Václav Hübner

Příspěvek ke stanovení vrženého stínu plochy kulové na průmětny při osvětlení geometrálním

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 199--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122718

V případě, kdy $\varrho = 0$, jest

$$K_1 = K - \frac{n(A^2 + 16P^2)}{4A}.$$

Případ takový jest pouze jeden, neboť kružnice smrskují se na své středy. Pro součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů tohoto zvláštního odvozeného mnohoúhelníka obdržíme

$$V_1 = \frac{K}{n} - \frac{A^2 + 16P^2}{4A} + nr^2,$$

a tedy

$$V - V_1 = \frac{A^2 + 16P^2}{4A}.$$

Poněvadž všecky, zde uvedeným způsobem odvozované mnohoúhelníky mají s původním arithmetický střed společný, jest $\varrho = 0$ a formule (6) nabývá tvaru

$$K' = K + K_1.$$

Věty, v tomto článku obecně pro mnohoúhelník vyvozené, byvše applikovány na trojúhelník, podávají velmi zajímavé výsledky, jež si interesující se čtenář snadno vyvoditi může.

Příspěvek ke stanovení vrženého stínu plochy kulové na průmětny při osvětlení geometrálním.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

Jak známo, jest vržený stín plochy kulové na průmětnu ellipsa — vržený to stín hlavní kružnice, jejíž rovina stojí na směru paprsku S kolmo. Poloosy ellipsy jsou: hlavní $a = \dfrac{r}{\sin\alpha\,(\beta)}$ a vedlejší $b = r$, značí-li r poloměr plochy kulové a úhel $\alpha\,(\beta)$ odchylku paprsku od příslušné průmětny. Je-li směr paprsků S: $\sphericalangle\, S_1X_1 = \gamma$, $\sphericalangle\, S_2X_2 = \delta$, jest (obr. 1.)

$$z = d_1\, tg\,\alpha, \quad y = d_1 \sin\gamma \quad \text{a}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{tg\,\alpha}{\sin\gamma}.$$

Dále jest $z = -x\, tg\, \delta$, $y = -x\, tg\, \gamma$, čili

$$\frac{z}{y} = \frac{tg\, \delta}{tg\, \gamma}.$$

Potom jest

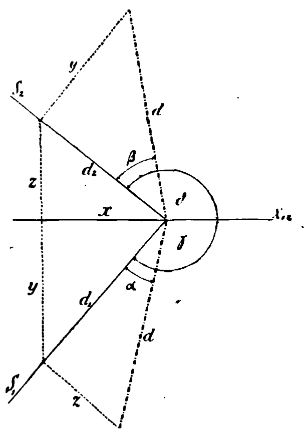
$$\frac{tg\, \alpha}{sin\, \gamma} = \frac{tg\, \delta}{tg\, \gamma},$$

čili
$$tg\, \alpha = tg\, \delta\, cos\, \gamma,$$

proto jest

$$sin\, \alpha = \frac{tg\, \delta\, cos\, \gamma}{\sqrt{1 + tg^2\, \delta\, cos^2\, \gamma}}$$

a
$$a = \frac{r\sqrt{1 + tg^2\, \delta\, cos^2\, \gamma}}{tg\, \delta\, cos\, \gamma}.$$



Obr. 1.

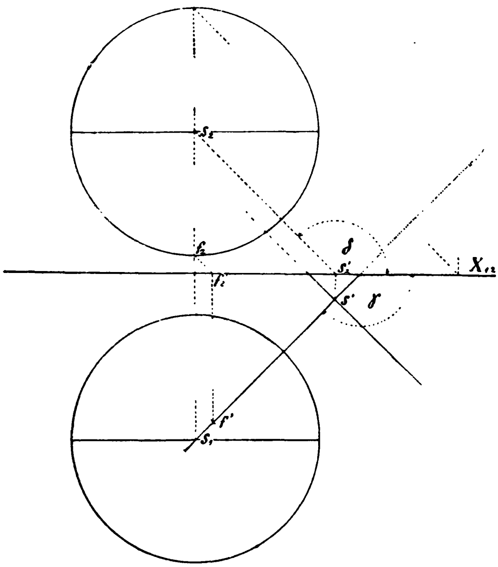
Délková výstřednost ellipsy

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{r\, cotg\, \delta}{cos\, \gamma}.$$

Z obrazce 2. poznáváme, že $\overline{s'_2 f'_2} = -\overline{s'f'}\, cos\, \gamma$ a $\overline{s'_2 f'_2} = -r\, cotg\, \delta$, z čehož

$$\overline{s'f'} = \frac{r\, cotg\, \delta}{cos\, \gamma} = e.$$

Jest tedy *stín bodu nejbližšího* na ploše kulové od příslušné průmětny *ohniskem ellipsy* (vrženého stínu) na tuto průmětnu. *Stín bodu nejvyššího* na ploše kulové od příslušné průmětny jest, jak známo, *druhým ohniskem ellipsy.*



Obr. 2.

Pro druhou průmětnu dospějeme k obdobným vzorcům, píšeme-li jen místo

$$\alpha \;.\;.\; \beta,$$
$$\gamma \;.\;.\; \delta,$$
$$\delta \;.\;.\;.\; \gamma.$$

Důsledky: 1. Při obvyklém směru paprsků: $S \sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta = 135^0$, jest $tg\, \alpha = sin\, 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $sin\, \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pročež $a = r\sqrt{3}$, t. j. poloosa hlavní ellipsy rovná se výšce trojúhelníka rovnostranného o straně $2r$. Délková výstřednost ellipsy $e = r\sqrt{2}$, jest úhlopříčnou čtverce o straně r.

2. Je-li $\gamma = 0$, $\delta = 135^0$, jest $a = r\sqrt{2}$ a $e = r$.

3. Je-li $\alpha = \beta = 45^0$, jest $\gamma = \delta = 90^0$, tudíž $a = r\sqrt{2}$ a $e = r$.

Je-li naopak určiti směr paprsku tak, aby $\gamma = \delta$ a poloosa hlavní ellipsy byla

$$a = nr, \ (n > 1),$$

pak jest

$$sin\ \alpha = \frac{1}{n} \text{ a } tg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Dále jest $tg\ \alpha = tg\ \gamma\ cos\ \gamma = sin\ \gamma$, pročež

$$sin\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Tak na př. pro $n = \sqrt{5}$, jest $sin\ \gamma = \frac{1}{2}$, $\sphericalangle\ \gamma = 150^0$, $a = r\sqrt{5}$, $e = 2r$.

Dodatek.

Odchylky α, β, γ, δ jsou v tomto spojení:

$$\frac{z}{y} = \frac{tg\ \alpha}{sin\ \gamma} = \frac{sin\ \alpha}{sin\ \beta},$$

tudíž

$$sin\ \gamma = \frac{sin\ \beta}{cos\ \alpha};$$

obdobně jest

$$sin\ \delta = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \beta}.$$

Násobíme-li a dělíme-li obě rovnice, obdržíme

$$sin\ \gamma\ .\ sin\ \delta = tg\ \alpha\ tg\ \beta$$

a

$$\frac{sin\ \gamma}{sin\ \delta} = \frac{sin\ 2\beta}{sin\ 2\alpha}.$$