Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Theorie maxim a minim.

Úvod k počtu differenciálnému píše dr. B. Bydžovský.

I. Funkce kvadratická.

1. Budiž rozřešena úloha:

Kladné číslo a jest rozložiti ve dva sčítance tak, aby součet jednoho sčítance a polovičního čtverce sčítance druhého byl co nejmenší (minimální).

Nazveme jeden z obou sčítanců x; číslo x může býti kladné nebo záporné, ježto jeden sčítanec může býti záporný (a druhý pak nutně kladný). Sčítanec druhý je $(a - x)$; úloha žádá určiti x tak, aby výraz

$$y = x + \tfrac{1}{2}(a - x)^2 \qquad (1)$$

nabyl hodnoty co nejmenší. Úloha řeší se známým způsobem: pokládáme v rovnici (1) x za neznámou a rovnici rozřešíme. Rovnici upravíme:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - (a - 1)x + \tfrac{1}{2}a^2$$
$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2y = 0$$
$$x_{12} = (a - 1) \pm \sqrt{2y - (2a - 1)}.$$

I soudíme: nejmenší přípustná hodnota diskriminantu

$$2y - (2a - 1)$$

je 0, ježto pro hodnoty menší, totiž záporné, x přestává býti reálným. I musí

$$2y - (2a - 1) \geqq 0$$
$$2y \geqq 2a - 1$$
$$y \geqq a - \tfrac{1}{2}$$

t. j. y je buď větší nebo rovno $a - \frac{1}{2}$; i jest nejmenší možná hodnota y rovna $a - \frac{1}{2}$. Příslušné x je rovno $(a - 1)$; a odpověď na úlohu zní: aby zmíněný součet nabyl hodnoty co nejmenší, musí druhý sčítanec býti roven jedné a prvý $(a - 1)$.

2. Sledujme jednoduchou úlohu právě provedenou podrobněji. K tomu cíli zvolme za a nějaké číslo zvláštní, na př. 3. Do rovnice (1) tuto hodnotu dosadíme:

$$y = x + \tfrac{1}{2}(3 - x)^2. \tag{2}$$

Tato rovnice má takový význam: zvolíme-li jeden sčítanec x čísla 3 zcela libovolně (buď kladný nebo záporný), udává nám rovnice (2) ihned, jak velký je příslušný součet y, jinými slovy: rovnice (2) přiřazuje každé hodnotě x určitou hodnotu y.

Naše úloha žádá určiti x tak, aby y mělo hodnotu co možná nejmenší; všimněme si však také, jakých hodnot nabývá y při jiných hodnotách x. Položme na př. za x postupně všechna celá čísla (nullu v to počítaje) od -3 do $+7$; vypočítejme vždy příslušnou hodnotu druhého sčítance $(3 - x)$ a příslušnou hodnotu y. Výsledky jsou sestaveny v tabulce:

$$\begin{array}{rccccccccccc}
x = & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\
3 - x = & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4 \\
y = & 15, & \frac{21}{2}, & 7, & \frac{9}{2}, & 3, & \frac{5}{2}, & 3, & \frac{9}{2}, & 7, & \frac{21}{2}, & 15.
\end{array}$$

Z tabulky této je patrno, že, klademe-li za x celá čísla postupně o jedničku větší od -3 počínaje, nabývá y hodnot nejprve postupně menších; hodnoty nejmenší nabude pro $x = 2$; pak nabývá y hodnot zase postupně větších. Avšak tabulka nám nepraví ničeho o tom, jaké jsou hodnoty y pro jiné hodnoty x, na př. pro všechny ty, jež leží mezi celistvými hodnotami x v tabulce uvedenými. Abychom tedy nabyli představy o tom, jak se mění y, když x nabývá všech možných hodnot (tedy lomených, nebo libovolně velkých kladných nebo záporných), zodpovězme otázku: *když x roste od jisté dané hodnoty k jiné, jak se mění y?* t. j. *roste také hodnota y či klesá?*

3. Abychom rozřešili úlohu právě vyslovenou, uvažujme takto: nechť má v rovnici (2) x zcela určitou hodnotu, které tedy odpovídá zcela určitá hodnota y; zvětšme pak x o číslo kladné, prozatím libovolně velké, které označíme Δx, abychom

naznačili, že běží o přírůstek, o který má právě x vzrůsti.[1]) Zvětšíme-li takovým způsobem x, změní se také y; tuto změnu analogicky označme Δy. Je pak Δy kladné, zvětší-li se, záporné, zmenší-li se y. Tento přírůstek Δy vypočteme z rovnice (2); neboť dosadíme-li do ní za x hodnotu $x + \Delta x$, nastoupí podobně $y + \Delta y$ za y.

Rovnici (2) upravíme:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + \tfrac{9}{2}.$$

I bude

$$y + \Delta y = \tfrac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + \tfrac{9}{2}$$
$$y + \Delta y = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + \tfrac{9}{2} + x\Delta x - 2\Delta x + \tfrac{1}{2}(\Delta x)^2.$$

Avšak y na levé straně ruší se — dle rovnice (2) — proti $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ na pravé straně, i obdržíme

$$\Delta y = \Delta x(x - 2 + \tfrac{1}{2}\Delta x). \tag{3}$$

Vzroste-li x o přírůstek Δx, vzroste y o přírůstek Δy, jejž z rovnice (3) vypočteme.

Na př.: $x = 5$; tomu odpovídá $y = 7$. Nechť x vzroste o 0·1; pak y vzroste o

$$\Delta y = 0{\cdot}1(5 - 2 + \tfrac{1}{2}0{\cdot}1),$$

t. j.

$$\Delta y = 0{\cdot}305,$$

t. j. pro

$$x = 5 + 0{\cdot}1 = 5{\cdot}1$$

je

$$y = 7 + 0{\cdot}305 = 7{\cdot}305.$$

Je-li $x = 1$, čemuž odpovídá $y = 3$, učiňme $\Delta x = 0{\cdot}1$; pak

$$\Delta y = 0{\cdot}1(1 - 2 + \tfrac{1}{2}0{\cdot}1) = -0{\cdot}095.$$

V prvém případu tedy y vzrostlo ($\Delta y > 0$), v druhém kleslo ($\Delta y < 0$).

---

[1]) Při tom Δx neznačí součin $\Delta \,.\, x$, neboť Δ samo neznačí žádnou veličinu, nýbrž jen symbol, který lze vyjádřiti slovem »přírůstek«; Δx tedy značí »přírůstek ku x« (srv. s tím jiné takové symboly v mathematice: *log*, *sin*, *arc* atd.). Čte se: delta x.

4. Nás zajímá v rovnici (3) znaménko Δy: kdy je kladné a kdy záporné. Na pravé straně této rovnice je součin, jehož jeden činitel, totiž Δx, je kladný dle zavedení.

Je tedy patrně $\Delta y > 0$ když $(x - 2) + \frac{1}{2}\Delta x > 0$
$\Delta y < 0$ „ $(x - 2) + \frac{1}{2}\Delta x < 0$.

Když x je zcela určitě dáno, závisí znaménko výrazu

$$(x - 2) + \tfrac{1}{2}\Delta x$$

na Δx. Na př. pro $x = 1$ je tento výraz $-1 + \frac{1}{2}\Delta x$. Pokud $\frac{1}{2}\Delta x$ je menší než 1, je tento výraz záporný; stane se kladným, je-li $\frac{1}{2}\Delta x$ větší než jedna.

Připomeňme si, co je naší úlohou: sledovati změnu y, když se mění x. Počne-li x se zvětšovati od určité hodnoty, y buď se rovněž počne zvětšovati a pak pravíme, že *y roste pro tuto určitou hodnotu x*; nebo y se počne zmenšovati a pravíme, že *y klesá pro tuto určitou hodnotu x*. Pravíme, počne-li se x zvětšovati; tím rozumíme: nabývá-li x hodnot postupně větších než je určitá daná. Ale hodnoty vyšší než je daná nabude x přidáním přírůstku sebe menšího. Chceme-li tedy poznati, zdali pro dané x hodnota y stoupá nebo klesá, musíme připojiti k x přírůstek co možná malý a počítati přírůstek Δy. Příklad nám tuto věc objasní: budiž

$$x = 1{\cdot}9; \text{ pak plyne z rovnice (2)}$$
$$y = 2{\cdot}505.$$

Zvětšme x o $\Delta x = \frac{1}{2}$; vypočítáme z rovnice (3)

$$\Delta y = 0{\cdot}075.$$

Jestliže tedy x se zvětší z $1{\cdot}9$ na $1{\cdot}9 + 0{\cdot}5 = 2{\cdot}4$, vzroste y z $2{\cdot}505$ na $2{\cdot}580$. Ale nejsme oprávněni souditi z toho, že pro $x = 1{\cdot}9$ y stoupá. Neboť zvětšíme-li x o přírůstek menší, na př. $\Delta x = 0{\cdot}1$, obdržíme

$$\Delta y = 0{\cdot}1(-0{\cdot}1 + \tfrac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}1) = -0{\cdot}005,$$

t. j. Δy zase záporné. Zároveň však pozorujeme, že, *kdybychom zvolili za Δx jakoukoliv hodnotu menší než 0·01, vyjde Δy vždycky záporně*, neboť v rovnici

$$\Delta y = 0{\cdot}1(-0{\cdot}1 + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

v závorce stále převládá $-0{\cdot}1$ nad $\frac{1}{2}\Delta x$. I je jasné, že, když x počne růsti od $1{\cdot}9$, Δy je záporné a y tedy pro tuto hodnotu klesá.

Tuto úvahu možno provésti pro jakoukoliv hodnotu x. Ve vzorci

$$\Delta y = \Delta x(x - 2 + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

zvolme Δx tak, aby $\frac{1}{2}\Delta x$ bylo číselně menší než $(x - 2)$. Pak znaménko závorky bude se říditi znaménkem výrazu $(x - 2)$. *Je-li tento výraz kladný, je Δy kladné nejen pro zvolené Δx, nýbrž i pro každé menší, ať je malé jakkoliv.* Z toho následuje, že, počne-li x růsti, Δy je kladné. Obdobná úvaha platí pro případ, že $x - 2$ je záporné.

I nabyli jsme tohoto výsledku: chceme-li rozhodnouti, zdali pro dané x hodnota y stoupá nebo klesá, t. j. zdali se y zvětší nebo zmenší, když x vzroste o přírůstek co možná malý, musíme zvoliti za tento přírůstek číslo takové, aby jeho polovina byla číselně menší než $x - 2$. O znaménku Δy pak rozhoduje právě výraz $x - 2$; i je

$$\begin{aligned} \Delta y &> 0 \quad \text{pro} \quad x - 2 > 0, \\ \Delta y &< 0 \quad \text{„} \quad x - 2 < 0, \end{aligned}$$

t. j. *y stoupá pro všechny hodnoty x, pro něž $x - 2 > 0$, klesá pro všechny hodnoty x, pro něž $x - 2 < 0$.*

Pokud tedy x je menší než 2, y s rostoucím x klesá; je-li x větší než 2, y s rostoucím x stoupá. Z toho plyne, co jsme již dříve nalezli: *když $x = 2$, přechází klesání ve stoupání, hodnota y přestává klesati a počíná stoupati; pravíme, že y nabývá hodnoty minimální* (která je $\frac{5}{2}$).

Je nyní patrno, že jsme nabyli dosti jasného přehledu o celkovém průběhu hodnot y, když x nabývá všech hodnot od $-\infty$ do $+\infty$; můžeme totiž výsledek právě nalezený vysloviti také tak: když x od hodnoty 2 stoupá do nekonečna, y stoupá od $\frac{5}{2}$ do nekonečna; a když x od téže hodnoty 2 klesá k $-\infty$, y zase stoupá od $\frac{5}{2}$ do nekonečna. Čili: *když x probíhá všechny hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, y napřed klesá od $+\infty$ k $\frac{5}{2}$ a pak zase stoupá od $\frac{5}{2}$ do $+\infty$.*

5. Přehledu nejdokonalejšího nabudeme, když to, co jsme prováděli dosud jen počtem, *graficky znázorníme* dle způsobu

analytické geometrie.[2]) Zvolíme v rovině dvě osy navzájem kolmé, jež se protínají v počátku O; označíme osu běžící od levé ruky k pravé OX, druhou OY. Osu OX nazýváme osou úseček (také osou x-ovou), OY osou pořadnic (osou y-ovou). Na osu úseček nanášíme úseky od počátku v pravo kladné, v levo záporné; na osu pořadnic nanášíme od počátku vzhůru úseky kladné, dolů úseky záporné. Vytkneme-li v rovině libovolný bod a spustíme s něho kolmice na obě osy, vzniknou v obou osách úseky měřené od počátku; úsek v ose x-ové nazýváme úsečkou daného bodu a značíme x, úsek v ose y-ové nazýváme pořadnicí bodu a značíme y. x, y jsou pak souřadnice bodu. Je patrno, že vzdálenost bodu od osy úseček je jeho pořadnice, vzdálenost od osy pořadnic jeho úsečka. Každému bodu přísluší určitá úsečka x a pořadnice y; naopak je svými souřadnicemi bod v rovině jednoznačně určen, čili ku každé dvojici souřadnic x, y náleží jediný bod v rovině. Abychom jej nalezli, naneseme na osu úseček od počátku úsečku x (v pravo, je-li x kladné, v levo, je-li záporné); v koncovém bodu úsečky vztyčíme kolmici, na níž naneseme od osy úseček vzhůru nebo dolů pořadnici y. Tak obdržíme bod, jenž má dané souřadnice.

Sestrojme v rovině body, jež mají za souřadnice dvojice x, y, jak jsou sestaveny v tabulce (obr. 1.). Tak obdržíme celkem 11 bodů; první odpovídá dvojici $x = -3$, $y = 15$, druhý dvojici $x = -2$, $y = \frac{21}{2}$ atd. Toto znázornění je přehlednější než tabulka; vidíme na obrazci jedenáct bodů, jichž pořadnice, t. j. vzdálenosti od osy x-ové, svou délkou znázorňují hodnoty y, příslušné k těm hodnotám x, jež jsou znázorněny příslušnými úsečkami.

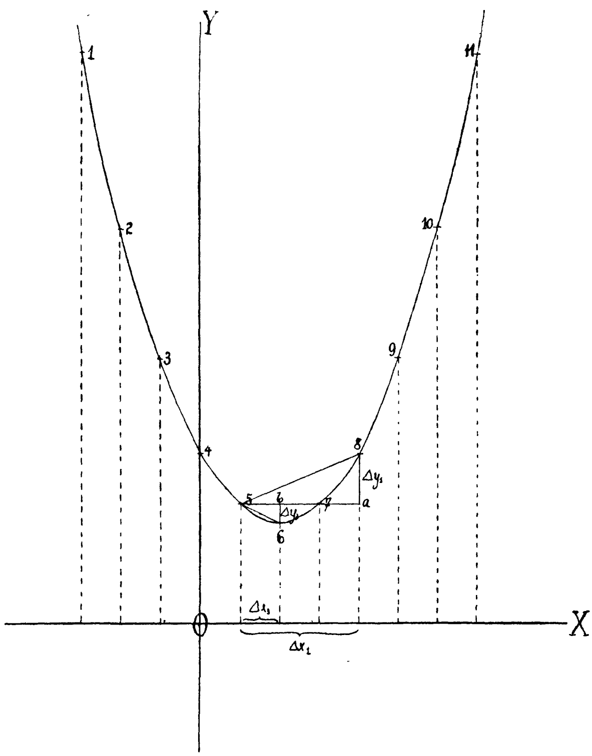
Kdybychom pro každou hodnotu x vypočetli příslušné y a sestrojili body tomu odpovídající, obdrželi bychom souvislou řadu bodů, jež by tvořila křivku. Tato křivka musí — dle výkladu svrchu provedeného — klesati až k hodnotě $x = 2$ a odtud stoupati. I spojíme body 1 až 11 křivkou, která by měla tuto

---

[2]) K pochopení toho, co zde vykládáno, není nezbytné třeba obšírné znalosti analytické geometrie; pokud pomůcek jejích bude užito, vždy se to stane s náležitým objasněním.

vlastnost a nabyli jsme tak úplného přehledu o průběhu hodnoty y, když mění se x.[3])

V obr. 1. je zároveň znázorněna úvaha, kterou jsme provedli výše (odst. 4.). Zvolme $x = 2$; zvětšme x o Δx: a) Δx_1



Obr. 1.

$= 3$; tím obdržíme bod 8. Bodem 2 veďme rovnoběžku s osou X, jež protne pořadnici bodu 8 v bodě a; je pak ihned patrno, že úsečka $\overline{a8}$ značí Δy_1, které je v tomto případě kladné, směřujíc vzhůru;

[3]) Křivka ta byla by sestrojena přesně, kdybychom určili všechny její body, což ovšem není možno; je však sestrojena tím přesněji, čím více jejích bodů určíme.

b) $\Delta x_2 = 2$; v tomto případě $\Delta y_2 = 0$;

c) $\Delta x_3 = 1$; Δy_3 je vyjádřeno délkou $\overline{b6}$ a je záporné. Kdybychom Δx volili stále menší, bude Δy stále záporné, jak je z obrazce patrno.

Máme tedy znázorněnu tu okolnost, že znaménko Δy závisí na velikosti Δx, že však je stálé, když Δx klesne pod jistou hodnotu.

Jako nejdůležitější výsledek dosavadní vytýkáme tento: *změna hodnoty y je závislá na znaménku lineárného výrazu* $x - 2$; *pro tu hodnotu, pro niž tento výraz je roven nulle, nabývá y hodnoty minimální.*

6. Tento výsledek značně sevšeobecníme. Uvažujme totiž libovolný výraz kvadratický

$$y = ax^2 + 2bx + c,$$

kde a, b, c mohou býti libovolná čísla kladná nebo záporná. Vypočteme Δy, o které vzroste y, když x vzroste o Δx. I jest

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + 2b(x + \Delta x) + c$$
$$\Delta y = \Delta x(2ax + 2b + a\Delta x).$$

Zase bychom usoudili zcela obdobně, že y $\begin{matrix}\text{stoupá}\\ \text{klesá}\end{matrix}$ pro ty hodnoty x, pro něž

$$\begin{matrix} 2ax + 2b > \\ 2ax + 2b < \end{matrix} 0.$$

Jestliže pak x je takové, že $2ax + 2b = 0$, je patrno, že přechází klesání ve stoupání a y pak nabývá své hodnoty nejmenší (minimální), nebo přechází stoupání v klesání a y nabývá své hodnoty největší (maximální). Z $2ax + 2b = 0$ plyne

$$x = -\frac{b}{a},$$

t. j. pro tuto hodnotu nabývá y hodnoty největší nebo nejmenší, stručně: hodnoty krajní (extremní).

Avšak tím docházíme téhož výsledku, k jakému nás vede onen obvyklý způsob, zpředu uvedený; neboť ptáme-li se, kdy

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

nabývá hodnoty největší nebo nejmenší, řešíme tuto rovnici dle x:

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a(c-y)}}{2a};$$

položíme diskriminant rovným 0;

$$x = -\frac{b}{a},$$

je pak ta hodnota x, pro kterou y má hodnotu krajní. Avšak způsob, jakým jsme zde k témuž výsledku došli, má dvojí výhodu před tímto zdánlivě jednodušším: jednak objasnil se nám význam výrazu $2ax + 2b$ a poznali jsme některé nové pojmy; jednak je to způsob, který nám dovoluje řešiti také takové úlohy, v nichž x vystupuje v mocninách vyšších než druhé. Poznáme to co nejdříve na příkladech.

7. Dříve však ještě musíme zavésti několik nových názvů. Veličinu y, která tak závisí na veličině x, že pro každé x lze udati určitou její hodnotu, nazýváme *funkcí* veličiny x; i píšeme $y = f(x)$, což čteme „y je funkce x“ a znamená to tolik: y je vyjádřeno jako určitý výraz, jenž obsahuje x. Tak v našem nahoře provedeném příkladě je y *kvadratická funkce* x; chápeme, že existují také *funkce jiných stupňů*, na př.

$$u = 3z^5 + 5z^3 - z^2 + 7z - 3;$$

u je funkce z stupně 5. atd.

Jiné známé příklady funkcí jsou funkce goniometrické, logarithmus, arcus úhlu.

Vzpomínáme si, že x značilo v našem příkladu jeden sčítanec čísla 3; tento sčítanec jsme mohli voliti, jak jsme chtěli, neboť mohl býti číslo jakékoliv. Není tedy x číslo určité, nýbrž může nabýti hodnot velmi rozmanitých; pravíme, *že je veličina proměnná*, a sice *nezávisle proměnná*, ježto změna x není podmíněna žádným mathematickým vztahem, nýbrž závisí jen na naší libovůli. Když se x mění, mění se i jeho funkce y; je tedy také y veličina proměnná, ale *závisle proměnná*, ježto změna y je závislá na změně x.

II. Funkce kubická. Funkce goniometrická.

1. Užívajíce názvů právě zavedených, rozřešme tuto úlohu, jež je podobná prvé, ale vede k funkci stupně třetího (kubické): *Číslo 3 rozložiti ve dva sčítance tak, aby součet pětiny třetí mocniny jednoho a poloviny čtverce druhého nabyl hodnoty nejmenší nebo největší.*

Nazveme-li jeden sčítanec x, je naší úlohou sledovati změnu této funkce:

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}(3 - x)^2$$

čili

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}. \qquad (1)$$

Sestavme si opět tabulku, na základě které provedeme grafické znázornění:

$x =$	$-6,$	$-5,$	$-4,$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	5
$3 - x =$	$9,$	$8,$	$7,$	$6,$	$5,$	$4,$	$3,$	$2,$	$1,$	$0,$	$-1,$	-2
$y =$	$-2{\cdot}7,$	$7,$	$11{\cdot}7,$	$12{\cdot}6,$	$10{\cdot}9,$	$7{\cdot}8,$	$4{\cdot}5,$	$2{\cdot}2,$	$2{\cdot}1,$	$5{\cdot}4,$	$13{\cdot}3,$	27

Všimněme si, že hodnota y nejprve stoupá (od $-2{\cdot}7$ do $12{\cdot}6$), pak klesá (do $2{\cdot}1$), načež opět stoupá. Abychom i v tomto případě přesně rozhodli, pro které hodnoty proměnné x funkce y stoupá a pro které klesá, dosadíme do rovnice (1) $x + \Delta x$ za x; za y pak nastoupí $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = \frac{1}{5}(x + \Delta x)^3 + \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + \frac{9}{2}.$$

Provedeme-li naznačené úkony a užijeme pak rovnice (1), obdržíme

$$\Delta y = \Delta x \left[\frac{3}{5}x^2 + x - 3 + \Delta x\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right)\right]. \qquad (2)$$

Od příkladu prvého odchýlíme se nyní v tom směru, že Δx nepokládáme za číslo nutně kladné, nýbrž kladné nebo záporné. Je pak jasno, že, je-li Δx, t. j. přírůstek ku x, kladný, roste x, je-li tento přírůstek záporný, znamená to, že x neroste, nýbrž klesá.

2. Abychom rozhodli o znaménku Δy, volíme Δx tak, aby v závorce rozhodovalo znaménko výrazu $\frac{3}{5}x^2 + x - 3$; jestliže pak Δx zvolíme kladné, *bude Δy míti znaménko souhlasné s tímto výrazem nejen pro Δx tak zvolené, nýbrž i pro Δx menší, ať jakkoliv malé*; čili *když x počne růsti, je Δy kladné nebo záporné dle toho, zda*

$$\frac{3}{5}x^2 + x - 3 > 0 \quad \text{nebo} < 0. \tag{3}$$

Že je možné vždy voliti Δx tak, aby v závorce rozhodoval výraz, jenž Δx neobsahuje, ukáže jednoduchý příklad. Budiž na př.

$$x = 1{\cdot}5;$$

pak

$$\frac{3}{5}x^2 + x - 3 = -0{\cdot}15.$$

Ačkoliv tento výraz je velmi malý, je snadné zvoliti Δx tak, aby výraz

$$\Delta x\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right)$$

byl číselně ještě menší. Učiňme na př. $\Delta x = 0{\cdot}01$; pak je poslední výraz roven $0{\cdot}01402$ a tedy skutečně menší než výraz prvý.

Nabýváme tedy výsledku, že

y stoupá pro ty hodnoty x, pro něž $\frac{3}{5}x^2 + x - 3 > 0$,

y klesá „ „ „ x, „ „ $\frac{3}{5}x^2 + x - 3 < 0$.

Jestliže však x je tak voleno, že

$$\frac{3}{5}x^2 + x - 3 = 0 \tag{4}$$

pak rovnice (2) se změní ve tvar:

$$\Delta y = (\Delta x)^2\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right),$$

kde x je nyní jeden kořen rovnice (4). Δx zvolme opět tak malé, aby v závorce rozhodoval výraz $\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}\right)$. Dejme tomu, že tento výraz je kladný; pak Δy je kladné a sice, ať $\Delta x > 0$ nebo < 0, ježto $(\Delta x)^2$ jakožto čtverec je číslo vždy kladné. To znamená: i když x od této určité hodnoty, totiž hodnoty kořene rovnice (4), stoupá, i když klesá, Δy je vždy kladné, t. j. y vždy stoupá. Příslušná hodnota y má tedy tu vlastnost, že je menší než hodnota, odpovídající x o něco většímu i ta, jež odpovídá x o něco menšímu, čili jak se stručně vyjadřujeme: *hodnota y odpovídající kořenu rovnice (4) je menší nežli její hodnoty sousední.* Takovou hodnotu funkce, jež je menší než její hodnoty sousední, nazýváme *minimální. K této hodnotě y klesá a od ní opět stoupá.* Kdyby výraz $\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}\right)$, kde za x si myslíme položený kořen rovnice (4), byl záporný, shledali bychom podobně, že $\Delta y < 0$, ať $\Delta x > 0$ nebo $\Delta x < 0$, t. j. ať x stoupá nebo klesá, y vždy klesá a je tedy příslušná *hodnota y větší než její hodnoty sousední, čili maximální.*

3. Proveďme to, co bylo nyní obecně naznačeno, počtem. Rovnice (4) má kořeny dva:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{205}}{6}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{205}}{6}.$$

Přibližně je

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -3\frac{1}{5}.$$

Je známo, že, jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

lze trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložiti na tvar

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Je tedy podobné

$$\frac{3}{5}x^2 + x - 3 = \frac{3}{5}\left(x - \frac{\sqrt{205} - 5}{6}\right)\left(x + \frac{5 + \sqrt{205}}{6}\right).$$

Označíme tento výraz, o kterém zde stále jednáme, stručně y'; je tedy

$$y' = \frac{3}{5}\left(x - \frac{\sqrt{205} - 5}{6}\right)\left(x + \frac{5 + \sqrt{205}}{6}\right). \tag{5}$$

Uvažme, že $\frac{5+\sqrt{205}}{6} > \frac{\sqrt{205}-5}{6}$; uvažme dále: pokud $x > \frac{\sqrt{205}-5}{6}$, jsou oba činitelé na pravé straně rovnice (5) kladní a $y' > 0$.

Je-li však

$$x < \frac{\sqrt{205}-5}{6},$$

ale současně

$$x > -\frac{\sqrt{205}+5}{6}$$

je prvý činitel záporný, druhý kladný a $y' < 0$.

Je-li konečně $x < -\frac{\sqrt{205}+5}{6}$, jsou opět oba činitelé záporní a $y' > 0$.

Tedy celkem:

roste-li x od $-\infty$ do $-\frac{\sqrt{205}+5}{6}$, je $y' > 0$, t. j. y stoupá,

roste-li x od $-\frac{\sqrt{205}+5}{6}$ do $\frac{\sqrt{205}-5}{6}$, je $y' < 0$, t. j. y klesá,

roste-li x od $\frac{\sqrt{205}+5}{6}$ do $+\infty$, je $y' > 0$, t. j. y stoupá.

Když je $x = -\frac{\sqrt{205}+5}{6}$, je $y' = 0$, y přestalo stoupati a počíná klesati; y je *maximální.* Když $x = \frac{\sqrt{205}-5}{6}$, je $y' = 0$, y přestalo klesati a počíná stoupati; y je *minimální.*

Dosadíme do výrazu $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$ kořeny rovnice (4).

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{205}-5}{10} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{205}}{10} > 0;$$

v souhlase s tím, že y je minimální, jak bylo nahoře vyloženo.

$$\frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{205}-5}{10} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{205}}{10} < 0,$$

v souhlase s tím, že y je maximální.

Vypočítejme obě tyto hodnoty y z rovnice (1); pišme ji však takto

$$y = \frac{x}{3}\left(\frac{3}{5}x^2 + x - 3\right) + \frac{x^2}{6} - 2x + \frac{9}{2}.$$

Když za x dosadíme x_1, je výraz v závorce obsažený roven 0, dle rovnice (4), a

$$y_{min} = \frac{x_1^2}{6} - 2x_1 + \frac{9}{2} = \frac{781 - 41\sqrt{205}}{108},$$

což je přibližně rovno $1\frac{8}{9}$.

Podobně, když za x dosadíme x_2, je

$$y_{max} = \frac{x_2^2}{6} - 2x_2 + \frac{9}{2} = \frac{781 + 41\sqrt{205}}{108},$$

což je přibližně rovno $12\frac{2}{3}$.

4. Průběh funkce y, jak byl nalezen, přehlédneme nejlépe v *grafickém znázornění*; sestrojíme body, odpovídající dvojicím hodnot sestavených v tabulce a také body, odpovídající dvojicím x_1, y_{min}, x_2, y_{max}. Tyto body spojíme křivkou, která nejprve stoupá až k y_{max}, pak klesá k y_{min}, načež opět stoupá (obr. 2.).

Konečně *zodpovězme úlohu*: odpověď zde není tak jednoduchá, jako v úloze prvé. Vidíme, že y absolutně nejmenší je rovno $-\infty$ (pro $x = -\infty$), y absolutně největší je rovno $+\infty$ (pro $x = +\infty$); ale vedle toho funkce y nabývá dvou hodnot zvláště význačných: jedné, jež je větší než hodnoty sousední, y_{max}, druhé, jež je menší než hodnoty sousední, y_{min}. Pozorujeme, že y_{max} není tedy hodnota ze všech možných hodnot y největší, ani y_{min} hodnota ze všech možných nejmenší; mají tyto hodnoty jen tu vlastnost, že v nich přestává funkce stoupati a počíná klesati nebo naopak.

5. Je ihned patrno, že způsobu, jehož jsme užili v obou případech, lze užíti pro každou funkci. Na doklad toho zodpovězme ještě otázku, kdy výraz

$$y = 3 \sin x + 2 \cos x$$

nabývá hodnoty maximální nebo minimální (pokud x nepřekročí úhel 360^0). Položíme opět

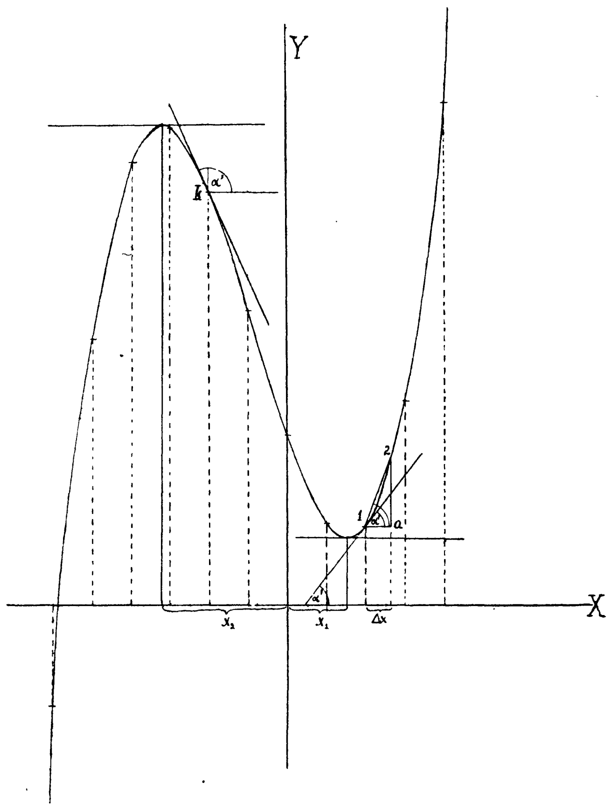
$$y + \Delta y = 3 \sin (x + \Delta x) + 2 \cos (x + \Delta x),$$

a tedy

$$\Delta y = 3 \sin (x + \Delta x) + 2 \cos (x + \Delta x) - y$$

čili

$$\Delta y = 3 [\sin (x + \Delta x) - \sin x] + 2 [\cos (x + \Delta x) - \cos x]$$



Obr. 2.

Avšak

$$\sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

$$\cos (x + \Delta x) - \cos x = - 2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin \frac{\Delta x}{2},$$

$$\Delta y = 6 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2} - 4 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\Delta y = 2 \sin\frac{\Delta x}{2}\left[3 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - 2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right],$$

$$\Delta y = 2 \sin\frac{\Delta x}{2}\left[3 \cos x \cos\frac{\Delta x}{2} - 3 \sin x \sin\frac{\Delta x}{2}\right.$$

$$\left. - 2 \sin x \cos\frac{\Delta x}{2} - 2 \cos x \sin\frac{\Delta x}{2}\right].$$

Zvolíme-li však Δx dostatečně malé, lze, jak známo, položiti $\cos\frac{\Delta x}{2} = 1$ a $\sin\frac{\Delta x}{2} = arc\,\frac{\Delta x}{2}$ a obdržíme

$$\Delta y = arc\,\Delta x\left[3 \cos x - 3 \sin x \,.\, arc\,\frac{\Delta x}{2} - 2 \sin x\right.$$

$$\left. - 2 \cos x \,.\, arc\,\frac{\Delta x}{2}\right].$$

Avšak je-li Δx úhel velmi malý, je *arc* Δx veličina také velmi malá, kterou označme $\Delta_1 x$; i lze psáti konečně

$$\Delta y = \Delta_1 x\left[3 \cos x - 2 \sin x - \frac{\Delta x_1}{2} (3 \sin x + 2 \cos x)\right].$$

Je nyní zase patrno: když x roste, t. j.

$\Delta_1 x > 0$, pak y roste, t. j. $\Delta y > 0$ pro $3 \cos x - 2 \sin x > 0$

a y klesá, „ $\Delta y < 0$ „ $3 \cos x - 2 \sin x < 0$.

Pro $3 \cos x - 2 \sin x = 0$ přechází stoupání v klesání nebo naopak. Rovnici

$$3 \cos x - 2 \sin x = 0$$

rozřešíme:

$$3 = 2\, tg\, x,$$
$$tg\, x = \tfrac{3}{2}.$$

Pro x takové, že $tg\, x = \frac{3}{2}$, přechází y ze stoupání v klesání nebo naopak.

Z $tg\, x = \frac{3}{2}$ plyne $\sin x = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$

tak že skutečně $3 \cos x - 2 \sin x = \frac{6}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0.$

Je pak

$$y = \frac{9}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}.$$

Je to hodnota maximální nebo minimální?

Pro $tg\,x = \frac{3}{2}$ platí $\Delta y = -\frac{1}{2}(\Delta_1 x)^2 \sqrt{13}$. Ať $\Delta_1 x > 0$ nebo < 0, vždy je $\Delta y < 0$, t. j. y klesá i když x roste i když klesá od hodnoty, pro niž $tg\,x = \frac{3}{2}$ — je tedy y hodnota maximální. To jsme mohli také z toho vyvoditi, že na př.

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y = 2 < \sqrt{13}; \text{ nebo}$$
$$\text{„ } x = 90 \text{ „ } y = 3 < \sqrt{13}.$$

6. Shrneme-li své dosavadní zkušenosti o funkcích stručně, můžeme říci: *Když nezávisle proměnná roste* (na př. od $-\infty$ do $+\infty$), *funkce její y buď roste nebo klesá; a sice lze najíti jistý výraz y', jenž je rovněž funkcí x, té vlastnosti: pro ty hodnoty x, pro něž $y' > 0$, roste y, pro ty hodnoty x, pro něž $y' < 0$, klesá y; jestliže pak x je tak voleno, že $y' = 0$, přechází klesání ve stoupání nebo naopak a y nabývá hodnoty minimální nebo maximální.*

III. Poměr differenciálný.

1. Bude nyní naším dalším úkolem, vystihnouti význam výrazu y' a odvoditi jednodušší pravidla pro jeho nalezení.

Změníme-li hodnotu nezávisle proměnné o Δx, změní se hodnota funkce o Δy. Δy je tedy změna funkce y odpovídající změně Δx nezávisle proměnné x; a podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

udává *poměrnou změnu funkce*. Poměrnou proto, že nám udává tento výraz, *kolikráte větší nebo menší je změna y než jí odpovídající změna x.*

Objasněme si to na příkladu druhém:

Dle rovnice (2) bylo

$$\Delta y = \Delta x\left[\tfrac{3}{5}x^2 + x - 3 + \Delta x\left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\Delta x\right)\right].$$

a) Budiž $x = -5$, $\Delta x = 0{\cdot}1$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6{\cdot}752;$$

to znamená, že vzrůst y, odpovídající vzrůstu x o $0{\cdot}1$, je 6·752-kráte větší.

b) $x = -3$, $\Delta x = 0{\cdot}1$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0{\cdot}538.$$

Zde naopak vzrůst Δy je menší, než příslušný vzrůst x; znaménko — nám pak ukazuje, že, když Δx je kladné, je Δy záporné, t. j. když x roste, y klesá.

Setrvejme při hodnotě $x = -5$ a pozorujme, jak se mění $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, když Δx stále zmenšujeme. Rovnici hořejší pišme ve tvaru

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}x^2 + x - 3 + \Delta x\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right) \qquad (1)$$

a dosadíme za x hodnotu -5; obdržíme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7 + \Delta x\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right). \qquad (2)$$

Kladme za Δx čísla postupně menší a stanovme vždy příslušnou hodnotu Δy a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\Delta x = 0{\cdot}1$ $\quad \Delta y = 0{\cdot}6752$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6{\cdot}752$

$\Delta x = 0{\cdot}01$ $\quad \Delta y = 0{\cdot}0697502$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6{\cdot}97502$

$\Delta x = 0{\cdot}001$ $\quad \Delta y = 0{\cdot}0069975002$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6\,9975002$

$\Delta x = 0{\cdot}001$ $\quad \Delta y = 0{\cdot}0006999750002$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6{\cdot}999750002$

atd.

Pozorujeme: když Δx se zmenšuje, zmenšuje se také Δy ale poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se znenáhla zvětšuje a blíží se stále více sedmi.

Rovnice (2) pak nám ukazuje, že této hodnotě se $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tím více přibliží, čím menší Δx zvolíme. Nechme tedy Δx stále klesati, až se stane rovným nulle, na pravé straně rovnice (2) pak zbude 7. Uvažujme bedlivě, co se stane na straně levé. Z rovnice (2) kap. II. je patrno, že pro $\Delta x = 0$ je také $\Delta y = 0$; levá strana tedy nabude tvaru neurčitého $\frac{0}{0}$. Ale ježto rovnice (2) zůstává v platnosti, ať Δx zvolíme jakkoliv malé, zůstane v platnosti i pro $\Delta x = 0$, t. j. neurčité číslo $\frac{0}{0}$ má hodnotu 7. Abychom naznačili, že jsme ve výrazu pro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ veličinu Δx stále zmenšovali až na nullu, při čemž tento výraz přešel v 7, píšeme

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

a čteme: limes [4]) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pro $\Delta x = 0$ je 7.

2. Význam výrazu $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ je velmi jednoduchý: chceme-li sledovati, jak se mění y pro dané x, znamená to, že chceme poznati změnu y, která nastane, když x počne růsti a změní se o veličinu Δx co možná malou. Poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pak udává poměrnou změnu y, pokud Δx je sice malé, ale stále různé od nully; stává-li se Δx stále menším, děje se totéž s Δx a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se blíží jisté hodnotě mezné, které dosáhne, když $\Delta x = 0$. Můžeme také říci: změní-li se x o Δx dostatečně malé, změní se y o Δy také malé, ale asi 7-kráte větší než Δx; když Δx stále klesá, Δy také klesá, ale je stále asi 7-kráte větší než Δx, a čím více Δx klesá, tím spíše Δy se rovná sedminásobné hodnotě Δx. I můžeme říci: *pro* $x = -5$ *mění se* y *sedmkráte rychleji než* x; *i udává* $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *rychlost, se kterou se mění funkce, když se mění nezávisle proměnná.*

[4]) limes = mez, hodnota mezná.

K vůli stručnosti píše se

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}\ [5])$$

a čte se: *dy* lomeno *dx*. Výraz tento nazýváme *differenciálným poměrem* (nebo *kvocientem*) funkce y dle proměnné x, nebo stručněji *derivací* (čili funkcí odvozenou) funkce y dle x.

Definice poměru differenciálného je tedy: *Differenciálný poměr je mezná hodnota, které se blíží poměr přírůstků* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *když* Δx *klesá na nullu.*

3. Opakujme nyní zcela stručně úvahu právě provedenou pro libovolné x.

Máme dle rovnice (1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}x^2 + x - 3 + \Delta x\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta x\right).$$

Stává-li se Δx stále menším, blíží se $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ stále více výrazu

$$\frac{3}{5}x^2 + x - 3,$$

který jsme nazvali nahoře y'; pro $\Delta x = 0$ je pak

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}x^2 + x - 3 = \frac{dy}{dx},$$

t. j. *výraz* y', *který hrál tak důležitou roli v otázce o změně funkce a o existenci maxima a minima, není nic jiného než differenciálný kvocient naší funkce* y. [6])

I můžeme výsledky, k nimž jsme došli v uvedeném příkladu, shrnouti nyní stručně takto:

---

[5]) Zde budiž důrazně upozorněno, že $\frac{dy}{dx}$ není zlomek, jehož čitatel je dy a jmenovatel dx, jako tomu bylo při $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; tvar zlomkový má právě jen připomenouti, že tento výraz vznikl ze skutečného zlomku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

[6]) Tím se stává patrno, že k zavedení diff. poměru jsme vedeni studiem změny funkce. Můžeme říci, že diff. poměr *charakterisuje změnu funkce* pro každou hodnotu x.

Funkce

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}$$

roste pro ty hodnoty x, pro něž differenciálný kvocient > 0; *klesá pro ty hodnoty x, pro něž differenciálný kvocient* < 0; *nabývá hodnoty maximální nebo minimální pro ty hodnoty x, pro něž differenciálný kvocient je roven* 0.

4. Věta právě vyslovená nabude zvláště značné názornosti a zároveň se nám objasní s jiné stránky význam differenciálného kvocientu, vrátíme-li se k obr. 2. Vytkněme na čáře, jež nám znázorňuje funkci y, libovolný bod *1*; jeho úsečka je obecně x, pořadnice y. Zvětšíme-li x o Δx, ocitneme se v bodě jiném *2*, jehož pořadnice je $y + \Delta y$. Vedeme-li bodem *1* rovnoběžku s osou úseček, vznikne pravoúhlý trojúhelník *1 a 2*, jehož odvěsny jsou Δx, Δy; je pak z obrazce patrno, že spojnice $\overline{12}$ svírá s paprskem $\overline{1a}$ a tedy také s osou x-ovou úhel α, pro který platí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\, \alpha.$$

Takový je tedy geometrický význam poměru obou přírůstků. Když Δx se umenšuje, bod *2* se stále blíží bodu *1*, spojnice $\overline{12}$ se otáčí kol bodu *1*; a když $\Delta x = 0$, t. j. bod *2* splyne s bodem *1*, *stane se tětiva* $\overline{12}$ *tečnou křivky v bodě 1.* Úhel α tětivy přejde pak v úhel α', který svírá tečna s kladným směrem osy x-ové, a jest

$$tg\, \alpha' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

To znamená: *derivace funkce y pro hodnotu x je totožna s tangentou úhlu, který svírá tečna, vedená v příslušném bodu ku čáře funkci znázorňující, s kladným směrem osy* x-ové.

Je patrno z obrazce, že úhel tečny, *pokud čára stoupá*, je ostrý, tedy jeho tangenta kladná, t. j. $\frac{dy}{dx} > 0$; *když čára klesá* (na př. v bodě *k*), úhel tečny je tupý, jeho tangenta záporná, t. j. $\frac{dy}{dx} < 0$. V bodě konečně, v němž stoupání přechází v klesání nebo klesání v stoupání, je tečna rovnoběžna s osou úseček, tedy její úhel roven nulle a tangenta rovněž; i je

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Tuto úvahu můžeme pokládati za nový důkaz, a sice geometrický, věty nahoře vyslovené.

Místo $\frac{dy}{dx}$ píše se často stručněji y', jak jsme to již dříve činili, tak že je konečně

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

5. Je nyní ihned patrno, že úvahu, kterou jsme provedli pro případ zcela speciální funkce y třetího stupně, bychom mohli provésti pro každou jinou funkci nám známou. Budiž tedy y některá taková funkce x, což značíme

$$y = f(x).$$

Nechme x vzrůsti o Δx a nazveme Δy příslušnou změnu funkce y; pak platí

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y,$$

ale

$$y = f(x),$$

tedy

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Abychom pak poznali *poměrnou změnu* funkce y, vypočítáme poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jenž je roven

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Necháme-li Δx stále klesati, až se stane rovným nulle, obdržíme příslušný *differenciální kvocient*, t. j.

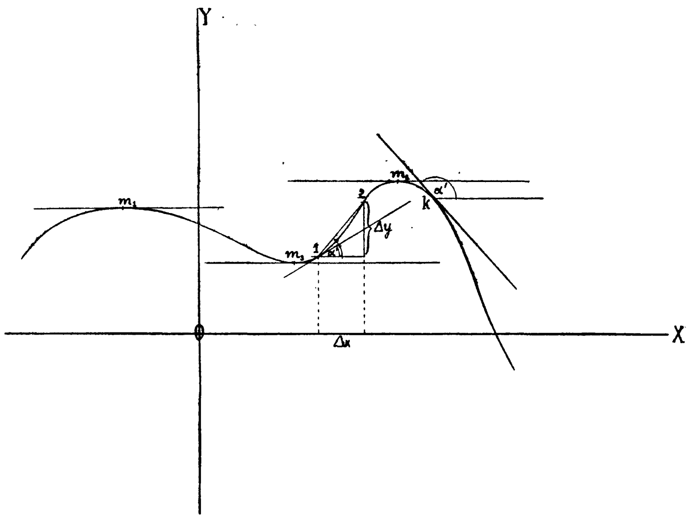
$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

který se značí také $f'(x)$ a *udává rychlost, s jakou se mění funkce pro určitou hodnotu nezávisle proměnné.*

6. Jako jsme znázornili graficky funkci stupně třetího, tak bychom znázornili graficky i každou jinou funkci nám známou. Křivka na obrazci 3. nakreslená budiž *grafickým znázorněním* funkce

$$y = f(x). \tag{3}$$

Zjednáme si ji tak, že ke každému x nalezneme z rovnice (3) y a sestrojíme bod, jehož souřadnice jsou x, y.



Obr. 3.

Vytkněme na křivce bod *1* o souřadnicích x, y a bod *2* o souřadnicích $x + \Delta x$, $y + \Delta y$; je zase

$$tg\, \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Když Δx se umenšuje, blíží se bod *2* bodu *1* a spojnice $\overline{12}$ tečné v bodě *1*; konečně pro $\Delta x = 0$ bod *2* splyne s bodem *1*, tětiva $\overline{12}$ přejde ve zmíněnou tečnu, úhel α přejde v α', jejž svírá tečna s kladným směrem osy X; i je

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = tg\, \alpha'$$

čili dle jiného označení

$$y' = f'(x) = tg\, \alpha'.$$

Jediný pohled na křivku pak ihned potvrzuje správnost věty:

Když $\frac{dy}{dx} > 0$, *t. j.* α' *úhel ostrý, stoupá funkce při stoupajícím* x (na př. v bodě 1); *když* $\frac{dy}{dx} < 0$, *t. j.* α' *úhel tupý, klesá funkce při stoupajícím* x (na př. v bodě k); *když* $\frac{dy}{dx} = 0$, *t. j.* $\alpha' = 0$, *funkce nabývá hodnoty maximální nebo minimální* (v bodech m_1, m_2 maximum, v bodu m_3 minimum).

IV. Příklady differenciálných poměrů.

Je důležito pro toho, kdo chce užívati počtu differenciálného, *aby znal derivace nejjednodušších funkcí*, které si tedy odvodíme.

1. Je-li

$$f(x) = a,$$

kde a značí konstantu, je

$$f(x + \Delta x) = a,$$

ježto a se vůbec nemění; i je

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0$$

pro každé Δx a $\frac{da}{dx} = 0$, t. j. diff. kvoc. každé konstanty je roven nulle, což je ostatně samozřejmé.

2.

$$y = x$$

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

pro každé Δx, tedy $\frac{dy}{dx} = 1$.

To zase vyjadřuje samozřejmé faktum, že y se mění stejně rychle jako x, když $y = x$.

3.
$$y = x^2$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

4.
$$y = x^n,$$
kde n je číslo celé kladné:
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Avšak rozdíl n-tých mocnin je vždy dělitelný rozdílem mocnin prvých; i je, položíme-li na okamžik $x + \Delta x = z$
$$(z^n - x^n) : (z - x) = z^{n-1} + xz^{n-2} + x^2 z^{n-3} + x^3 z^{n-4}$$
$$+ \ldots + x^{n-3} z^2 + x^{n-2} z + x^{n-1}$$
a tedy
$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + xz^{n-2} + x^2 z^{n-3} + x^3 z^{n-4} + \ldots + x^{n-1})$$
$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + x(x + \Delta x)^{n-2} + x^2(x + \Delta x)^{n-3}$$
$$+ \ldots + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1}]$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x + \Delta x)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}.$$

Položíme-li v pravo $\Delta x = 0$, přejde každý jednotlivý člen v x^{n-1}; těchto členů je n, i máme
$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Obdržíme tedy derivaci, *snížíme-li exponent o 1 a násobíme číslo tak vzniklé původním exponentem.*

5.
$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$
$$\sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Jestliže Δx je velmi malé, lze, jak známo, položiti

$$\sin\frac{\Delta x}{2} = arc\,\frac{\Delta x}{2};$$

avšak

$$arc\,\alpha = \frac{\pi\,\alpha}{180} \qquad arc\,\Delta x = \frac{\pi\,\Delta x}{180}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \,arc\,\Delta x}{\Delta x} = \frac{\pi}{180} . \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{180} \cos x.$$

Výsledek tento velmi zjednodušíme, učiníme-li toto ustanovení, jehož se budeme stále držeti: v goniometrických funkcích proměnná x **nechť značí úhel vyjádřený v míře obloukové, ne úhlové,** tedy *arcus úhlu.* I je dle toho na př. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pak v hořejší rovnici

$$\sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2}$$

a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

6.

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\frac{2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

7.
$$y = \sqrt{x}$$
$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$
$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Proveďme odmocninu:

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} - \frac{(\Delta x)^2}{8x\sqrt{x}} + \dots$$
$$-x$$
$$\Delta x : 2\sqrt{x}$$
$$-\Delta x \pm \frac{(\Delta x)^2}{4x}$$
$$-\frac{(\Delta x)^2}{4x} : \left(2\sqrt{x} + \frac{\Delta x}{\sqrt{x}}\right)$$

Pozorujeme ihned, že v odmocnině by se Δx vyskytovalo v mocninách postupně vyšších.

I lze psáti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} - \frac{(\Delta x)^2}{8x\sqrt{x}} + - \dots}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\Delta x}{8x\sqrt{x}} + - \dots$$

Uvažme, že na pravé straně všechny členy od druhého počínajíc obsahují Δx; i píšeme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \Delta x\left(\frac{1}{8x\sqrt{x}} - \dots\right).$$

I je pak

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

čili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

8. Zcela stejně provedeme příklad

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Nalezneme — což ponechávám čtenáři dokázati —

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

9. Jest nalézti differenciálný kvocient výrazu

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Počítáme:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) + \ldots + f_n(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{- [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]}{\Delta x},$$

t. j.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \ldots$$

čili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} + \ldots + \frac{df_n(x)}{dx},$$

t. j.: differenciálný kvocient součtu funkcí je roven součtu differenciálných kvocientů jednotlivých funkcí. (Dokončení.)

O součtu čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů daného mnohoúhelníka.

Píše ing. Jos. Langr.

(Dokončení.)

III.

Volme nyní zvláštní případ obou mnohoúhelníků. Prvý z nich budiž dán a druhý odvoďme následujícím způsobem. Strany daného mnohoúhelníka rozdělme pořadem v poměru λ (smysl rotace zachován), a v dělících bodech vztyčme kolmice ke stranám a nanesme na ně úsečky jsoucí s příslušnými stranami v poměru x. Tímto způsobem obdržíme nové vrcholy, jež *určují mnohoúhelník, mající s původním arithmetický střed společný.*

Důkaz této věty byl podán v našem článku „Příspěvek k mnohoúhelníkům“ v XXVII. roč. tohoto časopisu.

Součet čtverečných vzdáleností libovolného bodu od vrcholů prvého mnohoúhelníka jest

$$V = \frac{K}{n} + nr^2$$