Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 4, 289--320

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122754

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$x^3(x^2+1)-8x^2(x-1)=\frac{4(x^3+1)-x^2(x-1)}{4}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emerich Brinkmann*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnice daná v podobě annulované

$$4x^5-31x^3+31x^2-4=0$$

čili

$$(x-1)(4x^4+4x^3-27x^2+4x+4)=0,$$

rozpadá se ve dvě.

První z nich, $x-1=0$, poskytuje kořen

$$x_1=1;$$

druhá jest převratnou rovnicí stupně čtvrtého

$$4x^4+4x^3-27x^2+4x+4=0.$$

Tato substitucí

$$x+\frac{1}{x}=z$$

přechází v rovnici

$$4z^2+4z-35=0,$$

z níž ustanovíme

$$z_1=\frac{5}{2},\quad z_2=-\frac{7}{2}.$$

Z rovnic

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2}$$

vypočítáme kořeny

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_{4,5} = \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{33}).$$

Úloha 2.

Kolik kladných celistvých řešení má rovnice

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Robert Čech,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Rovnice

$$ax + by = c$$

má o 1 kladné celistvé řešení více než jest počet celých jednotek v podílu $p = c : ab$. Zbavíme-li danou rovnici zlomků, nabude tvaru

$$2x + 3y + 4z = 24,$$

z něhož patrno, že při daných podmínkách musí býti

$$z \leqq 6.$$

Kladouce tedy postupně $z = 0, 1, 2, \ldots, 6$, a znamenajíce písmenem r počet celistvých kladných řešení, nullová řešení v to počítajíce, obdržíme

při	$z = 0$	rovnici	$2x + 3y = 24,$	$p = 4,$	$r = 5,$
„	$z = 1$	„	$2x + 3y = 20,$	$p = 3,$	$r = 4,$
„	$z = 2$	„	$2x + 3y = 16,$	$p = 2,$	$r = 3,$
„	$z = 3$	„	$2x + 3y = 12,$	$p = 2,$	$r = 3,$
„	$z = 4$	„	$2x + 3y = 8,$	$p = 1,$	$r = 2,$
„	$z = 5$	„	$2x + 3y = 4,$	$p = 0,$	$r = 1,$
„	$z = 6$	„	$2x + 3y = 0,$	$p = 0,$	$r = 1.$

Pročež rovnice daná poskytuje 19 řešení žádaných.

Úloha 3.

Které úhly nepřesahující 360° činí zadost rovnici

$$tg\,x + tg^3 x + tg^5 x + \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{sin^2 x + sin^4 x + sin^6 x + \ldots}$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Stanislav Linhart,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Sečtouce nekonečné řady geometrické na obou stranách rovnice, dáme jí podobu

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}}$$

čili

$$\operatorname{tg} 2x = \pm \operatorname{tg} x.$$

Rovnici této se vyhoví, je-li

$$2x = 2n\mathrm{R} \pm x,$$

tudíž při

$$x = 0, \quad 60^0, \quad 120^0, \quad 180^0, \quad 240^0, \quad 300^0, \quad 360^0.$$

Úloha 4.

Sestrojiti úhel x dle úměry

$$sin\,2x : sin\,3x = m : n.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Kitzberger*, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích.)

Úměra daná jest rovnomocná s úměrou

$$2 \sin x \cos x : (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = m : n,$$

která krácením nabývá tvaru

$$2 \cos x : (4 \cos^2 x - 1) = m : n$$

čili

$$4m \cos^2 x - 2n \cos x - m = 0.$$

Odtud vyplývá výraz

$$\cos x = \frac{1}{4m}\left(n \pm \sqrt{n^2 + 4m^2}\right)$$

vedoucí k tomuto sestrojení:

Zvolme osy $X \perp Y$; z počátku o opišme kružnici K poloměrem $2m$, přenesme na X úsečku $\overline{oa} = \frac{n}{2}$, na Y pořadnici $\overline{ob} = m$, na X pak ještě $\overline{ac} = \overline{ad} = \overline{ab}$.

Kolmice vztyčené v bodech c, d ku X protínají K v bodech 1, 2, 3, 4, načež polopaprsky

$$01, \quad 02, \quad 03, \quad 04$$

svírají s kladným směrem osy X úhel žádaný.

Poznámka. Při $m = 6$, $n = 5$ jest

$$\cos x = \frac{3}{4} \quad \text{aneb} \quad \cos x = -\frac{1}{3}.$$

Úloha 5.

Ustanoviti úhel x dle úměry

$$tg\, 2x : tg\, 3x = m : n.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Holzmann*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Vyjádříme-li funkce úhlu $2x$, $3x$ funkcemi úhlu jednoduchého, obdržíme

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} : \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = m : n.$$

Odstraníme-li činitele $\operatorname{tg} x$ vedoucího k řešení $\operatorname{tg} x = 0$ a upravíme-li, dospějeme k rovnici

$$2n\,(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x) = m\,(3 - \operatorname{tg}^2 x)\,(1 - \operatorname{tg}^2 x);$$

tato pak annulována jeví se ve tvaru

$$m \operatorname{tg}^4 x - 2\,(2m - 3n) \operatorname{tg}^2 x + 3m - 2n = 0,$$

a poskytuje řešení

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}\left[\,2m - 3n \pm \sqrt{(m-n)\,(m-9n)}\,\right]}\,.$$

Je-li na př. $m = 5$, $n = 14$, obdržíme

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Úloha 6.

Nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka sestrojeny „měsíčky Hypokratovy“ a do každého vepsána největší kružnice. Dokázati jest:

a) Průměr každé této kružnice rovná se poloměru kružnice vepsané v daný trojúhelník.

b) Vzdálenost středu každé této kružnice od středu přepony rovná se $\frac{1}{4}$ obvodu daného trojúhelníka.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Eman Hájek,* učitel v Kloboukách u Brna.)

V pravoúhlém trojúhelníku abc buďtež odvěsny

$$\overline{bc} = a, \quad \overline{ac} = b$$

a přepona

$$\overline{ab} = c;$$

poloměr kružnice vepsané budiž ϱ. Dotyčným bodem této kružnice dělí se přepona v části $a - \varrho$, $b - \varrho$; tudíž jest

$$c = a - \varrho + b - \varrho, \quad \varrho = \frac{a + b - c}{2}.$$

Kružnice K_1 vepsaná v měsíček nad obloukem $\widehat{bc}$ má střed s_1, poloměr ϱ_1; obdobně označme střed i poloměr kružnice K_2 vepsané v měsíček nad obloukem $\widehat{ac}$. Jest pak

$$2\varrho_1 = \frac{a}{2} - \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right) = \frac{a + b - c}{2},$$

$$2\varrho_2 = \frac{b}{2} - \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a + b - c}{2},$$

pročež

$$2\varrho_1 = 2\varrho_2 = \varrho.$$

Je-li s střed přepony, jest

$$\overline{ss_1} = \frac{c}{2} + \varrho_1 = \frac{a+b+c}{4},$$

$$\overline{ss_2} = \frac{c}{2} + \varrho_2 = \frac{a+b+c}{4}.$$

Tím obě tvrzení dokázána.

Úloha 7.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. V kterém poměru jsou obsahy všech tří osmiúhelníků?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Matas,* stud. VII. tř. real. v Kutné Hoře.)

Poloměr kružnice opsané osmiúhelníku pravidelnému budiž r; potom jest obsah jeho

$$A = 4r^2 \sin 45^0 = 2r^2\sqrt{2}.$$

Uhlopříčky, spojující vrcholy osmiúhelníka ob jeden, omezují osmiúhelník druhý, obsahu B a poloměru kružnice opsané r_1. Poloměr tento rovná se straně a osmiúhelníka původního, tudíž

$$r_1 = a = 2r \sin 22\frac{1^0}{2} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Úhlopříčky, spojující vrcholy daného osmiúhelníka ob dva, omezují třetí osmiúhelník, jehož obsah jest C a poloměr kružnice opsané

$$r_2 = \frac{a}{\cos 22\frac{1^0}{2}} = r \operatorname{tg} 22\frac{1^0}{2} = r(\sqrt{2}-1).$$

Obsahy všech tří osmiúhelníků jsou tedy v poměru

$$A : B : C = r^2 : r_1^2 : r_2^2 = 1 : (2-\sqrt{2}) : (\sqrt{2}-1)^2$$

čili

$$A : B : C = (\sqrt{2}+1) : \sqrt{2} : (\sqrt{2}-1).$$

Úloha 8.

Do kružnice vepsán čtyrúhelník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Součet dvou protějších stran jest 89, součet druhých dvou stran 91; součet dvou sousedních stran jest o 10 větší než součet druhých dvou stran. Ustanoviti jest strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka, jakož i poloměr kružnice opsané.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Novák*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Strany čtyrúhelníka vypočítáme z rovnic

$$a + c = 89$$
$$b + d = 91$$
$$(a + b) - (c + d) = 10$$
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Z prvních tří rovnic vyjádříme

$$c = 89 - a, \quad b = 95 - a, \quad d = a - 4,$$

načež dosazením do rovnice čtvrté nalezneme

$$a = 56, \quad b = 39, \quad c = 33, \quad d = 52.$$

Dle známých vzorců ustanovíme pak úhlopříčky

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} = 60,$$

$$m = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} = 64{\cdot}6,$$

obsah čtyrúhelníka

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)} = 1938;$$

poloměr kružnice opsané

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}} = 32{\cdot}5.$$

Úloha 9.

a) Bod o v rovině má od vrcholů pravoúhlého trojúhelníka abc vzdálenosti

$$\overline{oa} = x, \; \overline{ob} = y, \; \overline{oc} = z.$$

Které podmínce činí zadost tyto vzdálenosti, jsou-li odvěsny trojúhelníka

$$\overline{ca} = b, \; \overline{cb} = a?$$

b) Je-li

$$a = \sqrt{3}, \; b = \sqrt{6}, \; x = \sqrt{13}, \; y = \sqrt{10},$$

vypočítati jest z.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *F. Vitáček,* stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

a) Označme

$$\sphericalangle aco = \alpha,$$

potom jest

$$x^2 = b^2 + z^2 - 2bz \cos \alpha$$
$$y^2 = a^2 + z^2 - 2az \sin \alpha.$$

Žádanou podmínku obdržíme, vyloučíce z rovnic těchto úhel α. Jelikož

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + z^2 - x^2}{2bz}, \quad \sin \alpha = \frac{a^2 + z^2 - y^2}{2az},$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

jest žádaná podmínka

$$\left(\frac{b^2 + z^2 - x^2}{2bz}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + z^2 - y^2}{2az}\right)^2 = 1$$

čili

$$a^2 (b^2 + z^2 - x^2)^2 + b^2 (a^2 + z^2 - y^2)^2 = 4a^2b^2z^2.$$

b) Podmínka tato při daných hodnotách přechází v rovnici

$$(z^2 - 7)^2 = 8z^2$$

čili

$$z^4 - 22z^2 + 49 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$z = \pm\sqrt{11 \pm \sqrt{72}} = \pm(3 \pm \sqrt{2}).$$

Hledíme-li toliko k hodnotám kladným, obdržíme

$$z_1 = 3 + \sqrt{2}, \quad z_2 = 3 - \sqrt{2}.$$

Poznámka redakce.

Řešíme-li hořejší rovnici dle z^2, nalezneme

$$z^2 = \frac{1}{c^2}(a^2x^2 + b^2y^2 \pm \sqrt{D});$$

při tom značí $c^2 = a^2 + b^2$ čtverec přepony daného trojúhelníka, D pak jest diskriminant

$$D = (a^2x^2 + b^2y^2)^2 - c^2[a^2x^4 + b^2y^4 - 2a^2b^2(x^2 + y^2) + a^2b^2c^2].$$

Náležitým upravením lze výrazu tomuto dáti podobu

$$\begin{aligned} D &= a^2b^2(x + y + c)(x + y - c)(x - y + c)(-x + y + c) \\ &= 16a^2b^2\Delta^2, \end{aligned}$$

kdež Δ označuje obsah trojúhelníka ze stran x, y, c.

Jest potom

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = \pm 4ab\Delta.$$

Úloha 10.

Do válce kruhového vepsána koule dotýkající se základny i obliny jeho. Který úhel tvoří se základnou válce tečná rovina koule, odtíná-li od válce část rovnou n-násobnému obsahu koule?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Felix Vyskočil*, stud. VII. tř. real. v Ječné ul. v Praze.)

Užijme tohoto označení: poloměr válce budiž r, délka osy jeho mezi základnou a řezem budiž v, rovina tečná ke kouli a sečná k válci tvoří se základnou tohoto úhel α. Potom jest obsah válce

$$V = \pi r^2 v = \pi r^3 \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Dle podmínky v úloze vyslovené jest

$$\pi r^3 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = n \,.\, \frac{4}{3}\pi r^3,$$

tudíž

$$\cos\alpha = \frac{3}{4n-3}.$$

Při tom

$$v = r\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}nr.$$

Průsečnice roviny dané se základnou má od středu této vzdálenost

$$u = v \operatorname{cotg}\alpha = r \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$u = r\sqrt{\frac{2n}{2n-3}}.$$

Je-li na př. $n = 2$, dojdeme výsledků

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad v = \frac{8}{3}r, \quad u = 2r.$$

Úloha 11.

Na průměru $\overline{ab}$ sestrojena polokružnice K a k ní v bodě b tečna T. Vésti bodem a sečnu protínající K v bodě c a T v bodě d tak, aby otočí-li se celý tento útvar kolem osy $\overline{ab}$, úseč na tetivě $\overline{ac}$ vytvořila těleso téhož obsahu jako je těleso vzniklé otočením se plochy omezené úsečkami $\overline{bd}$, $\overline{cd}$ a obloukem $\widehat{bc}$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vajgl,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Budiž A obsah tělesa vytvořeného otočením se úseče, B obsah tělesa druhého.

Značíme-li

$$\overline{ab} = 2r\,,\ \overline{bd} = \mathrm{R}\,,\ \sphericalangle\, bac = \alpha,$$

máme vztah

$$\mathrm{B} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 \,.\, 2r - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \mathrm{A}\right);$$

ježto má býti $A = B$, přechází tato rovnice v podmínku

$$\frac{1}{3}\pi R^2 . 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

čili

$$R^2 = 2r^2.$$

Poněvadž jest

$$R = 2r \operatorname{tg} \alpha,$$

musí úhel α vyhověti rovnici

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$$

a jest tedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Poznámka. Žádanou sečnu lze takto sestrojiti: Veďme poloměr $oc \perp ab$ a přenesme $bc = bd$. Nebo prodlužme průměr $\overline{ab}$ o délku $\overline{bf} = r$; kružnice na průměru $\overline{af} = 3r$ seče tečnu T v bodě hledaném d. Aneb veďme v kružnici K poloměr $\overline{og}$ v úhlu $bog = 45^0$, učiňme $oh \perp ab$, $gh \parallel ab$; $\overline{ah}$ stanoví hledanou sečnu. Konstrukce tyto čtenář snadně odůvodní.

Úloha 12.

Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek vycházející z bodu s dopadá na povrch koule středu o, je-li $\overline{os} = v = 17$ a poloměr koule $r = 8$?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Lang*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Opíšeme-li z bodu s dotyčný kužel ke kouli dané, tedy všechny polopaprsky obsažené uvnitř tohoto kužele dopadají na povrch dané koule. Poměr jich množství ku množství všech polopaprsků z bodu s vycházejících jest hledaná pravděpodobnost. Poměr ten lze vyjádřiti hodnotou

$$P = V : K,$$

kdež K značí povrch koule o středu s a poloměru $\varrho = \sqrt{v^2 - r^2}$, V pak vrchlík této koule obsažený uvnitř koule dané. Výška tohoto vrchlíku jest

$$u = \frac{r^2}{v} - (v - \varrho) = \varrho - \frac{\varrho^2}{v}$$

a proto pravděpodobnost

$$P = 2\pi\varrho u : 4\pi\varrho^2 = u : 2\varrho$$

čili
$$P = \frac{v - \varrho}{2v}.$$

Při daných hodnotách číselných jest

$$P = \frac{1}{17}.$$

Úloha 13.

Bodem (1·5, 3) stanoviti přímku, jejíž úseky na osách souřadných mají součet 10.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Julius Pollák*, stud. VII. tř. real. v Jičíně.)

Rovnice libovolné přímky jdoucí daným bodem jest

$$y - 3 = A\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili
$$2Ax - 2y = 3A - 6.$$

Úseky této přímky na osách souřadných vyjadřují se

$$a = \frac{3A - 6}{2A}, \quad b = \frac{3A - 6}{-2}.$$

Podmínka úlohy jest $a + b = 10$ čili dle výrazů předcházejících

$$\frac{3A - 6}{2A} - \frac{3A - 6}{2} = 10.$$

Odtud jde rovnice kvadratická

$$3A^2 + 11A + 6 = 0,$$

z níž vypočítáme směrnici A dvěma hodnotami

$$A = \frac{-11 \pm 7}{6},$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}, \quad A_2 = -3.$$

Při A_1 obdržíme přímku P_1 rovnicí

$$y - 3 = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili

$$P_1 \equiv 2x + 3y - 12 = 0;$$

úseky této přímky na osách jsou

$$a_1 = 6, \; b_1 = 4; \quad a_1 + b_1 = 10.$$

Směrnice A_2 náleží přímce P_2, jejíž rovnice jest

$$y - 3 = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

čili

$$P_2 \equiv 6x + 2y - 15 = 0;$$

přímka tato má úseky osové

$$a_2 = \frac{5}{2}, \; b_2 = \frac{15}{2}; \; a_2 + b_2 = 10.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Vojtěch Prokeš,* stud. VII. tř. g. na Smíchově.)

Rovnice hledané přímky ve tvaru úsekovém budiž

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

K určení úseků a, b slouží podmínečné rovnice

$$a + b = 10,$$

$$\frac{3}{2a} + \frac{3}{b} = 1;$$

vyloučíce b obdržíme

$$\frac{3}{2a} + \frac{3}{10 - a} = 1$$

čili

$$2a^2 - 17a + 30 = 0.$$

Odtud ustanovíme

$$a = \frac{17 \pm 7}{4}, \quad b = \frac{23 \mp 7}{4}$$

Úloha 14.

Stanoviti kružnici K_2 souměrnou s kružnicí

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 12x - 26y + 180 = 0$$

dle přímky

$$P \equiv x + 3y - 30 = 0;$$

vyšetřiti pak průsečíky a úhel obou kružnic. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Bartoš*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnici kružnice K_1 lze psáti ve tvaru normalním

$$(x - 6)^2 + (y - 13)^2 = 25.$$

Střed s_1 této kružnice má od přímky P vzdálenost

$$v = -\frac{x_1 + 3y_1 - 30}{\sqrt{10}},$$

kdež x_1, y_1 značí souřadnice středu s_1

$$x_1 = 6, \; y_1 = 13;$$

jest tedy

$$v = -\frac{15}{\sqrt{10}}.$$

Kružnice K_2 souměrná s K_1 dle přímky P bude míti rovnici

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = 25,$$

v níž x_2, y_2 jsou souřadnice středu s_2.

Střed tento ustanovíme jakožto průsečík přímky N vedené bodem s_1 kolmo ku P a přímky M || P u vzdálenosti $-v$.

Rovnice přímek těchto jsou:

$$N \equiv y - 13 - 3(x - 6) = 0$$

$$M \equiv \frac{x + 3y - 30}{\sqrt{10}} + \frac{15}{\sqrt{10}} = 0$$

čili

$$\begin{aligned} N &\equiv 3x - y - 5 = 0 \\ M &\equiv x + 3y - 15 = 0; \end{aligned}$$

průsečík jejich bod s_2 má souřadnice

$$x_2 = 3, \ y_2 = 4.$$

Jest tedy rovnice kruhu K_2 tato

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

čili

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Průsečíky obou kružnic náleží též přímce P; nejpohodlněji vypočítáme je z rovnic čar P a K_2. Vyloučíce x dojdeme k rovnici

$$\begin{gathered} (30 - 3y)^2 + y^2 - 6(30 - 3y) - 8y = 0, \\ y^2 - 17y + 72 = 0; \end{gathered}$$

odtud najdeme

$$y' = 8, \ y'' = 9$$

a k tomu

$$x' = 6, \ x'' = 3.$$

Směrnice tečen sestrojených v bodě (8, 6) k daným kružnicím jsou

$$A_1 = -\frac{x' - x_1}{y' - y_1} = 0, \ A_2 = -\frac{x' - x_2}{y' - y_2} = -\frac{3}{4};$$

úhel obou kružnic stanoví vzorec

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2},$$

z něhož plyne

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{3}{4}.$$

Úloha 15.

Stanoviti kružnici, která jest stejně vzdálena od bodů

$$a\left(6\frac{1}{4}, -1\right), \qquad b\left(5, 2\frac{3}{4}\right),$$

$$c\left(0, 5\frac{1}{4}\right), \qquad d\left(-3, 1\frac{1}{4}\right).$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ignát Velísek*, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Dány-li 4 body v obecné poloze, nelze stanoviti kružnici stejně od nich vzdálenou tak, aby všechny ležely na téže její straně, t. j. buď všechny vně aneb všechny uvnitř.

Lze však sestrojiti kružnici ve stejné vzdálenosti ode všech tak, že 3 body leží na jedné straně a 1 na druhé straně této kružnice aneb 2 body na jedné straně a 2 na druhé.

Případu prvnímu lze vyhověti takto:

Třemi z daných bodů položme kružnici K a sestrojme pak soustřednou k ní kružnici L, která jest od ní a od bodu čtvrtého stejně vzdálena. Tak obdržíme kružnice

$$K_{abc},\ K_{abd},\ K_{acd},\ K_{bcd}$$

a příslušné k nim kružnice

$$L_{abc,\,d},\ L_{abd,\,c},\ L_{acd,\,b},\ L_{bcd,\,a}.$$

Ve druhém případě sestrojme body a, b a c, d kružnice soustředné K_{ab}, K_{cd}; potom lze stanoviti soustřednou s nimi a od obou stejně vzdálenou kružnici $L_{ab,\,cd}$; podobně sestrojme $L_{ac,\,bd}$, $L_{ad,\,bc}$. Každá z kružnic L jest stejně vzdálena ode všech čtyř bodů; pročež úloha daná má v obecném případě 7 řešení.

Abychom vypočítali souřadnice středů a poloměry kružnic hledaných v číselném příkladě daném, ustanovme nejprve směrnice a středy úseček *ab, ac, ad, bc, bd, cd,* z toho pak rovnice jich os souměrnosti. Výsledek počtu bude tento:

Úsečka	Směrnice	Střed	Osa
ab	-3	$\frac{45}{8},\ \frac{7}{8}$	$x-3y-3=0$
ac	-1	$\frac{25}{8},\ \frac{17}{8}$	$x-y-1=0$
ad	$-\frac{9}{37}$	$\frac{13}{8},\ \frac{1}{8}$	$37x-9y-59=0$
bc	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2},\ 4$	$2x-y-1=0$
bd	$\frac{3}{16}$	$1,\ 2$	$16x+3y-22=0$
cd	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}$	$6x+8y-17=0.$

Osy úseček *ab, ac*, *bc* protínají se v bodě $s\,(0, -1)$, kterýž jest středem kružnice K_{abc} i $L_{abc,\,d}$; poloměr kružnice K jest

$$\varrho = sa = \sqrt{\left(6\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2} = \frac{25}{4}$$

a poloměr kružnice L

$$r = \frac{sa + sd}{2} = \frac{25}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + \left(2\frac{1}{4}\right)^2} = 5.$$

Jest tudíž rovnice křivky $L_{abc;\,d}$ tato:

$$x^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Body *a*, *b*, *c* leží vně této kružnice, bod *d* uvnitř, všechny ve stejné od kružnice vzdálenosti. Podobně bychom obdrželi středy kružnic

$$K_{abd}\left(\frac{25}{17}, -\frac{26}{51}\right), \; K_{acd}\left(\frac{25}{14}, \frac{11}{14}\right), \; K_{bcd}\left(\frac{25}{22}, \frac{14}{11}\right);$$

poloměry těchto kružnic neměly by však hodnot jednoduchých.

Vyšetřme ještě některou z kružnic druhé skupiny. Osy úseček *ad*, *bc* protínají se v bodě $t\left(\frac{50}{19}, \frac{81}{19}\right)$, kterýž jest středem kružnic K_{ad}, K_{bc} a $L_{ad,\,bc}$; poloměry prvních dvou kružnic jsou

$$\varrho_1 = ta = td = \frac{25}{76}\sqrt{377}, \; \varrho_2 = tb = tc = \frac{25}{76}\sqrt{73}$$

a tedy poloměr kružnice $L_{ad,\,bc}$ jest

$$r' = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{25}{152}\left(\sqrt{377} + \sqrt{73}\right) = 4{\cdot}16\ldots.$$

Středy kružnic ostatních dvou jsou

$$L_{ab,\,cd}\left(\frac{75}{26}, -\frac{1}{26}\right) \text{ a } L_{ac,\,bd}\left(\frac{25}{19}, \frac{6}{19}\right).$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Ferd. Šob,* stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Má-li kružnice poloměr r a bod od středu jejího vzdálenost v (kladnou), jest nejkratší vzdálenost bodu toho od kružnice dána výrazem

$$\pm (v - r);$$

znaménko $\pm$ závisí od toho, leží-li bod vně neb uvnitř kružnice.

Budiž r poloměr kružnice úlohou hledané; v_1, v_2, v_3, v_4 vzdálenosti bodů daných od středu kružnice. Úloha žádá, aby bylo

$$\pm (v_1 - r) = \pm (v_2 - r) = \pm (v_3 - r) = \pm (v_4 - r).$$

Znaménka $\pm$ lze kombinovati na $2^4 = 16$ způsobů, z nichž dva a dva vedou k témuž výsledku; proto zbylo by uvažovati celkem těchto 8 kombinací:

$$++++,\ +++-,\ ++-+,\ +-++,\ -+++,$$
$$++--,\ +-+-,\ +--+.$$

Jsou-li p, q souřadnice středu kružnice hledané, jest obecně

$$v = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}.$$

Kdybychom uvažovali první kombinaci znamének ($++++$ aneb $----$), došli bychom tří rovnic

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4,$$

v nichž jsou jen dvě neznámé p, q; úloha jest v tomto případě přeurčitá a obecně nemožná. Jdeť tu o to, stanoviti kružnici stejně vzdálenou od čtyř bodů, kteréž všechny mají býti buď vně neb všechny vnitř kružnice; úlohu lze patrně jen tenkráte řešiti, leží-li dané body na určité kružnici. Toho v daném příkladě číselném není.

Hledejme tedy kružnici $L_{abc,\,d}$, která má stejnou vzdálenost od daných bodů, z nichž a, b, c by ležely uvnitř a bod d vně aneb naopak.

Případ ten zahrnut jest sestavou znamének $+++-$ aneb $---+$ a vede k rovnicím

$$v_1 - r = v_2 - r = v_3 - r = r - v_4.$$

Z těchto dvě, totiž $v_1 = v_2 = v_3$, poslouží k určení středu s kružnice žádané.

Lze totiž rovnice tyto psáti v podobě

$$\left(6\frac{1}{4}-p\right)^2+(1+q)^2=(5-p)^2+\left(2\frac{3}{4}-q\right)^2$$
$$=(0-p)^2+\left(5\frac{1}{4}-q\right)^2$$

čili po náležitém zjednodušení

$$\begin{aligned} p - 3q &= 3 \\ 2p - q &= 1\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne $p = 0$, $q = -1$, načež poloměr kružnice ustanovíme z rovnice

$$r = \frac{v_3 + v_4}{2}\,;$$

při tom jest

$$v_3 = \sqrt{(x_3-p)^2+(y_3-q)^2} = \sqrt{0^2+\left(6\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{25}{4}$$

$$v_4 = \sqrt{(x_4-p)^2+(y_4-q)^2} = \sqrt{3^2+\left(2\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{15}{4}$$

a tedy

$$r = \frac{25+15}{8} = 5\,.$$

Chceme-li podobným způsobem vyšetřiti kružnici $L_{ad,\,bc}$, máme kombinaci $+ - - +$ vedoucí k rovnicím

$$v_1 - r = v_4 - r\,,\quad v_2 - r = v_3 - r\,,\quad v_1 - r = -(v_2 - r)$$

čili

$$v_1 = v_4\,,\quad v_2 = v_3$$
$$r = \frac{v_1+v_2}{2}\,.$$

První dvě z těchto rovnic poskytují k určení středu t vztahy

$$\left(\frac{25}{4}-p\right)^2+(1+q)^2=(3+p)^2+\left(\frac{5}{4}-q\right)^2$$

$$(5-p)^2+\left(\frac{11}{4}-q\right)^2=p^2+\left(\frac{21}{4}-q\right)^2$$

čili

$$37p - 9q = 59$$
$$2p - \quad q = 1,$$

z nichž vypočítáme jako způsobem prvním

$$p = \frac{50}{19}, \; q = \frac{81}{19}.$$

Hodnoty v_1 a v_2 jsou totožny s hodnotami ϱ_1 a ϱ_2 první methodou ustanovenými; proto obdržíme i tutéž hodnotu poloměru r pro kružnici $L_{ad, bc}$.

Úloha 16.

Vyšetřiti podmínku, aby spojnice bodů

$$m\,(a \cos \alpha,\; b \sin \alpha), \qquad n\,(a \cos \beta,\; b \sin \beta)$$

procházela ohniskem ellipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *H. Žížala*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Podmínka, aby body dané a ohnisko $(e, 0)$ ležely v jedné přímce, jest

$$\begin{vmatrix} a \cos \alpha, & b \sin \alpha, & 1 \\ a \cos \beta, & b \sin \beta, & 1 \\ e, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyčíslíme-li determinant a zkrátíme rovnici činitelem b, nabude podoby

$$a \sin (\alpha - \beta) - e (\sin \alpha - \sin \beta) = 0.$$

I tuto rovnici ještě lze zjednodušiti.

Klademe-li

$$\frac{e}{a} = \varepsilon,$$

jest ε číselnou výstředností ellipsy, a podmínku lze psáti

$$\frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha - \sin \beta} = \varepsilon$$

čili

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}:\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\varepsilon.$$

Úloha 17.

Najděte součet čísel mezi 1000 a 2000, která nejsou dělitelna ani 2ma ani 5ti.

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Jiruška* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Součet čísel lichých mezi 1000 a 2000 jest

$$1001+1003+1005+\ldots+1999=\frac{500}{2}(1001+1999)$$
$$=750000.$$

Součet čísel dělitelných 5 jest

$$1005+1010+\ldots+2000=\frac{100}{2}(1005+1995)=150000.$$

Žádaný součet jest tedy

$$750000-150000=600000.$$

Úloha 18.

Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla, aby z těchto čtyř čísel první tři tvořila řadu geometrickou, poslední tři řadu arithmetickou.

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Fr. Hrubý*, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové.)

Žádaná čtyři čísla jsou

$$3,\ 3q,\ 3q^2,\ 18.$$

Aby poslední tři náležela posloupnosti arithmetické, jest třeba podmínky

$$3q^2-3q=18-3q^2,$$

z níž plyne kvadratická rovnice

$$2q^2-q-6=0$$

mající kořeny

$$q_1 = 2,\ q_2 = -\frac{3}{2}.$$

Jest tedy žádané skupení čísel buď

$$3,\ 6,\ 12,\ 18$$

aneb

$$3,\ -\frac{9}{2},\ \frac{27}{4},\ 18.$$

Úloha 19.

Sečtěte

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Navrátil*, stud. VII. tř. gymn. v Uh. Hradišti.)

Sečteme-li řadu rovnic

$$\begin{aligned}
100^2 - 99^2 &= (100 + 99)(100 - 99) = 100 + 99 \\
98^2 - 97^2 &= (\ 98 + 97)(\ 98 - 97) = \ 98 + 97 \\
96^2 - 95^2 &= (\ 96 + 95)(\ 96 - 95) = \ 96 + 95 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

obdržíme

$$\begin{aligned}
&100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 \\
&= 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1.
\end{aligned}$$

Jest tedy hodnota dané řady

$$50 \,.\, 101 = 5050.$$

Úloha 20.

Sečtěte n členů řady

$$3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *František Bystřický*, stud. VI. tř. r. v Plzni.)

Jelikož jest

$$3 = \frac{3(10^1 - 1)}{10 - 1}$$

$$33 = \frac{3(10^2 - 1)}{10 - 1}$$

$$333 = \frac{3(10^3 - 1)}{10 - 1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

má žádaný součet hodnotu

$$s_n = \frac{3}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - \frac{1}{3}n$$

čili

$$s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{n}{3}$$

$$s_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}.$$

Úloha 21.

Kolik let jest osobě, jejíž stáří rovná se letos součtu číslic onoho roku, ve kterém se narodila?

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Šír*, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě.)

Máme za to, že osoba není přes 98 r. stará, pak její stáří lze vyjádřiti výrazem

$$1898 - (1800 + 10x + y)$$

a taktéž

$$1 + 8 + x + y,$$

takže

$$98 - 10x - y = 9 + x + y$$

čili

$$y = \frac{89 - 11x}{2}.$$

A poněvadž x a y mohou býti jen kladná čísla jednociferná, lze za x dosaditi jen 7, načež $y = 6$.

Osoba narodila se v roce 1876.

Úloha 22.

V nějakém městě umírá ročně $\frac{1}{90}$ *obyvatelstva, jež bylo na počátku roku;* $\frac{1}{60}$ *téhož obyvatelstva ročně se narodí. Za kolik roků se zdvojnásobí obyvatelstvo tohoto města?*

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindř. Barvík*, stud. VI. tř. g. v Opavě.)

Je-li p počet obyvatelstva na začátku 1. roku, p_1, p_2 a p_3 na konci 1., 2. a 3. roku, pak jest

$$p_1 = p + \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{90}\right) p = p + \frac{p}{180} = \frac{181}{180} p$$
$$p_2 = \frac{181}{180} p_1 = \left(\frac{181}{180}\right)^2 p$$
$$p_3 = \left(\frac{181}{180}\right)^3 p \text{ atd.}$$

Je-li x počet hledaných roků, potom

$$\left(\frac{181}{180}\right)^x p = 2p$$

čili

$$\left(\frac{181}{180}\right)^x = 2.$$

Odtud ustanovíme

$$x (\log 181 - \log 180) = \log 2$$
$$x = 125{\cdot}06.$$

Počet obyvatelstva zdvojnásobí se tedy po 125 letech.

Uloha 23.

Dokázati, že pro m a n mající stejná označení jest

$$\sqrt{2m^2 + 2n^2 + 12mn} - 2\sqrt{mn} \geqq m + n.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Toman*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

Pro každé realné a, b jest

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab;$$

položíme-li

$$a = m + n,\quad b = 2\sqrt{mn},$$

jest tedy

$$(m + n)^2 + 4mn \geqq 4(m + n)\sqrt{mn}.$$

Přičteme-li k nerovnici této identitu

$$(m + n)^2 + 4mn = (m + n)^2 + 4mn,$$

obdržíme

$$2(m + n)^2 + 8mn \geqq (m + n + 2\sqrt{mn})^2;$$

odmocníce nalezneme

$$\sqrt{2m^2 + 2n^2 + 12mn} \geqq m + n + 2\sqrt{mn},$$

což shoduje se s relací, kterou bylo dokázati.

Úloha 24.

Dokázati, že pro realná x v počtu n jest

$$n\,\Sigma\, x^2 \geqq (\Sigma\, x)^2.$$

Prof. Dr. *Ant. Pleskot.*

Řešení. (Zaslal p. *F Vitáček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

Máme-li veličiny realné

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n,$$

jest

$$x_1^2 + x_2^2 \geqq 2x_1 x_2$$
$$x_1^2 + x_3^2 \geqq 2x_1 x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \geqq 2x_{n-1} x^n.$$

Sečteme-li tyto výrazy, vztahujíce je na kombinace všech x, obdržíme

$$(n - 1)\,\Sigma\, x^2 \geqq 2\,\Sigma\, xx.$$

Jelikož však

$$2\,\Sigma\, xx = (\Sigma x)^2 - \Sigma x^2,$$

přechází předešlý vztah ve

$$n\,\Sigma\,x^2 \geqq (\Sigma\,x)^2,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 25.

Do trojúhelníka abc vepsati jest trojúhelník a'b'c' tak, aby bylo

$$ab' = ac',\ bc' = ba',\ ca' = cb'.$$

Jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníka abc, kterou velikost mají úhly trojúhelníka a'b'c'? (Vrchol a' leží ve straně bc, b' v ca, c' v ab).

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mikyna,* stud. V. tř. g. v Králové Dvoře.)

Body a', b', c' jsou patrně dotyčné body stran trojúhelníka abc s kružnicí tomuto trojúhelníku vepsanou.

Značíme-li úhly v trojúhelníku $a'b'c'$ písmeny α', β', γ', jsou úhly tyto obvodovými v kružnici řečené a proto

$$\alpha' = \frac{2R - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\beta' = \frac{2R - \beta}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

$$\gamma' = \frac{2R - \gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Úloha 26.

Nad stranami trojúhelníka abc sestrojeny vně trojúhelníka abc trojúhelníky rovnostranné abc', bca', cab'. Dokažte, že

a) spojnice aa', bb', cc' jsou stejné,

b) protínají se v jediném bodě,

c) tvoří pravidelný svazek trojpaprskový.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Truhlář,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.)

Veďme spojnice aa', bb', cc'. Jelikož jest

$$\triangle\, aa'c \cong \triangle\, bb'c,$$

jest

$$aa' = bb';$$

z podobného důvodu jest

$$aa' = cc'$$

a tedy vůbec

$$aa' = bb' = cc'.$$

Otočíme-li trojúhelník $bb'c$ kolem c o 60^0 ve smyslu příslušném, sjednotí se s trojúhelníkem $aa'c$; proto strany stejnolehlé aa', bb' tvoří spolu též úhel 60^0. Rovněž tak aa', cc', jakož i bb', cc'. Protínají-li se spojnice aa', bb' v bodě o, jest

$$\sphericalangle a'cb = \sphericalangle a'ob = 60^0,$$

pročež čtyrúhelníku $a'boc$ lze opsati kružnici; tudíž také

$$\sphericalangle a'oc = \sphericalangle a'bc = 60^0.$$

Přímka oc tvoří tedy s aa' i s bb' úhly 60^0, pročež sjednocuje se se spojnicí cc', o níž dříve totéž stvrzeno.

Všechny tři spojnice aa', bb', cc' jsou tudíž bodem o a tvoří pravidelný svazek trojpaprskový.

Úloha 27.

Dokázati jest vztahy úlohy předešlé pro případ, když vrcholy a, a' leží na téže straně přímky bc, vrcholy b, b' na téže straně přímky ca, vrcholy c, c' na téže straně přímky ab.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Důkaz v úloze 26. podaný zůstává i zde v plné platnosti, třeba obrazec větu znázorňující nabývá jiné podoby. Spojnice protějších vrcholů jest prodloužiti než setkají se ve společném bodě o.

Poznámka. Úlohy 26. a 27. poskytují základ k pěknému řešení úlohy: Třemi danými body položiti tři paprsky tvořící pravidelný svazek.

Úloha 28.

V trojúhelníku rovnoramenném budiž $BC = 2a$ podstavou, $AD = v$ výškou.

Učiňme $AE = v - a$ *na* AB,
$AF = v + a$ *na* AC;

dokázati jest, že příčka EF *tvoří s podstavou* BC *úhel* 45^0.

Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Liška*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Na výšce AD učiňme AG = AE = $v - a$, veďme přímku CG, a budiž H průsečíkem této přímky s ramenem AB. Považujeme-li CH za příčku trojúhelníka ABD, bude dle věty Menelaovy

$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BC}{DC} \cdot \frac{DG}{AG} = 1,$$

a ježto

$$DC = DG,$$

jest

$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BC}{AG} = 1$$

čili

$$\frac{AH}{HB} = \frac{v - a}{2a},$$

pročež

$$\frac{AH}{AB} = \frac{v - a}{v + a}$$

aneb

$$\frac{AH}{AC} = \frac{v - a}{v + a}.$$

Avšak

$$\frac{AE}{AF} = \frac{v - a}{v + a},$$

tedy

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AH}{AC}.$$

Z úměry poslední vysvítá, že příčka FF || HC, a protože CH tvoří s BC úhel 45^0, jest též úhel příčkou EF a podstavou BC sevřený 45^0.

Úloha 29.

Sestrojiti čtyřúhelník ABCD, jsou-li dány jeho strany AB BC, CD, úhlopříčka AC a délka příčky EF, která spojuje středy E, F úhlopříček AC, BD. Prof. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Ehrenberger*, stud. V. tř. real, v Novém Městě na Moravě.)

Trojúhelník ABC lze z daných částek AB, BC a AC sestrojiti, tím jest i poloha středu E v úhlopříčce AC stanovena. Jde tudíž o sestrojení vrcholu D. Ježto délka příčky FF jest dána, jest kružnice (F) ze středu E poloměrem EF sestrojená geom. místem bodu F. Z téhož důvodu jest geom. místem vrcholu D kružnice K, sestrojená ze středu C poloměrem CD. Najdeme-li ještě jedno geom. místo pro vrchol D, bude vrchol D určen průsekem dvou míst geometrických. Majíce na mysli podmínku, že $BF = \frac{1}{2} BD$ a že B jest vrcholem známým, poznáváme, že druhým geom. místem vrcholu D bude kružnice (D) podobně položená s kružnicí (F) dle bodu podobnosti (D) a poměru $BF : BD = 1 : 2$. Střed G kružnice (D) jest dle středu E souměrně sdružen s vrcholem B a poloměr GD rovná se průměru kružnice (F).

Sestrojení: Narýsujme napřed trojúhelník ABC, potom ze středu E strany AC poloměrem daným EF kružnici (F) a ze středu C poloměrem CD kružnici K. Sestrojme k vrcholu E souměrně sdružený bod G dle středu E, potom kružnice (D), jejímž středem jest G a poloměrem $GD = 2\,EF$, protne kružnici K v hledaném vrcholu D.

Důkaz. Že čtyřúhelník ABCD obsahuje strany AB, BC a CD a úhlopříčku AC, jest z konstrukce patrno. Zbývá tudíž dokázati, že příčka EF spojující středy E, F úhlopříček AC a BD, jest délky dané. Dle sestrojení jest

$$BE : BG = 1 : 2$$

a protože F je středem úhlopříčky BD, platí úměra

$$BF : BD = 1 : 2,$$

tedy

$$BE : BG = BF : BD,$$

pročež jest příčka EF rovnoběžna s GD,

$$EF : GD = 1 : 2,$$

a ježto GD rovná se dvojnásobné délce dané, jest EF rovno dané délce.

Omezení. Protínají-li se kružnice K a (D), má úloha dvojí řešení, dotýkají-li se K a (D), vyhovuje úloze toliko jeden čtyřúhelník, a nemají-li K a (D) žádný bod společný, jest úloha nemožná.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Bartoš Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10. až 14.

Barvík Jindřich, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 6., 7., 8., 11., 17., 18., 19., 21., 22., 25. až 28.

Brechler Karel, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1., 5.

Brinkmann Emerich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 8., 10. až 14., 17., 18., 19., 21., 22., 25., 29.

Brix František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 11., 13., 15., 17., 18., 19., 21., 22., 23., 25. až 29.

Brix Frant. Jan, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 7., 8., 10. až 13.

Brož R., stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 13.

Bystřický František, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 4., 18., 20., 21.

Čech Robert, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 7.

Drastich Frant., stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 25.

Dvořák B., stud. V. tř. r. v Budějovicích, úl. 2.

Ehrenberger Adolf, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 17., 19., 21., 25., 26., 29.

Fleischer Otakar, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 7.

Fojtl Arnošt, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 4.. 5., 13.

Hájek Emanuel, učitel v Kloboukách u Brna, úl. 1., 2., 6., 7.

Hájek Emanuel, stud. VI. tř. g. v Budějovicích, úl. 1., 4., 5., 7., 8.

Holzmann Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 29.
Hrubý František, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 4., 5., 8., 13., 17. až 22.
Janďourek Václav, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 16.
Jiruška František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 7., 10. až 13., 17., 22., 25., 28., 29.
Kálal Josef, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 18., 19., 21., 22.
Kitzberger Eduard, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1. až 4., 7., 8., 11., 12., 17., 18., 19., 21., 22., 26., 27., 28.
Knobloch Josef, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 2., 3.
Kopecký Jindřich, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1., 2., 4., 5., 7., 17. až 22., 25.
Kroupa H., stud. V. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 21., 25.
Lang Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 29.
Linhart Stanislav, stud. VII. tř. r. Pardubicích, úl. 1. až 15., 17. až 22., 25., 28., 29.
Matas Bohumil, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 3., 4., 7., 8., 17. až 22., 25.
Mikyna Josef, stud. V. tř. r. v Králové Dvoře, úl. 6., 7., 8., 21., 25., 26.
Moos Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 4., 5.
Navrátil Frant., stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1., 13., 18., 19.
Nejdl Karel, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 1., 18., 25.
Nováček Frant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 2., 3., 7.
Novák Bedřich, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 21., 25., 28.
Pechánek Ant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 8., 11., 13.
Polák Otakar, stud. průmyslové školy v Praze, úl. 1.
Pollák Julius, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 2., 7., 13., 14., 17., 18., 19., 21., 22.
Porš Adolf, stud. VII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze, úl. 1., 13.
Procházka Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 4. až 8., 17., 18., 19., 21., 22.

Prokeš Vojtěch, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 8., 11., 13., 14., 16. až 22.
Radouš Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 13.
Riessmüller Karel, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 11., 19., 26.
Schüller Jan, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 2., 4., 5., 17., 19., 21.
Spurný František, externista g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8., 13.
Ševčík Jindřich, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 7., 8., 11., 13., 14., 16. až 22.
Šír Jiří, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 2., 19., 21., 25., 29.
Šiška Karel, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1. až 5.
Šob Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 29.
Šulhof Bernard, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 8., 11., 12.
Truhlář Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 22., 25. až 29.
Toman Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 23., 25. až 29.
Vajgl Jan, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 11., 13., 21., 25., 29.
Válka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 7.
Váňa Robert, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 7., 13.
Velísek Ignát, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 29.
Vitáček Frant., stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 1. až 29.
Vomela Frant., stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 21., 25.
Vondráček Otakar, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 4.
Vyskočil Felix, stud. VII. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 1. až 4., 10., 12., 17. až 22., 25., 26., 27., 29.
Zafouk Bedřich, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1., 4., 13., 18., 21.
Zicha Frant., stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 18., 20., 21., 25.
Žížala H., stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 5., 7., 8., 9., 11., 13., 14., 16. až 22., 25.