Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Ondrák

Slovné úlohy, zvláště aritmetické, v matematickém vyučování

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 2, D9--D15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122742

FRANTIŠEK ONDRÁK:

Slovné úlohy, zvláště aritmetické, v matematickém vyučování.

Slovné úlohy náležejí převážnou většinou do matematiky aplikované, jen částečně jest obsah jejich vzat z oboru matematiky ryzí. Problém slovných úloh ve vyučování matematickém závisí tudíž především od úkolu, který jest tam přisouzen matematice aplikované. Souvisí také podstatně s metodou matematické výuky.

I. Matematika ryzí a aplikovaná.

Důležité místo mezi předměty středoškolskými zaručovaly odedávna matematice nejen obsah a forma badání, ale též úzký vztah k širokým oborům jejího použití ve vědách, v technice a v sociálním životě. Úlohy aplikované matematiky sloužily k nacvičení pouček matematiky ryzí, zároveň však měly vyučování oživiti a žáka povzbuditi výhledy do hlubšího poznání přírody a do upotřebitelnosti v praktickém životě, v jeho hospodářských a sociálních problémech. Úlohami užitými budil se zájem žáka pro matematiku ryzí; ta stála však nade všemi aplikacemi. Vyučování bývalo ovládáno předsudkem, že je třeba na prvním místě pěstovati ryzí matematiku; ta byla hlavní věcí, aplikovaná vedlejší.

Reformními snahami byl znenáhla vytlačován ze školní prakse starý předsudek, že formě patří přednost před obsahem, a že matematika ryzí je nezávislá na užití. Zdůrazňován byl prvotní úkol aplikované matematiky, od níž dostává se vědě matematické vnějších podnětů k abstraktnímu badání, aby pak výsledků tohoto mohlo se použíti opět ve prospěch aplikací. Odtud vycházel také pro matematické vyučování požadavek, který možno vyjádřiti heslem »Od použití k použití«.

Také důvody psychologické vedly k poznání, že i v matematickém vyučování má plné oprávnění všeobecná pedagogická zásada, aby se postupovalo od konkrétního k abstraktnímu. I vysoká budova dedukcí matematických, jejich číselných a prostorových vztahů, má spočívati na pevných, názorných, empirických základech.

V zápase o větší vliv ve výuce matematické mezi ryzí a aplikovanou matematikou přinesly pedagogické snahy posledních let značný zisk matematice užité. Přispělo k tomu jednak volání moderní doby, aby se škola přiblížila životu co nejúže, více pak ještě duch »činné« školy snahou, aby žák byl činně a, pokud možno, samostatně zúčastněn na hledání jak problémů samých, tak i cest směřujících k jejich řešení. Nezbytnými předpoklady dobré činné školy a její »bádavé« nebo též jinak zvané »experimentální« metody jsou právě didaktické pokroky posledních desítiletí, z nichž dlužno jmenovitě uvésti zdůraznění genetické metody, funkcionálního myšlení a matematických aplikací. Jelikož problémy vyrůstají nejen z vědeckých popudů, ale zvláště z potřeb praktických, jest třeba při vyučování užívati větší měrou praktických podnětů. Proto také didaktiky matematického vyučování přikládají právě v nové době stále více významu aplikacím. Geometrie hodí se velmi dobře svým názorným konkrétním podkladem k použití experimentální metody vyučovací. Název »experimentální« naznačuje, že žák vlastním hledáním a zkoumáním má přijíti k problému a výsledku. Obtížnější jest úloha uvésti aritmetické vyučování v soulad s požadavky této metody. Přihlédneme k jednotlivým oddílům aritmetického učiva a k významu slovných úloh v něm.

II. Aritmetika zvláštní.

Cílem výuky v aritmetice zvláštní jest osvojení si početních pravidel a jejich snadného mechanického použití. Podstatnou roli na výsledcích vyučovacích však hraje duševní proces, kterým žák prošel, než se došlo k zmechanisování operace. Děti do 14. roku myslí téměř výhradně v názorných individuálních představách. Je ostatně známo, že nejen děti, ale i lidé dospělí spojují s pojmem čísla (na př. 5) a číselných operací (na př. 6 . 3, 18 : 3) nějakou představu prostorovou. Abstrakce čísel a pravidel početních jest tudíž třeba vyvíjeti na širokém názorném podkladě, na množství konkrétních slovných úloh, aby se na jejich vytvoření zúčastnilo co nejvíce jasných a různých konkrétních představ za nejširší samočinnosti žákovy. Když se takové pravidlo odvodí buď jen z jednoho názorného příkladu, nebo když se konkrétní příklady brzy odsunou ve prospěch mechanického užívání pravidla, vzniká nebezpečí povrchnosti, prázdných vědomostí a nekritičnosti. Žák brzo ztratí schopnost pravidla nebo operace použíti, t. j. uvésti je v souvislost se skutečností. Nový psychologický názor zdůrazňuje a upevňuje více cestu vedoucí k pochopení nové myšlenkové struktury, nového poznatku.

Jako příklady namátkou uvádím: pojem součinu, největší spol. míry a nejm. spol. násobku, pravidla o násobení součtu číslem (I. tř.), o neměnitelnosti podílu, násobení zlomkem atd., atd. Žák musí býti vychováván k tomu, aby s výrazem na př. 6 . 3, $(2+3) . 5$, $8 . \frac{3}{4}$ atd. dovedl spojiti správnou představu. Toho se docílí hojnými slovnými úlohami, při nichž jest žák nucen nejen mysliti, ale také si věc představovati, po případě i zobraziti. Názornost vyučování jest základním požadavkem školy obecné, nesmí se však příliš omezovati ani v aritmetickém vyučování střední školy. Zatím co v geometrii byla uplatněna plně, myslím, že není zbytečno zdůrazniti, aby v aritmetice nejnižších tříd byla co největší měrou pěstována. Provedení jest ovšem v moci učitele. Nedostatek konkrétního podkladu, získaného v aritmetice zvláštní, zračí se také v průpravě žákově pro aritmetiku obecnou.

Názorný podklad operací početních se vhodně upevní a vytříbí, když se při ryzích úlohách, jak na nejnižším stupni, tak v aritmetice vůbec, častěji žádá, aby žák **úlohu konkretisoval**, t. j. aby našel věcný vztah k úloze. Tak cvičí se a podporuje žákova schopnost představovací, i když se delší dobu cvičí mechanické počítání s ryzími čísly. Jest účelné připojovati tento požadavek i k úlohám v učebnicích.

Aby byli žáci vychováváni k představivosti odpovídající pravdivým poměrům skutečného života, jest nutno vázati jejich představy a fantasii pojmem **míry**. Vyučování musí regulovati pocit velikosti tím, že žáci jsou nuceni prováděti četná praktická měření délky, času, váhy a pod. a odhadovati velikost příslušných veličin. Dotyčné úlohy v učebnicích plní svůj úkol velice dobře a nebylo by správné je pomíjeti. Nestačí ovšem pro nabytí správné představy na př. o kilogramu a jeho dílech a k zajištění pocitu velikosti jeho provésti jedno vážení knihy nebo jiného předmětu; k tomu je třeba častějšího vážení, spojeného s předchozím odhadem. Podobně při jiných měrách. Znalost měr tvoří integrující část matematického vyučování, a měrná jednotka pro veličiny určitého oboru jest rozhodující pro užití matematiky v tom oboru. Sem spadá také známý didaktický požadavek, aby slovné úlohy souhlasily s poměry skutečného života, a aby měrná čísla a číselné údaje v nich odpovídaly skutečnosti.

Budiž tu poznamenáno, že pojem měrné jednotky a měření nelze dobře v I. tř. začít vykládati na měření plochy. Možno začíti třeba touto úlohou: »Chceme vyjádřiti délku tabule číslem. Co je nutno učiniti? Proveďte a popište postup! Srovnejte s úlohou: Vyjádřiti množství žáků číslem.«

III. **Aritmetika obecná.**

Jako v aritmetice zvláštní, tak zaujímají aplikace důležité místo také v aritmetice obecné, jejímž úkolem jest vyjadřovati a projednávati kvantitativní vztahy. Aby vyučování zůstalo ve shodě s psychologickým postupem rozvoje duševního a zajistilo snadné a všestranné použití kvantitativních zákonů a jejich vyjadřovacích forem na konkrétní problémy, musí jeho základy i zde býti budovány na **názorném tvoření základních pojmů a pravidel**, založeném na neustálém, všestranném a rozmanitém vztahu ke skutečnosti. Když počáteční vyučování obecně aritmetické nedbá tohoto požadavku a hledí jen k tomu, aby žáci co možno rychle nabyli cviku v mechanickém počítání s obecnými čísly a v používání vzorů a pravidel, pak chybí jim schopnost algebraické formy konkretisovati a aplikovati. Tak není možno vypěstiti v nich vyšší duševní schopnosti, nutné k samostatnému bádání a hledání. Učiní-li se slovné úlohy východiskem a podkladem aritmetických úvah, pak také žák vidí **cíl**, k němuž odvozování početních pravidel směřuje, t. j. k řešení otázek života obecného, hospodářského, otázek vědeckých atd. Cíl jest nejmocnější vzpruhou mladého ducha k vzbuzení jeho samočinnosti.

Dovoluji si tu jako příklad uvésti postup v učebnici aritmetiky pro III. tř. od Bendla-Muka. V § 1. jest tam velmi pěkně na pestrém a rozsáhlém konkrétním podkladě vyložen pojem obecného čísla a jeho dvě základní vlastnosti, totiž 1. že písmeno značí veličinu, 2. že tato veličina má různou, resp. proměnlivou velikost. Hned však § 2., uvádějící žáka do užívání závorek a stavby algebraických výrazů, buduje na základě ryze formálním, aby pak výsledky byly aplikovány na slovné úlohy, zatím co teprve § 4. pro další objasnění struktury alg. výrazů podává geometrické znázornění některých výrazů, jako jest $a - (b - c)$ a pod. Mám za to, že tento postup je právě opačný k přirozenému vývoji ducha, který vede od konkrétního k abstraktnímu. Těmi úlohami geometrickými jest výhodno začít; představy mají tu oporu v zobrazení. Pak mají následovati slovné úlohy konkrétní a za těmi teprve úlohy ryze formální. Počáteční úlohu § 2. znějící: »Rozdíl čísel 5 a 3 jest odečísti od čísla 9« — jest možno konkretisovati na př. takto: »Karel měl 9 Kč; koupil si gumu, při čemž platil pětikorunou; dostal 3 Kč zpět. Kolik mu zbylo?« Oporu představivosti má žák v geom. příkladě $a - (b - c)$.

Žáci 13-ti a 14-tiletí stojí zde na prahu abstraktního myšlení, které je nutno podporovati živými věcnými představami. Myslím, že důvody psychologickými jest oprávněn požadavek, aby se k ryze formálním úlohám přikročilo teprve pak, když nové představy a pravidla konkrétními úlohami získaná dodatečně zakořenila. Postup, při němž se učí napřed obecným pojmům a pravidlům, aby se jich pak použilo na jednotlivé případy, tomuto stupni jistě dobře nevyhovuje. Naše učebnice toho částečně dbají; ale, jak ukázáno, jest v nich tento novější princip pomíšen se starým principem výuky ryze formální, na kterou se pak teprve připínají aplikace. Tam, kde nevyrostly formální znalosti z konkrétního podkladu, daří se pak i jejich aplikace velmi těžkopádně. Konkrétní úlohy zdají se při tom býti zastřením a nevítaným znesnadněním vlastní úlohy, kdežto při postupu vycházejícím z úloh konkrétních jsou něčím samozřejmým.

Jako další příklad zasluhuje zmínky dosazování zvláštních hodnot za čísla obecná do výrazů algebraických. Je výhodno voliti nejdříve výrazy mající konkrétní význam. Hodí se sem výrazy známé z počtu procentového a úrokového s příslušnými slovnými úlohami, pak jednoduché výrazy žákem sestavené na základě konkrétního příkladu. Místo ryze formální úlohy: »Vypočítejte y, je-li $y = 12/x$, pro $x = 1, 2, 3, \ldots$« možno žádati rozdělení $12\,l$ mléka mezi x osob. Je-li výraz početní symbolem konkrétního vztahu, který si může žák představiti, pak má to dosazování pro něj docela jiný smysl; pak také jednotlivé hodnoty výrazu splývají v celek a vzniká představa funkce a jejích plynulých změn. Tím znázorní se dobře nejen proměnnost obecného čísla, ale připravuje se také půda pro funkcionální myšlení. Následující potom vyčíslování ryzích aritmetických výrazů, i složitých, má ovšem také svůj účel; jest cenným prostředkem k vniknutí do jejich stavby.

Jedním z podstatných úkolů aritmetiky obecné jest řešení rovnic. Dbá se didaktického požadavku, odpovídajícího také historickému vývoji, aby nauka o rovnicích začínala ne-li první algebraickou hodinou, tož v prvních hodinách a ovšem konkrétními úlohami. Algebraické vyjadřování a řešení rovnic vyžadují soustavného osvojení si algebraických operací; žák cítí tuto potřebu pro řešení praktických problémů. Zavrhován jest starší postup, začínající odvozováním početních pravidel, za nimiž následovaly početní úlohy, pak ryzí rovnice a konečně slovné úlohy na aplikované rovnice. Slovné příklady nemají se jeviti jako maskování rovnic, nýbrž jako přirozené problémy. Při vyvozování zákonů o řešení rovnic skytá velmi dobrý prostředek pro obsahové jejich pochopení úvaha, jakou změnu jedné strany rovnice způsobí určitá změna strany druhé, podporovaná názorně srovnáním s vahami. Tento hojně užívaný postup, zdůrazňující právě pojem rovnice, zasluhuje, myslím, přednost před řešením na základě abstraktních vět o výpočtu sčítance ze známého součtu a druhého sčítance a podobných.

Druhou podstatnou část aritmetiky obecné tvoří vztahy funkcionální. Jest samozřejmo, že základy funkcionálního myšlení musí býti cvičeny na věcných představách a tudíž na podkladě slovných úloh. Funkcionálnímu myšlení musí předcházeti funkcionální nazírání.

Na všech stupních matematické výuky jsou slovné úlohy vhodným podkladem pro nacházení nových problémů. Matematika jest vysokou školou nejen logického myšlení, ale též fantasie. Na zjevech z přírody a z okolního života nechť si žák zvyká hledati, kde se dá matematicky mysliti. Tak z konkrétních příkladů může vyvěrati na př. potřeba nauky o řadách nebo zavedení nových pojmů goniometrických funkcí a pod.; úvodem k nauce o konvergenci nekonečných řad bývá rozbíráno Zenonovo paradoxon o Achillovi a želvě. Hojné aplikace sloužící k použití matematických vědomostí jsou na všech stupních ku prospěchu výuky.

IV. Metoda vyučovací.

Vzdělávací a výchovné ceny slovných úloh využije se plně jen tenkrát, když se dbá při jejich překládání do formy aritmetické co největší samočinnosti žactva. Učitel mající tento cíl na zřeteli omezí tázavě vyvozovací metodu, která na podkladě otázek učitelových převádí jednotlivé věty úlohy do aritmetické řeči, na první příklady slovných úloh nového oboru, na př. úloh vedoucích na aplikované rovnice, aby žák poznal metodu jejich sestavování. Pak musí býti žáku poskytnuta možnost, aby nové úlohy vyjadřoval aritmeticky beze všech pomocných otázek a návodů, a to i tenkrát, když vedou k novým formám vyjádření. Tomuto účelu dobře vyhovuje t. zv. tiché zaměstnání, kdy se žáci napřed každý samostatně pokusí o sestavení rovnice, po případě vztahu aritmetického. Učitel má čas zjistiti, kde slabý žák vázne, aby mu pomohl vhodnou otázkou; obyčejně využije se vynalézavosti žáků bystřejších, nikoliv ovšem, aby žákům slabším předvedli řešení, nýbrž aby jim po částech ukazovali cestu k cíli. Učitel má tu lepší možnost seznati, co je pro žáky těžké, a je upozorněn na chyby v jejich myšlení i jiné nedostatky; mnohdy je příjemně překvapen vynalézavostí a originelností žákovou. Často žák slabší překoná samočinností žáka lepšího, kterého předčí pevnou vůlí přijíti k cíli. Nároky na schopnosti žákovy musí býti ovšem s počátku mírné a opatrné. Zvláště je důležité, aby žák vycházel z názoru, z představ konkrétních; při úlohách směšovacích, rozdělovacích, pohybových atd. má si věc představiti. Je správné žádati zobrazení, a kde to jen jde, ve věrných rozměrech.

Cenným prostředkem výchovným jest navykati žáka, aby při slovných úlohách, kde je to možné, prováděl odhad výsledku předem. Rovněž má se plně využíti důležité okolnosti, kterou se vyznačuje matematika vůbec, t. j. možnosti zkoušky, zda byla úloha správně řešena. Kde to úloha připouští, jest výhodno požadovati řešení druhým způsobem. Přezkoumáváním a ověřováním fakt učí se žák střízlivé poctivosti. Přepočítávání nemá valného významu.

Vzdělání matematické získá, zvláště také se zřetelem k funkcionálnímu myšlení, když se od žáků žádá, aby sami při vhodné úloze určili, kterých dat jest k jejímu řešení potřebí, čímž jsou vedeni také k přemýšlení o tom, od čeho závisí výsledek úlohy. To je možno žádati i od žáků nejnižších tříd, pokud obsah úlohy jest vzat z okolí jejich života. Na vyšším stupni připínají se k řešení diskuse výsledků. Samočinnost žáků i styk školy se životem se zvýší, když žáci při vhodné příležitosti také sami zjistí velikost určovacích veličin v úloze. Tak mohou si na př. zjistiti při domácích úlohách z počtu trojčlenného nebo úměrnosti cenu různých věcí, množství látky na svůj oděv, mzdu dělníků, potřebu osiva, potřebu mléka v domácnosti, čas potřebný k ujití určité dráhy, a jiné veličiny. Bezradnost a neobratnost žáků, kteří jsou zvyklí nalézti vše potřebné v knize, je někdy při takových úlohách až křiklavá. V učebnicích geometrie bývají úlohy toho druhu; jistě by se osvědčily i ve sbírkách aritmetických.

Není také bezúčelné, když kniha nebo učitel dá někdy jen podnět k stvoření úlohy, kterou si pak žák musí sám udělati. Stačí poukázati na poměry životní; na př.: Rodina 4-členná chce si opatřiti na podzim brambory. Jedná se o žito pro osev na polích Vašich rodičů.

Pro žáka střední školy není bez zájmu a významu, když hledá příklady nebo data k nim v životě a ve svém okolí; vidí, jak číslo, míra a tvar pronikají všechno myšlení a zaměstnání, což si při úlohách v knize cele obsažených ani náležitě neuvědómí.

V. Obsah úloh.

Znám je didaktický požadavek, aby se obsah slovných úloh opíral o poměry skutečné, nikoliv vybájené. Na prvním místě jest hleděti k takovým úlohám, jejichž výsledky mají nějakou cenu nebo praktický význam. Bezcenné jsou úlohy neurčité, jako: »Za $4\frac{3}{4}$ *K* dostaneme 5·7 *kg* zboží; kolik....«

Není tu třeba jmenovati rozsáhlé ty různé obory matematických aplikací na poli praktického života i věd. Chci zvláště zdůrazniti naléhavou potřebu dnešní doby, aby škola vedla budoucí inteligenci k širšímu a hlubšímu pochopení problémů národohospodářských a sociálních. Poukazuje se v souvislosti s t. zv. krisí inteligence jistě právem na to, že dnešní inteligence pranepatrně rozumí těmto akutním otázkám doby. Vyučování matematické tu může vykonati také více než dosud. Vedle velmi cenných kapitol i jednotlivých úloh dosud probíraných a osvětlujících zásady úvěrní, pojišťovací, daňové, otázky obchodní a jiné, jsou tu také všední problémy sociálně hospodářské, jako otázky výživy, bydlení a pod., které mohou platně v přehledném zpracování nahraditi leckteré bezvýznamné úlohy. Takovými tématy jsou na př. hospodaření a výživa mlékem u jednotlivce a ve statistice města, země, státu, nebo cukerní výroba a obchod a pod.

V poválečné době značně zesílilo volání po sblížení školy s praktickým životem. Pokud tím bylo žádáno, aby praktická užitečnost jednotlivých vědomostí byla loktem, kterým by se měřilo při výběru učiva, musila se škola takovým nestřízlivým požadavkům opříti. Účel její jest vznešenější, jest jím obecné vzdělání. Správným však jest volání po větší životnosti školy, žádá-li se, aby v sobě obsahovala prvky soudobé kultury. Matematika prokáže svoje významné postavení ve škole tím lépe, čím lépe dovede žáka vychovati svými pracovními metodami k vědeckému pojímání zjevů okolního světa a k řešení jeho problémů.

JOSEF VAVŘINEC (Plzeň, I. R.):

Méně tabule a méně křídy!

Až dosud jest, tuším, u nás většinou zvykem rýsovati při geometrii veškery konstrukce na tabuli, což jest zbytečné a nikterak nepřispívá k pěstění samostatnosti žáků. A přece jest snadno vyhnouti se veliké části tohoto rýsování a to nejen při řešení úloh, ale i při výkladu nové látky. Není zajisté pochyby o tom, že zbytečné rýsování na tabuli vede ve velmi mnohých případech a u veliké části žáků k pouhému bezduchému kopírování. S omezením