

František Ondrák

O tělese vzniklé rotací rovnoosé hyperboly kol asymptoty

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, D26--D29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122730>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1927

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

což jest součet přirozené řady čísel od 1 do n . Proto jest

$$s_n = n(a - d) + d \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$s_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(a + u).$$

Stačilo by tedy, aby se úvaha př. 8. provedla jen s přirozenou řadou čísel. — Vypracujte to jako cvičení!

*

Myslím, že takové příklady musí počítati více méně každý učitel matematiky. Další vzorců a příkladů uveřejňovati nebudu, protože se volba jejich již řídí našimi zálibami. Vřadíme tu zajisté i příklady, jež sami jsme utvořili. Nalézám ve svých sbírkách na př. úlohy na národohospodářský pojem Quetu. Quet jest náklad potřebný k vydržování kojence od narození do konce 1. roku. Každým dalším rokem stoupá nutný náklad o 0·1 quetu. U muže končí stoupaní rokem 24., u ženy 20. Quet (před světovou válkou) měl peněžní hodnotu asi 100 K. Dával jsem úlohy:

1. Kolik quetů stojí vydržování děcka v jeho n -tém roce? — Výsledek: $(9 + n) : 10$ quetů. Septimán stojí 26 quetu.

2. Kolik quetů stojí vydržování mladíka do 24. roku? — Odpověď: 516 quetu.

FRANTIŠEK ONDRÁK:

O tělese vzniklém rotací rovnoosé hyperboly kol asymptoty.

V minulém ročníku »Přílohy« str. 126. je dotaz po výkladu paradoxa, že nekonečně velká plocha, kterou uzavírají mezi rovnoosou hyperbolou $y = 1/x$ a osou x pořadnice příslušné k $x = 1$ a $x = \infty$, vytvoří otočením kol osy x těleso objemu konečného. Výklad tento je možný bez derivací a integrálů a vůbec bez složitějšího aparátu početního na základě úvah velmi elementárních. Jelikož však chci úvahy doprovoditi výpočty, vložím tento názorný výklad do pojednání početního, při čemž na jeho nezávislost na ostatních výpočtech upozorním.

Nejprve však odpovím na otázku, připojenou ke článku redakci a závažnou se stanoviska didaktického, zda se odvozením založeným na derivaci funkce logaritmické nezachází na střední škole příliš daleko. Na tuto otázku bude a musí býti jinak odpověděno pro různé ročníky nejvyšší třídy. Je tu třeba přihlížeti k celkové úrovni matematické výuky žactva a k času, který má učitel k dispozici při

opakování učiva k jeho rozšíření a prohloubení. Pro určení rozsahu infinitesimálního počtu na středních školách dbá se celkem zásady, derivovati a integrovati funkce, které se vyskytují v ostatním matematickém a fyzikálním učivu, a zvláště k jejichž derivacím a integrálům vyučování vedlo, třebaš bez použití počtu infinitesimálního, jeho názvosloví a značek. Středoškolská látka dává také popud k zabočení do oboru souvisejícího s naším paradoxem. Při probírání logaritmů se žáci dovědí, že se vedle dekadických logaritmů užívá ještě soustavy tak zv. logaritmů přirozených, jejichž základem je číslo e . Učitel nemá zůstatí dlužen žákům vysvětlení k otázce, kterou v jejich zvědavosti vyvolá název »přirozených« logaritmů, co je totiž na těchto logaritmech přirozeného. Vhodná příležitost k tomuto vysvětlení naskytá se v nejvyšší třídě při výkladu o nepřetržitém úrokování a přirozeném vzrůstu, který jistě mnoho odborníků zařazuje do rozvrhu látky v této třídě. Výklad podán jest v učebnici Bydžovský-Vojtěch, Matematika pro nejvyšší třídu g., odst. 26. Zde se vysvětlí definice čísla e a funkce e^x . Často bude pak tu učitelí možné a snadné pošinouti mez učiva z počtu infinitesimálního kousek dále a připojiti definici funkce $\log \text{ nat } x$ čili $\ln x$ a odvoditi její derivaci podle odst. 37 učebnice, v němž jest přímo již řešena kvadratura rovnosé hyperboly $y = 1/x$ a odvozen vztah, na který navážeme vysvětlení paradoxu.

Rovnici (3) odstavce 37.

$$f(ax) = f(a) + f(x),$$

kteřá jest vlastně funkcionální rovnici a může sloužiti k definování

funkcí logaritmických, pišme vzhledem ke vztahu (2) $f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$

ve tvaru

$$\int_1^{ax} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{dx}{x}$$

Provedením integrace obdržíme známý vztah $\ln ax = \ln a + \ln x$. Poněvadž

$$\int_1^{ax} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ax} \frac{dx}{x},$$

jest

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_a^{ax} \frac{dx}{x} \quad (1)$$

Tato rovnice praví, že plocha omezená hyperbolou, osou x a pořadnicemi patřícími k úsečkám 1 , x , čili stručně plocha od 1 do x , je stejně veliká jako plocha od a do ax .

Rozdělme plochu P hyperboly, prostřající se od $x=1$ do ∞ , na částečné plochy rovnoběžkami s osou y ve vzdálenostech $x=2$, $x=4$, $x=8$, ... $x=2^n$, $x=2^{n+1}$, ... in inf. Podle rovnice (1) mají tyto částečné plochy stejnou velikost; integrací vypočteme, že obsah každé rovná se $1/2$. Tyto částečné plochy tvoří nekonečnou řadu o stejně velkých členech, a součet její jest nekonečně veliký, t. j. s rostoucím počtem členů vzrůstá nade všechny meze. Tedy $P = \infty$.

Že uvedené částečné plochy mají stejný obsah, jest možno dokázatí bez pomoci rovnice (1) již na základě nepřímé úměrnosti proměnných x a y (viz úvodní poznámku). Uvažme, že každá následující částečná plocha jest proti předchozí tolikrát ve směru osy x prodloužena, kolikrát jest ve směru osy y zkrácena. Pro bližší odúvodnění rozdělme každou částečnou plochu rovnoběžkami k ose y , v téže částečné ploše stejně navzájem vzdálenými, na též počet velmi úzkých elementárních proužků, které v limitě považujeme za obdélníky. Pak každý elementární proužek v určité částečné ploše jest dvakrát širší ve směru x , za to však dvakrát nižší než příslušný proužek v částečné ploše předchozí.

Nejsou však stejnými objemy částečných těles, vzniklých rotací těchto částečných ploch kolem osy x . Při výpočtu objemu přistupuje totiž k součinu dřívějších dvou rozměrů jako činitel tělesný rozměr třetí, který se ve stejném poměru zmenšuje jako rozměr výškový ve směru y . Pro podrobnější úvahu myslíme si každé částečné těleso rozděleno řezy, kolmými k ose x a v témž částečném tělese ekvidistantními, na též počet elementárních vrstev podoby válců, z nichž každá vznikne rotací dřívě zmíněného elementárního proužku. Podle obvyklého označení budou objemy dvou odpovídajících sobě vrstev ve dvou sousedních částečných tělesích $\pi y^2 \Delta x$, $\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot 2 \Delta x = \frac{\pi y^2 \Delta x}{2}$. Objemy částečných těles tvoří tedy konver-

gentní nekonečnou řadu geometrickou o kvocientu $\frac{1}{2}$, jejíž součet, udávající objem T celého rotačního tělesa, jest konečný a rovná se dvojnásobnému objemu prvního částečného tělesa, ležícího mezi $x=1$ a $x=2$. Doložíme-li úvahu o rotačním tělese dalšími výpočty, obdržíme objemy částečných těles integrací.

$$T_1 = \int_1^2 \pi y^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad T_2 = \int_2^4 \pi y^2 dx = \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$T_{n+1} = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} T_n.$$

Pak

$$T = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \dots = \pi,$$

jak také plyne z integrace od 1 do ∞ .

Jádro paradoxu vězí v problému konvergence a divergence nekonečných řad. Abychom žákům tento problém hlouběji objasnili, rozložíme ještě plochu P na částečné plochy od 1 do 2, od 2 do 3, od 3 do 4 atd. Po provedení integrace v jednotlivých intervalech obdržíme řadu

$$P = 12 + 1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} + \dots = \infty.$$

Rozložíme-li v týchž intervalech objem T , vznikne řada

$$T = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{20} + \dots = \pi.$$

Ač velikost členů v obou řadách klesá a konverguje k nule, jest přece první řada divergentní, druhá konvergentní; z dřívějšího výkladu jest jasno, že členy druhé řady, značící objemy, klesají rychleji. Kritéria konvergence řad se ovšem vymykají z rámce středního školního učiva.

Abychom využili co možno všestranně derivace funkce $l x$, bude zajímavavo z didaktického stanoviska ukázati žákům, že není třeba definovati pojem logaritmu na základě mocnin, nýbrž, že je možno jej definovati integrálem, vyplývajícím přirozenou cestou při kva-

dratuře hyperboly, totiž $l x = \int \frac{dx}{x}$. Tento postup, který navrhoval

pro střední školu Felix Klein, osvětluje historický fakt, že k celé řadě důležitých funkcí se dospělo integrálním počtem. Najde-li učitel v žactvu dosti zájmu, bude mu možno použití derivace $l x$ také pro řešení barometrického měření výšek.

DROBNOSTI.

K nauce o vlnění a akustice. Fyzikální vyučování má poskytnouti žáku po stránce obsahové takový obraz dění přírodního, pokud toto spadá do fyziky, který by byl spolehlivým základem pro vybudování vědeckého názoru světového. Jednotlivé oddíly jest třeba projednati se zevrubností a důkladností potřebnou k získání správné představy; neúplnost může vésti k představám mylným. Z tohoto stanoviska mám za to, že nebylo správné v novějších vydáních učebnice Dr. B. Maška pomítnouti odstavce, které pak umožňují podrobnější výklad o lomu zvuku a o významu úplného odrazu zvuku. Považuji za záhodno, aby byla v oddíle o vlnění připojena Huygensova konstrukce lomeného paprsku, a aby byly vysvětleny lom ke kolmici a od kolmice a úplný odraz vln. Stejně se jeví nutným pojednati v akustice o rychlosti zvuku v kapalinách a tělesech tuhých. Tím se umožní výklad důležité vlastnosti lomu zvuku, který se vyznačuje při přechodu ze vzduchu do kapalin a