Arnošt Dittrich

Řady aritmetické

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, D22--D26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122727

Uvedené měření může býti zařaděno do praktických cvičení fysikálních, užijeme-li pak objektivního odčítání zrcadlového, je to pěkný pokus školní stejně jednoduchý jako pokus se zrcadlovým galvanometrem.

V další práci bude popsán podobný přístroj, jímž určuje se gravitační konstanta z doby kyvu torsních vážek v silovém poli gravitačním — metoda dynamická oproti předešlé statické.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně, v červnu 1926.

Řady aritmetické.

Ukázka ze sbírky řešených příkladů Dra. *Arnošta Dittricha.*

1. Sečtěte čísla od 1 do 5 za sebou následující!

$$
\begin{array}{r}
s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\
s_5 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
\hline
2s_5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \\
s_5 = 5 \,.\, 6 : 2
\end{array}
$$

2. Sečtěte sudá čísla od 2 do 8 za sebou následující!

Obdobně jako 1. Učitel neustále užívá označení řada, diference, součet řady, první člen, poslední člen.

3. Obecný člen řady sudých a lichých čísel

$$
\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots n \ldots \\
2,\ 4,\ 6,\ 8, 10 \ldots 2n \ldots \\
1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \ldots 2n - 1
\end{array}
$$

Obecný člen přirozené řady čísel jest n-tý. Obecný člen řady sudých čísel jest zase n-tý. Píše se proto pod »n« v prvém řádku. Co se tam napíše, odvodíme indukcí. Podobně s řadou lichých čísel, kterou odvodíme z hořejších sudých ubráním jednotky.

Zkouška: Odvoďme člen »$n + 1$«-ní řady sudých i lichých čísel, jednak vzorcem, jednak úvahou! Člen »$n + 1$«-ní podle vzorce jest

v řadě čísel sudých: $2(n + 1) = 2n + 2$
v řadě čísel lichých: $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$.

Členy za rovnítkem lze však odvoditi také úvahou tím, že n-té členy obou řad zvětšíme o jejich diferenci 2.

Teprve touto zkouškou, jež sluje důkazem z »n« na »$n + 1$«, jsou vzorce pro obecné liché a sudé číslo zabezpečeny. Úplná indukce zakládá se na tom, že vzorec odvozený ze začátečních členů zabezpečí se i pro sousední vyšší člen. Pak platnost pro první člen zajišťuje ji až do nekonečna.

4. Součty řady lichých čísel.

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots n \ldots \\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots 2n-1 \ldots \\ \hline 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \ldots n^2 \ldots \end{array}$$

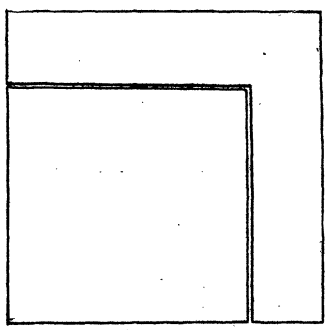
Zkouška: Vzorce n^2 použijeme pro »$n+1$«-ní člen; dostaneme

$$1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2=n^2+(2n+1)$$

Řadu před rovnítkem lze však sečísti také tím, že nejprve sečteme n členů a potom připojíme poslední:

$$(1+3+\ldots+2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1).$$

Shoda výsledků ověřuje úplnou indukcí myšlenku: Součty lichých čísel za sebou jdoucích dávají řadu čtverců čísel pořadových.



Použití: Při volném pádu mají se dráhy vykonané v jednotlivých sekundách po sobě jdoucích k sobě jako čísla lichá: $1:3:5:\ldots$. Proto mají se dráhy za 1, za 2, za 3, ... *sec* vykonané k sobě jako $1:4:9\ldots$, t. j. jako čísla čtvercová. (Leonardo da Vinci.)

5. Geometrické odvození součtu lichých čísel za sebou jdoucích. Všimněme si na šachovnici, že kol čtverečku v rohu kladou se 3 čtverečky, čímž vzniká čtverec druhý, velikostí rovný 4 čtverečkům šachovnice. Přidáme-li 5 čtverečků dalších, jež se druhého čtverce zevně dotýkají, dostaneme čtverec třetí, jenž čítá 9 čtverečků šachovnice. Pokračujíce čteme ze šachovnice větu, že součty lichých čísel za sebou jdoucích dají čísla čtvercová. Tato indukce doplní se důkazem z »n« na »$n+1$« na n-tém čtverci, k němuž se přiloží jeho »gnomon«. Viz obrazec. Z něho čteme

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

Při této příležitosti připomeneme si, jak rozklad »gnomonu« čtverce ve známé 4 shodné trojúhelníky pravoúhlé vede při obvodovém jich seskupení k důkazu věty Pythagorovy.

7. Obecný člen řady, jejíž první člen jest a_1, diference d. Obdobně k řadě sudých a lichých čísel píšeme

$$\frac{1.,\ 2.,\ \ 3.,\ \ldots\ldots\ldots\ n.,\ \ldots}{a,\ a+d,\ a+2d\ \ldots\ a+(n-1)\,d\ \ldots}$$

Člen n-tý nalezen indukcí pomocí začátku řady. Ověří se tím, že se $(n+1)$-ní člen vyvodí jednak ze vzorce pro n-tý dosazením $n+1$, jednak přičtením diference. Jest pak skutečně

$$a_{n+1} = a + nd = a + (n-1)d + d$$

8. Součet řady n-členné, jejíž první člen jest a, poslední u. Napodobí se v algebraickém rouše numerický příklad 1. a 2.:

1	a	u	$a+u$
2	$a+d$	$u-d$	$a+u$
3	$a+2d$	$u-2d$	$a+u$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$n-2$	$u-2d$	$a+2d$	$a+u$
$n-1$	$u-d$	$a+d$	$a+u$
n	u	a	$a+u$
	s_n +	s_n =	$2s_n$

$$2s_n = (a+u)\,n$$

$$s_n = \frac{a+u}{2}\,n.$$

9. Ilustrací předchozího počtu jest příklad: Lichoběžníkovitá část střechy čítá v nejhořejší řadě a tašek, v každé další o d tašek více a v nejspodnější u tašek. Kolik tašek naplňuje zmíněnou plochu lichoběžníkovitou?

Memoruje se: Je-li první člen aritmetické řady a, obecný a_n, poslední sčítaný u, diference d, jest

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

$$s_n = \frac{a+u}{2}\,n$$

10. Obecný člen řady zní $6n-5$. Součet prvých n členů řady?

$$a_n = 6\,n - 5.$$

Proto jest

$$a = a_1 = 1;\ u = a_n = 6\,n - 5,$$

takže

$$s_n = \frac{n}{2}[1 + (6n-5)] = n\,(3n-2).$$

11. Součet všech celých čísel od 1 do 1000? — Čísel těch jest ovšem tisíc. Proto jest

$$s_{1000} = 500 \,.\, (1 + 1000) \doteq 500500.$$

Počet čísel lze soustavně odvoditi ze vzorce

$$a_n = 1 + (n - 1) \,.\, 1 = n.$$

Užijeme-li jej pro poslední člen $a_n = 1000$, jest

$$1000 = n.$$

12. Součet lichých čísel od 1 do 99? — Počet sčítanců vyšetří se z

$$a_n = 1 + (n - 1) \,.\, 2 = 2n - 1$$

$$99 = 2n - 1;\ n = 50.$$

Jest tedy

$$s_{50} = 2500.$$

Polovina z 50 se násobí $1 + 99$.

13. Sečtěte n členů řady $1, 3, 5 \ldots$! — Vyvineme n-tý člen

$$a_n = 1 + (n - 1) \,.\, 2 = 2n - 1,$$

jenž při sčítání jest členem posledním. Proto jest

$$s_n = \frac{n}{2}(2n - 1 + 1) = n^2.$$

Viz příklad 4. a 5.!

14. Sečtěte n členů řady $2, 4, 6 \ldots$! Řeší se obdobně na př. 13.

15. Sečtěte 20 členů řady, jejíž obecný člen zní $3n + 1$! Lze jej přímo napsati pomocí sumačního symbolu ve formě

$$s_{20} = \sum_{1}^{20} (3n + 1) = 4 + 7 + \ldots + 61$$

$$s_{20} = 10 \,.\, 65 = 650.$$

16. Obecný člen řady čísel $1, 2, 3 \ldots$ jest n. Sečtěte n členů! — Pak jest poslední člen

$$u = n$$

$$s_n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

17. Odvoďte obecný vzorec součtový z posledního vzorce propočítáním symbolického součtu

$$s_n = \sum_{1}^{n} [a + (n - 1)\, d]$$

$$s_n = \Sigma [a - d + nd] = n(a - d) + d\, \Sigma n$$

$$\Sigma n = \frac{n}{2}(n + 1),$$

což jest součet přirozené řady čísel od 1 do n. Proto jest

$$s_n = n(a - d) + d\frac{n}{2}(n + 1)$$

$$s_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(a + u).$$

Stačilo by tedy, aby se úvaha př. 8. provedla jen s přirozenou řadou čísel. — Vypracujte to jako cvičení!

*

Myslím, že takové příklady musí počítati více méně každý-učitel matematiky. Dalších vzorců a příkladů uveřejňovati nebudu, protože se volba jejich již řídí našimi zálibami. Vřadíme tu zajisté i příklady, jež sami jsme utvořili. Nalézám ve svých sbírkách na př. úlohy na národohospodářský pojem Quetu. Quet jest náklad potřebný k vydržování kojence od narození do konce 1. roku. Každým dalším rokem stoupá nutný náklad o 0·1 quetu. U muže končí stoupání rokem 24., u ženy 20. Quet (před světovou válkou) měl peněžní hodnotu asi 100 K. Dával jsem úlohy:

1. Kolik quetů stojí vydržování děcka v jeho n-tém roce? — Výsledek: $(9 + n) : 10$ quetů. Septimán stojí 2·6 quetu.

2. Kolik quetů stojí vydržování mladíka do 24. roku? — Odpověď: 51·6 quetu.

FRANTIŠEK ONDRÁK:

O tělese vzniklém rotací rovnoosé hyperboly kol asymptoty.

V minulém ročníku »Přílohy« str. 126. je dotaz po výkladu paradoxa, že nekonečně velká plocha, kterou uzavírají mezi rovnoosou hyperbolou $y = 1/x$ a osou x pořadnice příslušné k $x = 1$ a $x = \infty$, vytvoří otočením kol osy x těleso objemu konečného. Výklad tento je možný bez derivací a integrálů a vůbec bez složitějšího aparátu početního na základě úvah velmi elementárních. Jelikož však chci úvahy doprovoditi výpočty, vložím tento názorný výklad do pojednání početního, při čemž na jeho nezávislost na ostatních výpočtech upozorním.

Nejprve však odpovím na otázku, připojenou ke článku redakcí a závažnou se stanoviska didaktického, zda se odvozením založeným na derivaci funkce logaritmické nezachází na střední škole příliš daleko. Na tuto otázku bude a musí býti jinak odpověděno pro různé ročníky nejvyšší třídy. Je tu třeba přihlížeti k celkové úrovni matematické výuky žactva a k času, který má učitel k disposici při