky $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ omezovati budou hledaný trojúhelník abc. Budiž připomenuto, že obdržíme v každé straně tohoto trojúhelníku čtyři body harmonické, na př. a, b, c', c''.

Tutéž úlohu řešili pp.: *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Jos. Vančura* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *Ant. Vyskočil* ze VII. tř. r. a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Jan Andres* z VIII. tř. a *K. Ankrt* ze VII. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *Ant. Vyskočil*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Dán jest kužel kruhový kolmý, jehož strana jest s, poloměr základny r. Rovina rovnoběžná ku základně nechť odtíná kužel o straně x a poloměru ϱ. Dle podmínky má býti

$$\pi r^2+\pi rs=2\,.\,\pi\varrho x$$

čili

$$2\varrho x=r(r+s);$$

jelikož však jest $\varrho=\frac{rx}{s}$, obdržíme

$$x=\sqrt{\frac{s\,(r+s)}{2}}.$$

Výsledku tomuto lze dáti ještě jednodušší podobu, užijeme-li úhlu α sevřeného stranou kužele a základnou jeho. Jest potom $r=s\cos\alpha$ a tedy

$$x=s\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=s\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Oba výrazy, nalezené za x, vedou k snadnému sestrojení žádané roviny sečné.

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Radešinský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli, *Bohuslav Mašek* a *Adolf Pařízek* z VIII. tř. vyšš. g. v Truhlářské ulici v Praze, *Jos. V. Hauser*, stud. v Praze, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Herzán* ze VI. tř. r., *Jos. Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Bohumil Novák* ze VI. tř. g. a *Jaroslav Máslo* z VIII. tř. v Táboře, *Jos. Vančura* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *K. Ankrt* ze VII. tř. r. a *Jan Andres* z VIII. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 4.

V pravoúhlý rovnoběžník daný $abcd$ vepsán buď pravoúhelník, jehož vrcholy e, f, g, h leží ve stranách ab, bc, cd, da prvého. Úhlopříčny eg, fh svírají daný úhel φ, protínajíce se v bodě o, který jest společným středem obou rovnoběžníků. Učiňme $om \perp ab$, $on \perp ad$ a užijme tohoto označení:

$$\overline{am} = a, \quad \overline{an} = b, \quad \overline{em} = x, \quad \overline{hn} = y, \quad \overline{oe} = \overline{oh} = u.$$

Potom jest $\frac{a}{u} = \cos\alpha$, $\frac{b}{u} = \cos\beta$, $\alpha + \beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, tudíž $\cos(\alpha + \beta) = \sin\varphi$; odtud plyne rovnice

$$ab - \sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)} = u^2 \sin\varphi,$$

z které řešením najdeme

$$(1) \qquad u^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Pohodlněji lze sestrojiti x neb y; jestiť

$$(2) \qquad x = \sqrt{u^2 - b^2} = \frac{a - b \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Sestrojivše dle výrazu tohoto délku x, najdeme v straně ab bod e, načež kružnice opsaná ze středu o poloměrem oe stanoví ve stranách rovnoběžníku daného ostatní vrcholy žádaného. Aby řešení možným bylo, musí býti $x < a$ čili dle vzorce (2)

$$\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} < \frac{b}{a};$$

jelikož však levá strana této nerovnice jest $tg\,\frac{\varphi}{2}$, pravá pak $tg\,\frac{\omega}{2}$ (značí-li ω úhel úhlopříčen ac, bd), jsme tím vedeni k podmínce $\varphi < \omega$.

Z podmínky této patrno, že nelze do obdélníku vepsati čtverec. Je-li však $abcd$ čtverec, tedy $a = b$, pak jest $x = a \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}$; lze tudíž do čtverce vepsati obdélník libovolného úhlu φ. Při $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jde patrně o vepsání čtverce do čtverce; jest pak $x = \frac{0}{0}$, pročež úloha neurčitou.

Řešení zaslali pp.: *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Karel Novák*, stud. VIII. tř. v Hradci Králové.)

Žádaná plocha P se skládá ze čtyř rovnoramenných trojúhelníkův o rameně r, jest tedy

$$P = \frac{r^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)$$

$$= r^2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right);$$

a poněvadž $$\frac{\gamma+\delta}{2} = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2},$$

jest

$$P = r^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

$$= 2r^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}{4}\cos\frac{(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)}{4},$$

a užijeme-li vztahů

$$\beta + \delta = 2\pi - (\alpha+\gamma), \quad \beta + \gamma = 2\pi - (\alpha + \delta),$$

nabudeme

$$P = 2r^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Adolf Pařízek* z VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze, *K. Ankert* ze VII. tř. r., *Jan Andres* z VIII. tř. a *Otakar Kádner* ze VII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *J. Lauschmann* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Jos. Hauser*, stud. v Praze a *Fr. Janoušek* ze VII. tř. r. v Brně.

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Ant. Vyskočil*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Trojúhelníky, vespolek podobné, obdržíme, vedeme-li z téhož bodu rovnoběžné přímky se stranami daného trojúhelníku ABC, i jest tedy každý také tomuto podoben.

Označíme-li stejnolehlé strany vykrojených trojúhelníkův a_1, a_2, a_3, bude strana daného trojúhelníku $a = a_1 + a_2 + a_3$, a z jejich podobnosti plyne úměra

$$P : p_1 : p_2 : p_3 = a^2 : a_1^2 : a_2^2 : a_3^2$$

aneb

$$\sqrt{P} : (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}) = a : (a_1 + a_2 + a_3),$$

pročež

$$P = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3})^2.$$

Výkrojek X při vrcholu A trojúhelníku daného jest rovnoběžník o stranách b_3 a c_2, náležejících plochám p_3 a p_2. Srovnáme-li jeho plochu se sousedními trojúhelníkovými výkrojky, jsou patrny úměry

$$\frac{X}{2} : p_2 = b_3 : b_2$$

$$p_3 : \frac{X}{2} = c_3 : c_2;$$

a ježto

$$b_3 : b_2 = c_3 : c_2,$$

jest

$$X = 2\sqrt{p_2 p_3},$$

a podobně

$$Y = 2\sqrt{p_1 p_3}, \quad Z = 2\sqrt{p_1 p_2}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Ankert* ze VII. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Bohuslav Mašek* z VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze, *Jos. V. Hauser*, stud. v Praze, *K. Herzán* ze VI. tř. r. v Hradci Králové a *Ant. Raděšínský* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal pan *Ant. Radešinský*, stud. VIII. tř. v Litomyšli.)

Příčky, půlící úhly β a γ daného trojúhelníku ABC, utínají od jeho stran b a c části

$$y = \frac{bc}{a+c} \quad \text{a} \quad z = \frac{bc}{a+b},$$

obě vycházející z vrcholu A, který leží proti jeho straně a. Jest tedy plocha p_1 trojúhelníku o stranách y a z a úhlu jima sevřeného α,

$$p_1 = \frac{yzP}{bc} = \frac{bcP}{(a+b)(a+c)};$$

podobně jsou plochy p_2 a p_3 trojúhelníkův, majících s daným, společný úhel β a γ,

$$p_2 = \frac{acP}{(a+b)(b+c)} \quad \text{a} \quad p_3 = \frac{abP}{(a+c)(b+c)}.$$

A poněvadž

$$p = P - (p_1 + p_2 + p_3),$$

nabudeme, dosadíme-li za p_1, p_2 a p_3 svrchní hodnoty,

$$p = \frac{2abcP}{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

pročež

$$p : P = 2abc : (a+b)(a+c)(b+c).$$

Správné řešení zaslali pp.: *Bohuslav Mašek* z VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal p. *Jan Andres*, stud. VIII. tř. vyš. r. g. na Malé Straně v Praze.)

Spojíme-li středy daných kružnic přímkami, povstane trojúhelník o stranách $a = r_2 + r_3$, $b = r_1 + r_3$, $c = r_1 + r_2$ a ploše

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$= \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}.$$

Abychom obdrželi hledanou plochu p, třeba odečísti od plochy P plochu tří rovnoramenných trojúhelníků, jejichž ramena jsou poloměry kružnic daných. Jest tedy

$$p=\mathrm{P}\left\{1-\frac{r_1^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}-\frac{r_2^2}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}-\frac{r_3^2}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}\right\}$$

$$=\frac{2r_1r_2r_3\mathrm{P}}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)}$$

a konečně dosadíme-li hodnotu za P,

$$(m)\qquad p=\frac{2r_1r_2r_3\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Bohumil Novák* ze VI. tř. g. v Táboře, *A. Smolík* z VIII. tř. v Budějovicích, *Alois Petránek*, stud.v Praze, *Lud. Novotný* a *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Herzán* ze VI. tř. r. a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Frant. Navrátil* a *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli a *Bohuslav Mašek* z VIII. tř. gymn. v Truhlářské ulici v Praze.

Řešení správné — ač ne úplné — zaslali pp.: *Josef Voračka* ze VII. tř. r. v Písku, *Ant. Vík* z VIII. tř. v Nov. Bydžově, *Adolf Novotný* ze VI. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Jos. Vančura* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *Josef Hauser* a *Frant. Novotný* stud. v Praze.

Pan prof. *Vavř. Jelínek,* který tuto úlohu proponoval, zaslal ji ještě v podobě této:

Trojúhelníku plochy P lze obepsati kružnici o poloměru R a vepsati kružnici o poloměru r. Jak velká jest plocha trojúhelníku p, jehož vrcholy jsou dotyčné body kružnice vepsané do trojúhelníku daného?

Poněvadž hodnota poloměru vepsané kružnice

$$r=\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$$

a obepsané kružnice

$$\mathrm{R}=\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)}{4\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}},$$

nabude vzorec (m) podoby

$$p=\frac{r\mathrm{P}}{2\mathrm{R}}.$$

Úloha 22.

Železniční vlak ujel, hnán jsa parou, se zrychlením z_1 dráhu s_1, a pak bez páry ještě dráhu s_2, až zůstal státi. Jak dlouhou dobu t by tedy musela pára účinkovati, aby vlak podobným způsobem ujel daleko s? Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 23.

Dvě shodné nádoby o svisných pobočních stěnách mají v rovných výších rovně velké otvory. Nad každým otvorem stojí K vody. Otevřeme-li současně oba otvory, vyteče za nějakou dobu z druhé nádoby o D vody méně než z první, poněvadž v této byla voda přítokem udržena při stálé výši. Kolik vody K_1 muselo zatím do první nádoby natéci? *Týž.*

Úloha 24.

Má se dokázati, že $2^{2n+1}+1$ jest vždy 3 dělitelno.

Prof. *Karel Pánek.*

Úloha 25.

Lichoběžník jest rozděliti přímkou rovnoběžnou s rovnoběžnými stranami na dva lichoběžníky v poměru $\mu : \nu$.

Prof. *Josef Novotný.*

Úloha 26.

V kolik částí dělí se rovina n různoběžkami?

Prof. *A. Sucharda.*

Úloha 27.

V rovině ellipsy pohybuje se proměnný trojúhelník pravoúhlý, mající jednu odvěsnu stále s daným průměrem ellipsy stejnosměrnou (rovnoběžnou), vrcholem pravého úhlu po této křivce a druhým koncem této odvěsny po průměru onomu sdruženém; při tom přepona jest stejnosměrna s normalou ellipsy ve vrcholu pravého úhlu. Které jest geometrické místo třetího vrcholu?

Týž.

Úloha 28.

Na vodorovné desce spočívá koule poloměru $r = 14{\cdot}4\ cm$, osvětlená svící, která má výšku $v = 45\ cm$ a stojí ve vzdálenosti $u = 36\ cm$ od místa, kde se koule desky dotýká. V kterém poměru k ploše hlavního kruhu koule jest plocha stínu vrženého koulí na desku? Prof. *A. Strnad.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Čtvrtá roční zpráva o akademii obchodní v Chrudimi. *O půjčkách loterních a premiových a o pravděpodobné výnosnosti nejdůležitějších loterních půjček rakouských.* Sepsal *Jan Koloušek.* (32 stran).

Poněvadž půjčky loterní a premiové náležejí mezi půjčky annuitní vůbec, lze předloženou práci považovati za doplněk v předloňské zprávě téhož ústavu uveřejněného pojednání prof. Ctibora „o půjčkách annuitních," o němž jsme svého času na tomto místě pojednali.

Pan spisovatel vyloživ, v čem liší se půjčky loterní od premiových, obrací pozornosť k půjčkám, při nichž premie i výhra rostou arithmetickou řadou; na to vysvětluje zásady loterních půjček súročitelných a stanoví výrazy pro vypočítávání částky, již možno v případě tomto buď jen výhrám věnovati, nebo přebytečnou část annuity rozděliti dílem na premie pro všecky losy, dílem na výhry. Sem náleží úloha ustanoviti výšku premie, věnuje-li se celý zbytek annuit po zaplacení úroků jen na premie — úloha vedoucí k řešení rovnice n tého stupně. Pan spisovatel ukazuje zde, jak ve zvláštním případě na základě regule falsi a nekonečných řad nalézti lze přibližné výsledky, užívaje s výhodou tabulek Thomanových, jimž dává přednosť před tabulkami Spitzerovými. Konečně pojednal o půjčkách, jichž annuity postupují arithmetickou řadou. — Z tohoto obsahu první části patrno, že pan spisovatel nevyhnul se žádné důležitější úloze sem náležející, a látku co nejpečlivěji upravil a roztřídil.

V druhé části pojednání: „O pravděpodobné výnosnosti nejdůležitějších loterních půjček rakouských" podstoupil pan spisovatel v skutku herkulskou práci sestavením tabulky, obsahující pravděpodobné hodnoty 23 rakousko-uherských losů při ročním úrokování 5%, 4%, 3%, 2%, 1% a 0% a pravděpodobné výnosnosti jejich podle kursu ze dne 20. června 1886.