J. S. Vaněček

Geometrie u Indů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 3, 127--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122769`

Geometrie u Indů.

Napsal

J. S. Vaněček v Jičíně.

(Pokračování.)

Bhaskara Acharya.

Spisy Bhaskarovy jsou, jako Brahmeguptovy, mathematické. V jednom probírá *arithmetiku* a nazývá jej *lilavati*, v druhém pak *algebru* a zove jej *bija ganita*.

Geometrie jest obsažena v *lilavatě*, kdež zabírá hlavy VI. až XI. s odstavci od 133—247.

Hlava VI. jest nejznačnější; pojednává o rovinných obrazcích. Ostatní probírají tytéž úlohy a mají tytéž nadpisy jako u Brahmegupty.

Bija Ganita obsahuje též některé úlohy z geometrie, jež jsou jaksi dokladem na užívání pravidel v algebře a jsou řešeny počtem. Též některé úlohy algebraické jsou tam dokázány cestou geometrickou. K těmto jakoby ostrůvkům geometrickým přihlédneme po probrání vlastní geometrické části.

Geometrickou část rozvrhneme na 5 dílů.

První tři vztahují se k trojúhelníku vůbec, k trojúhelníku pravoúhlému a ke čtyrúhelníku. Čtvrtá obsahuje některé úlohy o kruhové čáře, a pátá zavírá v sobě pravidla pro měření prostoru a oddělení pro užívání gnomonu.

Připojená čísla značí opět jednotlivé odstavce (paragrafy) původního spisu.

První díl.

Úlohy o trojúhelníku.

1. Věta o čtverci přepony. 134.
2. Výraz pro úseky vytvořené výškou na základně trojúhelníku. 163—166.
3. Plošný obsah trojúhelníku jest roven polovině součinu ze základny a výšky. [1]) 164.

---

[1]) Vykladatel *Ganesa* podává jiný důkaz vypočítání plošného obsahu trojúhelníka, než jakému jsme zvyklí dle Euklida. *Cantor* pg. 558. Základnu trojúhelníka nechává základnou pro obdélník, který má polovinu výšky daného trojúhelníku. Se základnou rovnoběžná strana

4. Formule, která podává plošný obsah trojúhelníku jako funkce jeho stran. 167.
   O tom promluvíme později při čtyrúhelníku.

Druhý díl.

O trojúhelníku pravoúhlém.

1. Pravidla pro sestrojení trojúhelníku pravoúhlého v číslech racionálných;
   když jest dána jedna strana. 139—141, 143, 145;
   když jest dána přepona. 142, 144, 146.
2. Sestrojení trojúhelníku pravoúhlého, když je známa jedna jeho strana a součet neb rozdíl druhé strany a přepony 147, 153.
3. Pravidlo o určení bodu na jedné straně trojúhelníku pravoúhlého, aby součet vzdáleností toho bodu od konců přepony byl roven součtu obou odvěsen. 154, 155.
4. Sestrojení trojúhelníku pravoúhlého, když je známa jeho přepona a součet neb rozdíl obou odvěsen.

Třetí díl.

Úlohy o čtyrúhelníku.

1. Polovina součtu stran napíše se čtyřikrát, od každého se odečtou jednotlivě strany, a ze zbytků těch utvoří se součin. Druhý kořen z tohoto součinu jest plošným obsahem *nepřesným* pro čtyrúhelník, avšak přesným pro trojúhelník. 167, 168.
   Jest to formule Brahmeguptova, kterou Bhaskara opsal, aniž jí rozuměl a aniž poznal, že jest zde řeč o čtyrúhelníku, vepsaném do kruhové čáry. Proto též praví, že je nepřesnou pro čtyrúhelník, jakož i že jest nesmyslné hledati plošný obsah čtyrúhelníku, ve kterém jsou známy pouze jeho strany, poněvač se z těch stran může sestrojiti více rozličných čtyrúhelníků.
   Ani *Suryadasa*, autor dvou výtečných výkladů lilavati a bija ganity nezdá se, že byl dovednějším Bhaskary v porozumění Brahmeguptovi.

---

obdélníku v polovině výšky utíná od trojúhelníku jiný, který je výškou rozdělen ve dva pravoúhlé trojúhelníky, které se rovnají trojúhelníkům, scházejícím po obou stranách výšky do obdélníku. Důkaz je velmi názorným a dostal se k nám prostřednictvím Arabův.

2. Plošný obsah kosočtverce rovná se polovině součinu obou úhlopříčen. Obsah obdélníku jest součin základny a výšky. 174.
3. Plošný obsah čtyrúhelníku, jehož obě kolmice jsou stejné (lichoběžník) se rovná součinu z polovičního součtu obou základen a kolmice. 175, 177.
4. V kosočtverci rovná se součet čtverců obou úhlopříčen čtyrnásobnému čtverci strany. 173, 175.
5. Formule, jež podávají úseky, které vytvořují úhlopříčny čtyrúhelníku, jehož oba boky jsou kolmé k základně, jedna na druhé svým protnutím; jakož i výraz kolmice, vedené z tohoto průsečného bodu na základnu. 159, 160.
6. Když jsou známy strany čtyrúhelníku a jedna z jeho úhlopříčen, má se nalézti druhá úhlopříčna, kolmice čtyrúhelníku a jeho plošný obsah. 178—184.
   Plošný obsah jest roven součtu obsahů dvou trojúhelníků, jež mají známou úhlopříčnu za společnou základnu. 184. Všecky tyto úlohy nečiní žádných obtíží. Jich řešení zakládá se na úměrnosti stran v stejnoúhlých trojúhelnících.
7. Pravidlo o sestrojení čtyrúhelníku, jehož obě kolmice jsou stejné, když jsou známy všecky jeho strany. 185, 186.
8. Pravidlo pro nalezení úhlopříčen čtyrúhelníku. 190.
9. Výpočet úseků, které tvoří úhlopříčny, kolmice a prodloužené strany čtyrúhelníku jedny na druhých. 193—200.

Předpokládá známé strany, úhlopříčny a kolmice. Všecky tyto výpočty jsou lehké, zakládajíce se, jak praveno, na úměrných stranách stejnoúhlých trojúhelníků.

Tyto jsou úlohy o čtyrúhelníku a tvoří s oněmi, jež se vztahují ke trojúhelníku, část Bhaskarova díla, jež odpovídá 18 prvním odstavcům Brahmeguptovým.

Než přikročíme k ostatním úlohám Bhaskarovým, probéřeme odchylky předešlých od Brahmeguptových, jichž jsou pouhým nápodobením.

Odchylky ty vztahují se k následujícím bodům.

1. Všecky úlohy Bhaskarovy nevztahují se na kruhovou čáru, jakž se však děje v odstavcích 26 a 27 u Brahmegupty, což tvoří základ mnoha jiných úloh.

2. Formuli pro vypočítání plošného obsahu čtyrúhelníka (vepsaného do kruhové čáry), podanou Brahmeguptou, prohlásil Bhaskara nepřesnou.
3. Všeobecný výraz úhlopříčen vepsaného čtyrúhelníku, podaný Brahmeguptou, jest Bhaskarou zavržen, jakožto vyžadující pracného počítání, a jest jím považován jakoby se dal užiti jen při čtyrúhelníku zvláštní konstrukce.
4. Některé úlohy Brahmeguptovy nenalézají se v díle Bhaskarově. Tyto jsou:

první: výraz pro vypočítání průměru kruhové čáry opsané trojúhelníku neb čtyrúhelníku;

druhá: výraz pro vypočítání průměru kruhové čáry opsané zvláštnímu čtyrúhelníku, který má úhlopříčny k sobě kolmé;

třetí: vlastnosť tohoto čtyrúhelníku, a sice ta, že kolmice, vedená z průseku obou úhlopříčen na jednu stranu čtyrúhelníku, prochází středem jí protilehlé strany;

čtvrtá: způsob sestrejení trojúhelníku rovnoramenného aneb nerovnostranného, když jsou jeho strany a výška dány čísly racionálnými;

pátá: způsob sestrojení čtyrúhelníku vepsatelného do kruhové čáry, jehož dvě protilehlé neb 3 strany jsou stejné, a jehož všecky části, jakož i průměr kruhové čáry, jsou dány čísly racionálnými.

Opomenutí těchto posledních úloh (čtvrté a páté) ve spise Bhaskarově dokazuje, že tento geometr neměl na zřeteli úlohu: sestrojiti čtyrúhelník vepsaný do kruhové čáry, a jehož všecky části jsou racionálnými.

Tak zase obsahuje Bhaskarův spis mnohé úlohy o trojúhelníku pravoúhlém, jež se nenalezají ve spise Brahmeguptově, a které by byly skutečně cizími duchu Brahmeguptova díla.

Bhaskarův spis nezabývá se jediným předmětem. Můžeme jej rozděliti ve tři hlavní části od sebe neodvislé.

V první podává výraz pro kolmici v trojúhelníku a formuli pro vypočítání plošného obsahu tohoto obrazce jako funkci tří stran.

V druhé probírá konstrukci pravoúhlého trojúhelníku v číslech racionálných a mnohé úlohy takovéhoto trojúhelníku.

V třetí pak vypočítává autor rozličné linie v libovolném čtyrúhelníku, jehož strany a jedna úhlopříčna jsou známy.

Odchylky mezi oběma spisy jsou četné. Avšak nepřihlížejíce k nim, seznáváme, že novější dílo není než opis prvního; opis to nedokonalý a znetvořený, což patrně dokazuje, že Bhaskara neporozuměl dílu Brahmeguptovu. Totéž platí o rozličných vykládačích, již připojili své poznámky k *lilavatě.*

Naproti tomu mají úlohy v VI. hlavě *lilavati* mnohem větší cenu oněch, jež jim odpovídají v pojednání Brahmeguptově. Probéřeme hlavní, ve kterých shledáváme velmi přibližný poměr délky kruhové čáry k průměru a velmi jednoduchou formuli pro přibližné vypočítání tětivy jako funkce příslušného oblouku.

Když jest průměr kruhové čáry d, pak jest $d\,\frac{3927}{1250}$ téměř délka kruhové čáry; $d\,\frac{22}{7}$ je přibližná hodnota, jaké se užívá v praktickém životě. 201.

Tyto dva výrazy nevyskytují se v díle Brahmeguptově. Poměr $\frac{22}{7}$ náleží Archimedovi. První zlomek $\frac{3927}{1250}$ jest přesnější, poněvač se rovná 3.14160, kdežto $\frac{22}{7} = 3{\cdot}1428571\ldots$ Abychom obdrželi ještě větší příbližnosť, museli bychom vzíti poměr 3·1415926 . . .

Velká příbližnosť tohoto poměru u Indů jest pozoruhodna, protože užívá malých čísel. [1]) Vždy však jest přesnější poměr $\frac{355}{113} = 3{\cdot}14159292\ldots$, který podal *Adriaan Metius.*

Pravidlo. Čtvrtina průměru, násobena obvodem kruhu, rovná se ploše kruhové. Tento obsah, znásoben čtyrmi, rovná

[1]) Poměr $\frac{3927}{1250}$ nenáleží však Bhaskarovi, jest mnohem starší než tento geometr. Již *Mohamed ben Musa* podav ve své Algebře poměr $\frac{22}{7}$ a $\sqrt{10}$ praví, že hvězdáři užívají třetího poměru $\frac{62832}{20000}$. Na ukázku, komu přece náleží prvenství tohoto poměru, odpovídá *Rosen* i *Libri,* že *Indům.*

se ploše kulové. Tato plocha znásobena průměrem a rozdělena šesti, jest přesná hodnota (kubického) obsahu koule.

Pravidlo. Budiž d průměr kruhové čáry; $\frac{3927}{5000} d^2$ jest dosti přesně určený plošný obsah kruhové čáry; $\frac{11}{14} d^2$ jest méně přesný obsah, užívaný v praxi. $\frac{d^3}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{d^3}{2}$ jest kubický obsah koule. 205, 206.

Je-li poloměr kruhové čáry roven 2000, pak jsou strany rovnostranného trojúhelníku a ostatních pravidelných obrazců tyto: v trojúhelníku $1732\frac{1}{20}$; ve čtyrúhelníku $1414\frac{13}{60}$; v pětiúhelníku $1175\frac{17}{30}$; v šestiúhelníku 1000; v sedmiúhelníku $867\frac{7}{12}$; v osmiúhelníku $765\frac{11}{30}$; a v devítiúhelníku $683\frac{17}{20}$. Odstavce 209—212.

Následující pravidlo ukazuje, jakby se našly rychle, avšak ne dosti přesně, tetivy.

Budiž c délka kruhové čáry, a oblouk, d průměr a e tetiva; pak jest

$$e = \frac{4ad\,(c - a)}{\frac{5}{4}\,c^2 - a\,(c - a)}.$$

Tato formule je prazvláštní, a bylo by zajímavo seznati jak k ní Indové dospěli.

Formule pro oblouk a jako funkci tetivy e kruhové čáry c o průměru d jest tato:

$$a = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}\,c^2 e}{4d + e}}.$$

Tuto formuli obdržíme z předešlého, řešíme-li rovnici druhého stupně.

Ve spise *bija ganita* jsou řešeny mnohé geometrické úlohy počtem a mnohá algebrická pravidla řešena pomocí geometrie. Všecky tyto úlohy jsou vyloženy se zvláštní přesností a elegancí.

Při úlohách, které připouštějí několik způsobů řešení, užívá autor vždy nejjednoduššího, tak že se čtoucímu zdá, jakoby procházel některá místa výtečné Newtonovy *všeobecné arithmetiky.*

Některé z nich vyžadují řešení neurčitých rovnic druhého stupně. Na př. mají se nalézti (v číslech racionálných) strany pravoúhlého trojúhelníku, jehož plošný obsah jest vyjádřen týmž číslem jako přepona, nebo se rovná součinu všech tří stran.

V prvním případě jsou strany tyto $\frac{20}{6}$, $\frac{15}{6}$ a $\frac{25}{6}$; v druhém pak jsou $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$ a $\frac{5}{10}$.

Závěrečné úvahy.

Z těchto úryvků seznáváme, že Indové, alespoň za doby Bhaskarovy, užívali algebry v geometrii a naopak. Ve spise Brahmeguptově tuto vzájemnou službu obou mathematických vět ještě neshledáváme. Možno, že příčina toho leží v tom, že tento autor psal mnohem stručněji než Bhaskara; neboť Brahmeguptův spis obsahuje mnohem méně příkladů na algebrická pravidla a nepodává žádných důkazů. Avšak můžeme se domnívati, že tento způsob spojovati algebru s geometrií jest staršího datum, než až z dob Bhaskarových, neboť jest též karakteristickým pro spisy Arabské (na př. Mohamed ben Musa, 11. století). Arabové je mohli čerpati jen od Indů, neboť Řekové obě vědy takto nevázali.

Že Indové užívali algebry v geometrii a naopak algebrické úlohy řešili pomocí geometrie, můžeme se domnívati, že dospěli k řešení neurčitých rovnic druhého stupně jenom cestou geometrickou.

Budiž na doklad této domněnky uvedeno toto. *Lucas di Borgo* mluví ve svém spise o *pojednání o číslech zdvojmocněných* od *Leonarda Pisanského*, ve kterém se nalézá rovnice

$$x^2 + y^2 = a$$

řešena *pomocí obrazců geometrických.* Formule Leonardovy jsou však tytéž, k nimž dospěl Brahmegupta. Leonard Pisanský nabyl však svých mathematických vědomostí v Arabii. Tedy můžeme směle tyto formule přiřknouti Arabům a domnívati se, že je tito přijali od Indů.

Jelikož Bhaskara již vázal geometrii s algebrou a naopak, kdežto Brahmegupta užíval čisté geometrie, dále pak, že Bhaskara spis tohoto znetvořil, aby napsal svůj, jakož i poznámky mnohých vykládačů nasvědčují tomu, že již nerozumělo se v pozdějším čase duchu Brahmeguptovu, a že geometrie nalézala se u Indů již v úpadku.

Tak již Bhaskara nevyslovuje *třicet devět*, nýbrž po latinském způsobu *čtyřicet méně jedné*, ač Brahmegupta ještě správně tak činí.

O stavu vědy ani za času Brahmegupty nemůžeme správně souditi, zdaž byla všeobecně na tom stupni, na jakém se nalézají díla Brahmeguptova; neboť nám chybí z těch dob všecky jiné prameny. Kdož ví, nepodávají-li oba spisy Brahmeguptovy jenom zlomky vědomostí, jaké měli Indové ve starém věku, a které on jenom zachytil, aby je před zapomenutím zachránil.

Učený Hollanďan *Stévin* [1]) domníval se, že byl kdysi *učený věk*, ve kterém měli lidé podivuhodnou známosť věd, a který předcházel věku řeckému, z něhož Řekové měli již jen slabé upomínky vědecké. Kdyby býval znal uvedený chod vědy u Indů, byl by býval zajisté jen tím více o svém náhledu přesvědčen.

Příspěvek k odvozování nekonečných řad a stanovení jich součtů pomocí omezených integralů.

Podává

V. Řehořovský v Praze.

Omezených integralů s výhodou užívá se k odvozování nekonečných řad a často i ku stanovení jich součtu; takřka z každé řady nekonečné, která neobsahuje samá čísla, ale i obecné veličiny, možno odvoditi jednu aneb celou řadu nových nekonečných řad; aby však i součty těchto řad udány býti mohly, nutno předně, aby znám byl součet řady původní, z které vycházíme, za druhé pak, abychom byli v stavu objevující se v počtu omezený integral v konečném tvaru vyčísliti. Že tu jak řada původní tak i řady odvozené vesměs konvergentní býti musí, rozumí se samo sebou, an jinak o jich součtech nemůže býti řeči; podotýkáme pouze, že meze konvergence řad za

[1]) Oeuvres mathématiques de Simon Stévin, Leyde, 1634.