Alois Ždímal

Obrazce Lissajous-ovy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 141--143

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122719`

jsou takové, že

$$f(x_1, x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2,\ r_1(x_1, x_2, y_1, y_2),\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$r_{n-1}(x_1, x_2;\ y_1, y_2)$$

jest řada Sturmových funkcí podobných vlastností jako řada (2); o této věci však netřeba se více šířiti.

Obrazce Lissajous-ovy.

Napsal **A. Ždímal**, Telč (Morava).

Z tvaru libovolné Lissajous-ovy křivky lze přesně stanoviti, kterého případu skládání dvou kmitavých pohybů ve směrech k sobě kolmých je grafickým znázorněním. Kriteriem je tu věta odpozorovaná z pokusů: „Počet horních (spodních) vrcholů křivky (v_h) má se k počtu vrcholů postranních (v_p), tak jako perioda složky vodorovné k periodě složky svislé.“ Platnost její lze jednoduše odůvodniti mathematicky:

Všeobecná rovnice pro Lissajous-ovy obrazce zní:

$$p \; arc \; sin \; \eta - q \; arc \; sin \; \xi = p\varepsilon. \text{*)} \tag{1}$$

I. Chceme-li ustanoviti počet horních vrcholů křivky dané rovnicí (1), řešíme ji s rovnicí horní tečny, jež má tvar:

$$\eta = 1; \tag{2}$$

tak dostaneme jednoduchým obratem pro ξ rovnici

$$\xi = sin \frac{p}{q} \left[(4k + 1) \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$$

a vzhledem k významu písmeny ξ

$$x = a \; sin \frac{p}{q} \left[(4k + 1) \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]. \tag{3}$$

To jest obecná rovnice pro úsečky jednotlivých horních vrcholů; k znamená tu, jak obyčejně, libovolné číslo přirozené

---

*) Viz str. 383 roč. XXXI. tohoto časopisu v pojednání dvor. r. prof. dra. Č. Strouhala »Obrazce Lissajous-ovy«, nebo str. 8 brožury: »Analytische Darstellung der Lissajous-schen Figuren« od téhož autora (Praha 1902. Separatabdruck aus den Sitzungsberichten der Königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 1902).

řady číselné. Z ní dostáváme

$$1.\ \text{pro}\ k = 0\ x_0 = a \sin \frac{p}{q}\left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right],$$

$$2.\ \text{„}\ k = 1\ x_1 = a \sin \frac{p}{q}\left[5\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right],$$

$$3.\ \text{„}\ k = 2\ x_2 = a \sin \frac{p}{q}\left[9\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]\ \text{atd.}$$

$$4.\ \text{„}\ k = q\ x_q = a \sin \frac{p}{q}\left[(4q+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] =$$

$$a \sin \frac{p}{q}\left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] = x_0.$$

Klademe-li za k další hodnoty $q+1,\ q+2,\ q+3,\ldots$, shledáme, že se hodnoty x_1, x_2 atd. opakují, že tedy pro x je jen q různých hodnot $(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{q-1})$. Křivka (1) má tudíž všeobecně jen q horních vrcholů $(v_h = q)$.

Podobně řešením (1) a

$$\eta = -1 \qquad (4)$$

lze ukázati, že křivka má q vrcholů spodních.

II. Počet postranních vrcholů (po pravé straně) ustanovíme, řešíme-li (1) s

$$\xi = 1, \qquad (5)$$

kterážto rovnice představuje nám tečnu ležící po pravé straně křivky; a přijdeme tak k výsledku

$$\eta = \sin \frac{q}{p}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{p}{q}\varepsilon\right],$$

čili

$$y = b \sin \frac{q}{p}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} \mp \frac{p}{q}\varepsilon\right]. \qquad (6)$$

Odtud plyne

$$1.\ \text{pro}\ k = 0 : y_0 = b \sin \frac{q}{p}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{p}{q}\varepsilon\right],$$

$$2.\ \text{„}\ k = 1 : y_1 = b \sin \frac{q}{p}\left[5\frac{\pi}{2} + \frac{p}{q}\varepsilon\right],$$

$$3.\ \text{„}\ k = 2 : y_2 = b \sin \frac{q}{p}\left[9\frac{\pi}{2} + \frac{p}{q}\varepsilon\right]\ \text{atd.}$$

4. pro $k = p : y_p = b \sin \frac{q}{p} \left[(4p + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{p}{q} \varepsilon \right] =$

$$b \sin \frac{q}{p} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{p}{q} \varepsilon \right] = y_0.$$

Kladouce za k dále $p + 1$, $p + 2, \ldots$, poznáme, že se y_1, y_2, atd. opakují. Z toho je patrno, že pro y je jenom p různých hodnot $(y_0, y_1, y_2, \ldots y_{p-1})$, čili: křivka udaná rovnicí (1) má všeobecně jen p postranních vrcholů $(v_p = p)$.

Podobným postupem lze dokázati, že má křivka (1) také na levé straně jen p vrcholů, řešíme-li s její rovnicí rovnici levé tečny

$$\xi = -1. \tag{7}$$

Platí tedy

$$\frac{v_h}{v_p} = \frac{q}{p} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = n, \quad \text{q. e. d.}$$

Dokázaná věta má platnost nejen pro tvary rozvinuté, nýbrž i pro tvary přechodní (degenerované). V tomto posledním případě musíme ovšem býti pamětlivi toho, že

1. kde v přechodním tvaru je vrchol, tam se kladou na sebe 2 části křivky, tam je křivka dvojitá, bod v jedné periodě výsledného pohybu probíhá tudy dvakráte (ovšem ve směrech opačných); nutno tedy vrchol takový počítati za dva!;

2. kde v přechodním tvaru křivka končí, tam se pohybující bod obrací, aby spěl touž cestou zpět; konec takový vznikl z vrcholu křivky tím, že části příslušný vrchol vytvořující položily se na sebe. I nutno takový konec počítati za vrchol.

O síle setrvačnosti.

Napsal **Jos. Krkoška**, prof. v Pelhřimově.

V různých zpracováních dnešní mechaniky, jak v jednotlivých o sobě, tak zvláště u vzájemném jich srovnání, potkáváme se s vážnými nesrovnalostmi i nejasnostmi. Za elementárný a názorný má se na př. pokus s tělesem na ruce vodorovně vztažené drženým, jenž k různým účelům hned na počátku mechaniky se uvádívá. Avšak jak rozdílné bývá jeho podání! Dle jedněch cítíme zde tíži zemskou, dle jiných statický účinek tíže