Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických.

(Podává prof. dr. *Emil Weyr.*)

1. Souřadnice Hesse-ovy.

Nejjednodušší spůsob, kterým lze učiniti rovnici libovolné křivky neb plochy *stejnoměrnou* (homogen), záleží v tom, že do ní zavedeme za obyčejné souřadnice rovnoběžné x, y, z podíly $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$, považujíce pak bezejmenné veličiny x, y, z, v za stejnoměrné souřadnice bodu, jehož souřadnice rovnoběžné jsou poměry $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$. Spůsob tento zavedl *O. Hesse* do analytické geometrie, pročež se nazývají stejnoměrné souřadnice x, y, z, v mnohdy i *souřadnice Hesse-ovy.*

Chceme-li tedy naopak rovnici stejnoměrnou vyjádřiti souřadnicemi rovnoběžnými, třeba jen v ní položiti

$$v = 1.$$

Rovnice roviny pro souřadnice rovnoběžné

$$ax + by + cz + d = 0$$

stane se na př. stejnoměrnou, zavedeme-li do ní za x, y, z podíly $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$, načež obdržíme

$$ax + by + cz + dv = 0;$$

a naopak plyne z této stejnoměrné rovnice pro $v = 1$ bezprostředně opět

$$ax + by + cz + d = 0$$

co rovnice též roviny pro souřadnice rovnoběžné.

2. Určování bodů.

Máme-li na zřeteli pevnou soustavu souřadnic rovnoběžných, přísluší každému bodu v prostoru tři úplně určité hodnoty x, y, z a naopak tři takovéto hodnoty určují úplně bod v prostoru.

Jsou-li však x, y, z, v souřadnice Hesse-ovy jistého bodu M, jehožto rovnoběžné souřadnice pak budou $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$, tuť patrno, že i souřadnice ϱx, ϱy, ϱz, ϱv určují tentýž bod, poněvadž pro libovolné ϱ platí

$$\frac{\varrho x}{\varrho v} = \frac{x}{v}, \frac{\varrho y}{\varrho v} = \frac{y}{v}, \frac{\varrho z}{\varrho v} = \frac{z}{v}.$$

Z čehož patrno, že každý bod v prostoru má nekonečné množství souřadnic Hesseových, a že dvěma soustavami

$$x, y, z, v \text{ a } x', y', z', v'$$

jest určen tentýž bod, je-li

$$x : y : z : v = x' : y' : z' : v',$$

t. j. je-li jedna soustava multiplum druhé.

Bod na př., jehož souřadnice jsou

$$2, -3, 5, 7,$$

jest totožný s bodem, jehož souřadnice jsou

$$4, -6, 10, 14$$

$$\text{neb } 1, -{}^3/_2, {}^5/_2, {}^7/_2 \text{ atd.};$$

rovnoběžné souřadnice tohoto bodu mají pak hodnoty

$$^2/_7, -{}^3/_7, {}^5/_7.$$

Poněvadž $\frac{x}{v} : \frac{y}{v} = \frac{x}{y}$ a $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}$ jsou rovnoběžné souřadnice bodu, jehož stejnoměrné jsou x; y, v, patrno, že poměr dvou rovnoběžných souřadnic x, y jest týž jako poměr souřadnic stejnoměrných $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}$.

3. Nekonečně vzdálená přímka roviny.

Co jsme pravili o Hesse-ových souřadnicích v prostoru, platí, jak snadno lze nahlédnouti, touže měrou i pro rovinu: jediná změna záleží jen v tom, že se neobjevuje souřadnice z, takže, jsou-li Hesseovy souřadnice nějakého bodu x, y, v, budou souřadnice rovnoběžné téhož bodu $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}$.

Rovnice libovolné křivky pro souřadnice rovnoběžné

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

stane se stejnoměrnou, zavedeme-li do ní stejnoměrné souřadnice, čímž obdržíme

$$f\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) = 0 \text{ neb } \varphi(x, y, v) = 0. \tag{2}$$

Je-li křivka (1) přímkou, jest

$$f(x, y) \equiv ax + by + c = 0$$

a tudíž stejnoměrná rovnice její

$$\varphi(x, y, v) \equiv ax + by + cv = 0. \tag{3}$$

Rovnice tato přísluší co rovnice stejnoměrná zcela všeobecné přímce.

Co zvláštní případy, které zahrnuty jsou ve všeobecném vzorci (3), buďtež uvedeny tyto:

a) $x = 0.$

Veškeré body, které vyhovují této rovnici, mají za souřadnice rovnoběžné hodnoty $\frac{0}{v}, \frac{y}{v}$, t. j. za úsečku mají vesměs hodnotu 0, z čehož soudíme, že jsou body osy Y, z čehož jde, že i zde jest $x = 0$ rovnicí této osy.

b) $y = 0.$

Této přímce přináležejí body, jichž souřadnice rovnoběžné jsou $\frac{x}{v}, \frac{0}{v}$, z čehož vysvitá, že pro všecky body této přímky se pořadnice rovná 0, a tudíž přímka $y = 0$ jest osa X.

c) $v = 0.$

Této přímce přísluší body, jejíž rovnoběžné souřadnice mají hodnoty $\frac{x}{0}, \frac{y}{0}$ t. j. ∞, ∞. Veškeré body její nalézají se tudíž v nekonečné vzdálenosti a naopak, každý nekonečně vzdálený bod v úvahu vzaté roviny má hodnoty ∞, ∞ za souřadnice rovnoběžné a vyhovuje tudíž rovnici přímky $v = 0$, které přináleží a která tudíž v celé své rozsáhlosti jest nekonečně daleká — nalezá se v nekonečnu.

Těmito úvahami přicházíme k následujícímu pojmu o souhrnu nekonečně vzdálených bodů libovolné roviny:

Veškeré nekonečně vzdálené body libovolné roviny vyplňují nekonečně vzdálenou přímku, jejíž rovnice jest $v = 0$.*)

Přímku tu nazýváme krátce „*nekonečně vzdálenou přímku*" příslušné roviny.

Vyskytne-li se pro souřadnice rovnoběžné co rovnice přímky

$$c = 0,$$

kde c jest hodnota stálá, dlužno tuto rovnici též považovati za rovnici nekonečně vzdálené přímky.

Jak známo, utíná přímka

$$ax + by + c = 0$$

na osách části, jichž délka jest

$$-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b},$$

kteréžto úseky stanou se nekonečnými, je-li $a = 0$, $b = 0$; pro tento případ jest celá přímka v nekonečnu a rovnice její jest

$$c = 0.$$

Stálá c může též býti 0.

4. Přímky rovnoběžné.

Libovolná přímka

$$ax + by + cv = 0$$

protíná nekonečně vzdálenou přímku v bodě, jehož souřadnice vyhovují současně podmínkám

$$ax + by + cv = 0,$$
$$v = 0,$$

aneb tedy:

$$ax + by = 0, \quad v = 0.$$

Bod ten nazýváme *nekonečně vzdálený bod* přímky v úvahu vzaté. S přímkou

$$ax + by + cv = 0$$

bude míti pospolný bod nekonečně vzdálený každá přímka, jejíž rovnice jest

$$kax + kby + c'v = 0.$$

poněvadž pro $v = 0$ obdržíme

$$kax + kby = 0$$

*) Porovnej „Třetí zpráva jednoty českých mathematiků" pag. 12.

aneb $$ax + by = 0$$
jako dříve. Rovnice takovýchto přímek se společným bodem nekonečně vzdáleným znějí pro souřadnice rovnoběžné:
$$ax + by + c = 0,$$
$$kax + kby + c' = 0,$$
kteréžto rovnice, jak známo, přísluší dvěma *přímkám* rovnoběžným, poněvadž tu platí
$$a : b = ka : kb.$$

Vidíme tudíž, že přímky rovnoběžné považovati musíme za přímky, které protínají nekonečně vzdálenou přímku v témže bodě.

Přímky rovnoběžné mají tudíž společný nekonečně vzdálený bod, v němž se vzájemně protínají. Jelikož o rovnoběžných přímkách pravíme, že mají týž *směr*, můžeme, poznavše, že mají týž společný bod v nekonečnu, bod tento nazvati *směrem rovnoběžných přímek.*

Každý bod nekonečně vzdálené přímky určuje nekonečné množství jím procházejících přímek téhož směru. Takovéto rovnoběžné přímky tvoří to, co nazýváme *osnovou* přímek.

Osnova přímek jest tedy souhrn přímek, probíhajících týmž nekonečně vzdáleným bodem. Takto se nám jeví osnova co zvláštní případ *svazku*, který jest souhrnem přímek téže roviny probíhajících týmž bodem, jenž sluje *vrcholem* svazku. Každý svazek, jehož vrchol jest bod nekonečně vzdálený, jest osnovou přímek

Položíme-li do rovnice
$$kax + kby + c'v = 0$$
aneb do rovnice
$$ax + by + \frac{c'}{k} v = 0$$
za k a c' zcela libovolné hodnoty, obdržíme přímky téhož směru, přímky příslušné jisté osnově. Píšeme-li k' za $\frac{c'}{k}$, může i k' obdržeti veškeré možné hodnoty a rovnice libovolné přímky osnovy zní pak
$$ax + by + k'v = 0,$$
při čemž k' jest proměnlivý parametr, jehož hodnota určuje vždy jednu z přímek osnovy. Pravíme tu, že rovnice tato jest *rovnicí osnovy.*

5. Nekonečně vzdálené body křivek rovinných; asymptoty.

Rovnice, obsahující rovnoběžné souřadnice x, y co proměnné, značí nám jakousi křivku, která jest *algebraickou* neb *transcendentní* dle toho, je-li rovnice algebraická neb transcendentní. Rovnice algebraická rozměru $n$tého přísluší křivce $n$tého stupně. Rovnice lineárná přísluší tudíž přímce, rovnice quadratická kuželosečce, rovnice kubická křivce stupně třetího atd.

Je-li
$$f(xy) = 0$$
rovnice algebraické křivky stupně $n$tého, pak obdržíme, jak jsme se již zmínili, rovnici stejnoměrnou, t. j. pro souřadnice *Hesse*ovy, vložíme-li do ní $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}$ za x a y, čímž přejde v rovnici
$$f\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) = 0 \text{ aneb } \varphi(x, y, v) = 0.$$

Tato rovnice, příslušná algebraické křivce stupně $n$tého, jest stejnoměrná a sice stupně neb rozměru $n$tého; funkce $\varphi(x, y, v)$ jest totiž stejnoměrnou téhož rozměru n.

S libovolnou přímkou
$$ax + by + cv = 0$$
má křivka
$$\varphi(x, y, v) = 0$$
n bodů pospolu, poněvadž tyto dvě rovnice mají n společných řešení, ana jedna z nich jest stupně prvního a druhá stupně $n$tého.

Nekonečně vzdálená přímka
$$v = 0$$
protne tudíž křivku $\varphi = 0$ též v n bodech, jejichž souřadnice plynou z rovnic $v = 0$, $\varphi = 0$ aneb tedy z rovnic
$$\varphi(x, y, 0) = 0$$
$$v = 0.$$

Vidíme tudíž, *že každá křivka n-tého stupně má n nekonečně vzdálených bodů.*

V každém z těchto n bodů můžeme si představiti sestrojenou tečnu, která se pak nazývá asymptotou, poněvadž je dle právě řečeného skutečně pomezní polohou tečny křivky $\varphi = 0$ pro případ, že bod styku se vzdaluje do nekonečna.

6. Určování asymptot.

V odstavci předešlém zahrnut jest spůsob, dle kteréhož pro libovolnou křivku $f(x, y) = 0$ lze určiti asymptoty.

Zavedeme-li $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}$, za x a y, obdržíme z rovnice $f = 0$ novou stejnorodou rovnici $\varphi(x, y, v) = 0$ a položíme-li v této $v = 0$, obdržíme

$$\varphi(x, y, 0) = 0,$$

kterážto rovnice nám určuje současně s rovnicí $v = 0$ nekonečně vzdálené body v úvahu vzaté křivky.

Z rovnice poslední plyne pro poměr $\frac{y}{x}$ jistý počet hodnot $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$, všeobecně α_i, z nichž každá přísluší jednomu nekonečně vzdálenému bodu křivky, udávajíc nám poměr nekonečně velkých rovnoběžných souřadnic tohoto bodu (viz odst. 2.).

Napíšeme-li nyní pro souřadnice rovnoběžné známou rovnici tečny, totiž:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x),$$

kdež x a y jsou rovnoběžné souřadnice bodu styku, tu obdržíme rovnici asymptoty jednoduchým vymezením poslední rovnice pro ten případ, že x a y stávají se nekonečně velkými, při čemž však poměr $\frac{y}{x}$ blíží se jedné z hodnot α, všeobecně tedy jest

$$lim \frac{y}{x} = \alpha_i.$$

7. Příklady.

Rovnice *hyperboly* zní, jak známo:

$$f(xy) \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

tak že bude

$$f\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) \equiv \frac{x^2}{a^2v^2} - \frac{y^2}{b^2v^2} - 1 = 0$$

a tudíž zároveň

$$\varphi(x,y,v) \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - v^2 = 0$$

Položíme-li $v=0$, obdržíme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

z čehož jde

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

Rovnice tečny zní jak známo

$$\frac{x\xi}{a^2}-\frac{y\eta}{b^2}-1=0,$$

aneb dělíme-li úsečkou x,

$$\frac{\xi}{a^2}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\eta}{b^2}-\frac{1}{x}=0;$$

pro nekonečně velké x a y a pro $lim\,\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}$ obdržíme rovnici tečny, jejíž bod styku jest nekonečně vzdálen, totiž

$$\frac{\xi}{a^2}-\left(\pm\frac{b}{a}\right)\frac{\eta}{b^2}-0=0$$

aneb:

$$\frac{\xi}{a}=\pm\frac{\eta}{b},$$

což se může i takto psáti:

$$\frac{\eta}{\xi}=\pm\frac{b}{a}.$$

Rovnice tato přísluší přímkám procházejícím počátkem souřadnic, které po obou stranách uzavírají s osou úseček týž úhel, jehož goniometrická tangenta má hodnotu $\frac{b}{a}$.

Tyto dvě přímky jsou asymptoty hyperboly, t. j. tečny, jejichž body styku se nalézají v nekonečnu, jsouce body průseku hyperboly a nekonečně vzdálené přímky.

Rovnice *ellipsy*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

stane se stejnoměrnou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-v^2=0,$$

z níž pro $v=0$ obdržíme:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$$

z čehož jde pak

$$\frac{y}{x}=\pm\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}}=\pm\frac{bi}{a}.$$

Vidíme tu, že ellipsa nemá *reálných* bodů v nekonečnu, nýbrž jen dva body *pomyslné, imaginárné.* Taktéž asymptoty stanou se tu pomyslnými, majíce rovnici:

$$\frac{\eta}{\xi}=\pm\frac{bi}{a}.$$

Průsek těchto pomyslných asymptot jest bod reálný, totiž střed ellipsy.

Rovnice *paraboly* zní:

$$y^2-2px=0$$

a pro souřadnice stejnoměrné

$$\frac{y^2}{v^2}-2p\frac{x}{v}=0$$

aneb

$$y^2-2pvx=0,$$

z čehož pro $v=0$ obdržíme

$$y^2=0.$$

Tato quadratická rovnice má dva stejné kořeny na důkaz, že parabola protíná nekonečně vzdálenou přímku ve dvou splývajících bodech, aneb jinými slovy, že nekonečně vzdálená přímka jest tečnou paraboly. Poněvadž z poslední rovnice i pro poměr $\frac{y}{x}$ plynou dvě stejné hodnoty, totiž $\frac{y}{x}=\pm 0$, poznáváme, že bod styku paraboly a nekonečně vzdálené přímky nalézá se na ose úseček, t. j. že bod ten jest nekonečně vzdálený bod osy paraboly.

8. Body kruhové v nekonečnu.

Rovnice kruhu pro souřadnice pravoúhlé zní:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

kdežto α, β jsou souřadnice středobodu a r jest poloměr kruhu. Učiníme-li rovnici tu stejnoměrnou, obdržíme snadně:

$$x^2+y^2-2\alpha vx-2\beta vy+(\alpha^2+\beta^2-r^2)v^2=0$$

a položíme-li $v = 0$, povstane pro souřadnice (stejnoměrné) nekonečně vzdálených bodů, rovnice

$$x^2 + y^2 = 0,$$

v kteréž nižádná z veličin α, β, r se nevyskytuje a kteráž zůstane tudíž platná pro veškeré kruhy roviny. Z výsledku toho soudíme, že *„veškeré kruhy též roviny protínají nekonečně vzdálenou přímku v týchž, (arciť pomyslných) bodech, v kterýchž se i na vzájem protínají.“*

Pro poměr nekonečně velkých revnoběžných (pravoúhlých) souřadnic těchto dvou všem kruhům společných bodů (pomyslných) obdržíme z poslední rovnice hodnoty:

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{-1} = \pm i,$$

pročež přímky procházející těmito nekonečně vzdálenými všem kruhům roviny společnými body tvoří s osou X úhel, jehož trigonometrická tangenta jest buď $+i$ aneb $-i$.

Každým bodem v rovině procházejí dvě takovéto přímky (pomyslné), které jej spojují s oněmi body v nekonečnu. Poněvadž, jak snadno lze se přesvědčiti,

$$\frac{1}{\pm i} = -(\pm i),$$

vidíme, že každá z takových oněmi body procházejících přímek má tu zvláštní vlastnost, že sama k sobě kolmo stojí a že i každé dvě takové přímky, které týmž z oněch dvou bodů procházejí (a tedy, jelikož body ty nekonečně vzdálené, k sobě rovnoběžné jsou) kolmo na sobě stojí. Jest to zvláštní případ, v kterémž (pomyslné) rovnoběžné přímky současně i kolmo k sobě stojí.

Ony důležité dva pomyslné body, v kterýchž veškeré kruhy roviny se na vzájem a současně nekonečně vzdálenou přímku protínají, nazýváme v geometrii *„nekonečně vzdálené body kruhové“* aneb zkrátka *„body kruhové“* (Die imaginären Kreispunkte, points circulaires, punti circolari all'infinito).*)

„Body kruhové“ činí zadost rovnici

$$x^2 + y^2 = 0$$

*) Porovnej „Třetí zpráva jednoty českých mathematiků“ str.: 14.

a jsou to vlastně průseky dvou touto rovnicí vyznačených pomyslných přímek s přímkou nekonečně vzdálenou.

9. Nekonečně vzdálené body a asymptoty kuželoseček.

Všeobecná rovnice kuželosečky jest

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

neb učiníme-li ji stejnoměrnou,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dvx + 2Evy + Fv^2 = 0,$$

z níž pro $v = 0$ plyne

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$

na kteréžto rovnici závisejí nekonečně vzdálené body kuželosečky v úvahu vzaté. Dělíme-li veličinou x^2, obdržíme pro poměr $\left(\frac{y}{x}\right)$ quadratickou rovnici

$$C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2B\left(\frac{y}{x}\right) + A = 0,$$

z kteréž plyne

$$\frac{y}{x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C} = \alpha$$

Obdržíme tudíž, jak jsme již a priori souditi mohli, dva nekonečně vzdálené body (jelikož kuželosečka jest křivka druhého stupně a protíná proto každou, a tedy i nekonečně vzdálenou přímku ve dvou bodech). Jsou-li body ty reálné, pomyslné neb splývají-li, přísluší předložená rovnice hyperbole, ellipse neb parabole. Tyto tři případy se vyskytnou patrně při následujících podmínkách:

1) $B^2 - AC > 0$ ..... hyperbola
2) $B^2 - AC < 0$ ..... ellipsa
3) $B^2 - AC = 0$ .... parabola.

Rovnice tečny zní:

$$Ax\xi + B(x\eta + y\xi) + Cy\eta + D(x + \xi) + E(y + \eta) + F = 0,$$

aneb, dělíme-li úsečkou x,

$$A\xi + B\left(\eta + \frac{y}{x} \cdot \xi\right) + C\frac{y}{x}\eta + D\left(1 + \frac{\xi}{x}\right) + E\left(\frac{y}{x} + \frac{\eta}{x}\right) + \frac{F}{x} = 0.$$

Učiníme-li nyní x a y nekonečně velkými a položíme-li za

$\frac{y}{x}$ hořejší hodnotu α, tu obdržíme rovnici asymptot naší kuželosečce příslušných, totiž

$$A\xi + B(\eta + \alpha\xi) + C\alpha\eta + D + E\alpha = 0,$$

aneb urovnáme-li

$$\xi(A + B\alpha) + \eta(B + C\alpha) + (D + E\alpha) = 0,$$

do kteréžto rovnice bychom za α buď hodnotu

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

aneb hodnotu

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

vložiti měli, abychom obdrželi takto rovnici buď jedné aneb druhé asymptoty.

10. Kuželosečky podobné a podobně položené.

Rovnice, která nám nekonečně vzdálené body kuželosečky

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

určovala, zněla

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$

z čehož patrno, že tato rovnice jest částí quadratickou rovnice původní.

Nekonečně vzdálené body kuželosečky závisejí tudíž pouze na této části t. j. na hodnotách součinitelů A, B, C, a můžeme tvrditi, že veškeré kuželosečky, jejichž rovnice mají společnou část quadratickou, procházejí týmiž body nekonečně vzdálenými. Jest však známo, že výhradně koefficienty A, B, C určují směr a poměr délek hlavních os kuželosečky, tak že veškeré kuželosečky, procházející týmiž nekonečně vzdálenými body, mají společné směry os a délky jejich os mají pro všechny týž poměr. O takovýchto kuželosečkách pravíme však, že jsou *„podobné a podobně položené kuželosečky“* (ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, coniques semblables et semblablement placées, coniques homothétiques). *)

*) Viz: Chasles „Traité des sections coniques“ pag. 246.

Můžeme tudíž vysloviti následující poučku:

„*Veškeré si podobné a podobně položené kuželosečky roviny jedné procházejí týmiž dvěma nekonečně vzdálenými body.*“

Kruhy roviny jsou jen zvláštním případem takovýchto podobných a podobně položených kuželoseček, pro které totiž ony dva společné nekonečně vzdálené body jsou body kruhové.

Poslední poučka dá se i obrátiti v tento smysl:

„*Kuželosečky též roviny procházející týmiž dvěma body nekonečně vzdálenými jsou si podobné a podobně položené.*“ *)

11. Rovnoběžnost a stálý poměr os.

I bezprostředně dá se odůvodniti rovnoběžnost a stálý poměr os kuželoseček procházejících týmiž nekonečně vzdálenými body.

Poněvadž asymptoty jsou tečny kuželoseček v jich nekonečně vzdálených bodech, tuť patrno, že, procházejí-li týmiž body v nekonečnu ležícími, jich asymptoty budou rovnoběžné; a jelikož osy rozpolují úhel asymptotami uzavřený, tuť dále vysvitá, že i osy kuželoseček rovnoběžné býti musí. Dále pak víme, že poměr dělek os určuje úhel sklonu asymptot s osami, který jest dle právě řečeného stálý pro veškeré kuželosečky společných bodů nekonečných, z čehož plyne, že i poměr délek os takovýchto kuželoseček bude hodnota stálá.

12. Podobné a podobně položené kuželosečky koncentrické. (Kruhy koncentrické.)

Střed kuželosečky jest průsečík asymptot. Mají-li tudíž dvě kuželosečky podobné a podobně položené společný střed, pak budou míti i společné asymptoty, poněvadž tyto jsou přímky spojující střed s nekonečně vzdálenými, oběma kuželosečkám společnými body. Mají-li však kuželosečky společnou asymptotu (které se obě v nekonečnu dotýkají), tuť patrně mají společný styk v nekonečnu. Z toho vychází následující poučka:

*) K danému rovinému útvaru obdržíme útvar podobný a podobně položený, spojíme-li veškeré body onoho útvaru s libovolně vytknutým pevným bodem roviny (střed obou útvarů) a zvětšíme-li (zmenšíme-li) veškeré takto obdržené průvodiče dle stálého poměru.

„Koncentrické podobné a podobně položené kuželosečky dotýkají se na vzájem v nekonečných jim společných bodech.“

Poněvadž koncentrické kruhy jsou též podobné a podobně položené koncentrické kuželosečky, máme poučku:

„Koncertrické kruhy dotýkají se na vzájem v bodech kruhových v nekonečnu.“ *)

13. Nekonečně vzdálené body křivek libovolného řádu.

Rovnice všeobecné křivky n-tého stupně pro souřadnice rovnoběžné zní:

$$u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

při čemž všeobecně u_k jest stejnoměrná funkce souřadnic x, y, stupně k-tého. Jest tudíž

$$u_0 = a_0$$
$$u_1 = a_1 x + a_2 y$$
$$u_2 = a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2$$
$$u_3 = a_{111} x^3 + a_{112} x^2 y + a_{122} xy^2 + a_{222} y^3 \text{ atd. atd.}$$

Vložíme-li za x a y poměry $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, objeví se v^n co nejvyšší jmenovatel, kterýmž násobivše, obdržíme stejnoměrnou rovnici

$$u_n + v\, u_{n-1} + v^2\, u_{n-2} + \ldots + v^{n-2} u_2 + v^{n-1} u_1 + v^n u_0 = 0,$$

v kteréž opět u_k jest stejnoměrná funkce prvních dvou stejnoměrných souřadnic x, y stupně k-tého. Abychom obdrželi nekonečně vzdálené body předložené křivky, položme $v = 0$, čímž v poslední rovnici patrně odpadnou veškeré členy, vyjmouc členy nejvyššího t. j. n-tého rozměru (vzhledem k souřadnicím x, y), a obdržíme rovnici

$$u_n = 0,$$

která nám určuje nekonečně vzdálené body naší křivky. Dělíme-li tuto rovnici veličinou x^n, obdržíme pro poměr $\left(\frac{y}{x}\right)$ rovnici n-tého stupně a tudíž n kořenů na důkaz, že křivka $n$tého stupně má n nekonečně vzdálených bodů, což jinak ani býti nemůže, poněvadž ji protíná nekonečně vzdálená přímka

*) Porovnej: „Třetí zpráva jednoty č. math.“ str. 18.

právě tak v n bodech jako každá jiná přímka její roviny. Tečny křivky v těchto nekonečně vzdálených bodech jsou asymptoty křivky, kterých se tudíž počítá též n.

Chceme-li si sestrojiti rovnici asymptot, napišme nejdříve kratším spůsobem rovnici křivky:

$$\Sigma u_k = 0,$$

z kteréž differencováním obdržíme

$$\Sigma\left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

a dále:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Sigma \frac{\partial u_k}{\partial x}}{\Sigma \frac{\partial u_k}{\partial y}},$$

tak že rovnice tečny bodu x, y zní

$$y-\eta = -\frac{\Sigma \frac{\partial u_k}{\partial x}}{\Sigma \frac{\partial u_k}{\partial y}}(x-\xi)$$

aneb spořádáme-li členy jinak,

$$\xi\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial x} + \eta\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial y} = x\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial x} + y\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial y},$$

což můžeme psáti i takto:

$$\xi\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial x} + \eta\,\Sigma\frac{\partial' u_k}{\partial y} = \Sigma\left(x\frac{\partial u_k}{\partial x} + y\frac{\partial u_k}{\partial y}\right).$$

Jelikož u_k jest stejnoměrná funkce proměnných x, y stupně $k$tého, platí o ní Eulerova známá poučka

$$x\frac{\partial u_k}{\partial x} + y\frac{\partial u_k}{\partial z} = ku_k,$$

čímž předcházející rovnice tečny obdrží tvar

$$\xi\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial x} + \eta\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial y} = \Sigma k\,u_k,$$

aneb rozvineme-li pravou stranu,

$$\xi\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial x} + \eta\,\Sigma\frac{\partial u_k}{\partial y} =$$

$$nu_n + (n-1)\,u_{n-1} + (n-2)\,u_{n-2} + \ldots + 2u_2 + u_1\,;$$

odečteme-li pak od rovnice této stupněm n násobenou rovnici křivky, totiž

$$0 = nu_n + nu_{n-1} + \ldots + nu_1 + nu_0,$$
obdržíme konečně co rovnici tečny
$$\xi \Sigma \frac{\partial u_k}{\partial x} + \eta \Sigma \frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} k u_{n-k} = 0.$$
Abychom obdrželi rovnici asymptoty, musíme předpokládati, že souřadnice x, y bodu styku stanou se nekonečně velikými, kdežto současně jich poměr $\frac{y}{x}$ blíží se jedné z n hodnot plynoucích pro tento poměr z rovnice
$$u_n = 0.$$
Dělíme-li rovnici tečny mocninou x^{n-1} (poněvadž funkce v ní se vyskytující jsou vzhledem k x, y nanejvýš rozměru (n—1ho), obdržíme
$$\xi \Sigma \frac{\frac{\partial u_k}{\partial x}}{x^{n-1}} + \eta \Sigma \frac{\frac{\partial u_k}{\partial y}}{x^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k u_{n-k}}{x^{n-1}} = 0.$$
Uvážíme-li, že $\frac{\partial u_k}{\partial x}$, $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ jsou stejnoměrné funkce souřadnic x, y stupně (k—1)ho, bude každá z hodnot
$$\frac{\partial u_k}{\partial x} : x^{k-1}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} : x^{k-1}$$
funkce stupně (k—1)ho, v které co proměnná se vyskytuje pouze poměr $\frac{y}{x}$ a která tudíž i pro $x = \infty$, $y = \infty$ zůstane funkcí hodnoty konečné, má-li jen $\frac{y}{x}$ hodnotu hodnota konečnou. Z toho však bezprostředně plyne, že pro $k < n$
$$\lim \frac{\frac{\partial u_k}{\partial x}}{x^{n-1}} = \lim \frac{\frac{\partial u_k}{\partial x}}{x^{k-1}} \lim \frac{1}{x^{n-k}} = 0,$$
$$\lim \frac{\frac{\partial u_k}{\partial y}}{x^{n-1}} = \lim \frac{\frac{\partial u_k}{\partial y}}{x^{k-1}} \lim \frac{1}{x^{n-k}} = 0.$$
Z týchž důvodů bude, jelikož u_{n-k} jest stejnoměrná funkce stupně (n—k)tého,

poměr $\frac{y}{x}$. Z toho však plyne, že pro $k > 1$

$$lim \frac{k u_{n-k}}{x^{n-1}} = lim \frac{u_{n-k}}{x^{n-k}} lim \frac{k}{x^{k-1}} = 0.$$

Přejdeme-li tedy v poslední rovnici tečny k mezím, obdržíme co rovnici asymptoty

$$\Big/_{\frac{y}{x}=\alpha_i} \left(\xi \frac{\frac{\partial u_n}{\partial x}}{x^{n-1}} + \eta \frac{\frac{\partial u_n}{\partial y}}{x^{n-1}} + \frac{u_{n-1}}{x^{n-1}}\right) = 0,$$

při čemž α_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ jest jeden z n kořenů rovnice

$$u_n = 0 \text{ neb } \frac{u_n}{x^n} = 0.$$

Pro sestrojení rovnice asymptot algebraické křivky

$$u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

máme tudíž následující pravidlo všeobecné:

Řešíme-li rovnici ntého stupně

$$\frac{u_n}{x^n} = 0$$

dle neznámé $\frac{y}{x}$ a je-li všeobecně α_i jeden z kořenů, pak jest rovnice asymptoty tomuto kořenu příslušná

$$\Big/_{\frac{y}{x}=\alpha_i} \frac{1}{x^{n-1}}\left(\xi \frac{\partial u_n}{\partial x} + \eta \frac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1}\right) = 0.$$

Poznámka. Schází-li v rovnici $n$tého stupně

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-k} + \ldots = 0$$

první člen, jest $a_n = 0$ a tudíž jeden z kořenů ∞, poněvadž rovnice pro $\frac{1}{z}$ zní

$$a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \ldots = 0;$$

je-li tedy $a_n = 0$, bude míti tato rovnice za kořen 0 aneb bude $\frac{1}{z} = 0$, tedy $z = \infty$.

Z týchž důvodů soudíme, že r kořenů rovnice $n$tého stupně jest ∞, schází-li v rovnici r nejvyšších členů.

Př. Předložena-li křivka, jejíž rovnice jest

$$(3x^3 - x^2y + 3xy^2 + y^3) + (6x^2 + 12xy + y^2) + (5x + 7y) + 9 = 0,$$

tu jest $n = 3$, křivka tedy stupně třetího,

$$u_n = u_3 = 3x^3 - x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$u_{n-1} = u_2 = 6x^2 + 12xy + y^2,$$

rovnice $u_n : x^n = 0$ zní tudíž

$$3 - \frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} = 0$$

a má kořeny

$$\frac{y}{x} = +1, -1, +3,$$

tedy $\qquad \alpha_1 = +1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = +3;$

rovnice asymptoty jest pak

$$\Big/^{\frac{y}{x}=\alpha_i} \frac{1}{x^2}\left(\xi\frac{\partial u_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial u_3}{\partial y} + u_2\right) = 0.$$

Poněvadž tu

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = 9x^2 - 2xy + 3y^2,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = -x^2 - 6xy + 3y^2,$$

bude rovnice asymptoty v tomto případě

$$\Big/^{\frac{y}{x}=\alpha_i} \left(\xi\left[9 - 2\frac{y}{x} - 3\frac{y^2}{x^2}\right] + \eta\left[-1 - 6\frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}\right]\right.$$
$$\left. + 6 + 12\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) = 0,$$

aneb dosadíme-li za α_i hodnoty svrchu ustanovené,

1. pro $\frac{y}{x} = +1 \ldots 4\xi - 4\eta + 19 = 0$

2. pro $\frac{y}{x} = -1 \ldots 8\xi + 8\eta - 5 = 0$

3. pro $\frac{y}{x} = 3 \ldots -24\xi + 8\eta + 51 = 0$

14. Křivky mající společné asymptoty.

Rozpoložení nekonečně vzdálených bodů křivky $n$tého stupně

$$\Sigma u_k = 0$$

závisí, jak jsme viděli na rovnici

$$u_n = 0,$$

při čemž u_n jest souhrn členů nejvyššího (totiž $n$tého) rozměru vyskytující se v rovnici křivky. Dvě křivky $n$tého stupně, jichž rovnice se shodují co do členů $n$tého rozměru, mají tudíž i společné nekonečně vzdálené body. Tak na př. křivky

$$u_n + f(xy) = 0,$$
$$u_n + \varphi(xy) = 0,$$

kde f a φ jsou funkce libovolné stupně $(n-1)$ního, mají společné nekonečně vzdálené body, poněvadž pro obě nám body ty plynou z rovnice:

$$u_n = 0.$$

V rovnicích asymptot se mimo funkci u_n vyskytuje též funkce u_{n-1}, avšak žádná z dalších funkcí u_{n-2} u_{n-3} atd. Z toho soudíme, že dvě křivky, jejichž rovnice se shodují co do členu nejvyššího a nejblíže příštího rozměru, mají společné asymptoty, t. j. že se vzájemně dotýkají v společných nekonečně vzdálených bodech. Tak na př. mají křivky

$$u_n + u_{n-1} + f(xy)) = 0$$
$$u_n + u_{n-1} + \varphi(xy) = 0$$

společné asymptoty, jsou-li f a φ dvě libovolné funkce stupně $(n-2)$ho. *)

15. Zvláštní případy.

Co se tkne rovnice

$$u_n = 0,$$

rozhodující o nekonečně vzdálených bodech algebraické křivky

$$\Sigma u_k = 0,$$

tu mohou mimo všeobecný i zvláštní případy se vyskytnouti a sice tyto:

a) Rovnice $u_n = 0$ má (vzhledem k poměru $\frac{y}{x}$ co neznámé) s stejných kořenů. Pak soudíme bezprostředně, že předložená křivka protíná nekonečně vzdálenou křivku v s nekonečně blízkých bodech. Mimo to arci v dalších $(n-s)$ bodech. Oněch s při sobě nekonečně blízkých bodů tvoří pak buď bod snásobný, jest-liže totiž příslušné

*) Porovnej, co řečeno bylo o podobných a podobně položených kuželosečkách rozličných středobodů a společného středobodu.

asymptoty jsou vesměs přímky různé, aneb jest nekonečně vzdálená přímka taková, která na dotyčném místě vchází s křivkou do styku stupně (s—1)ního t. j., která má na dotyčném místě s křivkou s bezprostředně po sobě jdoucích bodů pospolu a která nám pak představuje tečnu úvratnou (Inflexionstangente) stupně (s—2)ho. Jest-li bod v nekonečnu, který zahrnuje s nekonečně vzdálených bodů křivky, bodem s násobným, tu se může státi, že z s příslušných tečen (asymptot) jistý počet splývá v jedinou; pak bod ten stává se zároveň i bodem úvratu (Rückkehrpunkt) a sice stupně (r—1)ho, splyne-li r tečen bodu s násobného. Vypočtené případy se však i společně při témže bodu v nekonečnu mohou vyskytnouti a musí se vždy přihlížeti k tomu, jak se tvoří rovnice asymptot pro takovýto případ, abychom souditi mohli, jak se má nekonečně vzdálená přímka ku křivce v úvahu vzaté.

b) Vyskytne-li se v rovnici

$$u_n = 0$$

jistá mocnost úsečky x na př. x^pco společný součinitel, pak pro poměr $\frac{y}{x}$ obdržíme p kořenů rovnajících se ∞ na důkaz, že nekonečně vzdálený bod osy y zahrnuje p nekonečně vzdálených bodů křivky.

Zcela obdobně lze souditi, že křivka v nekonečném bodě osy x má q bodů, vyskytne-li se v rovnici

$$u_n = 0$$

součinitel $y^2 = 0$, poněvadž z n hodnot poměru $\frac{y}{x}$ q hodnot rovnati se bude nule.

c) Vyskytne-li se v rovnici

$$u_n = 0$$

součinitel $(x^2 + y^2)$, pak rozpadne se rovnice ta na dvě, totiž

$$x^2 + y^2 = 0$$

a

$$\left(\frac{u_n}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

První praví, že křivka prochází kruhovými body v nekonečnu. (Křivky takové nazýváme křivkami kruhovými.)

Vyskytne-li se v rovnici $u_n = 0$ součinitel $(x^2 + y^2)^m$, slouží nám to za důkaz, že každý z bodů kruhových v nekonečnu zastupuje m nekonečně vzdálených bodů křivky. V tomto případu jest pak každý z těchto dvou bodů bodem m-násobným aneb se křivka v bodech kruhových dotýká nekonečně vzdálené přímky, vcházejíc s ní ve styk stupně vyššího.

16. Asymptoty kuželoseček.

Vracíme-li se zde ještě jednou ke kuželosečkám, tož se to stává jedině proto, abychom v tomto všeobecně známém případu ukázali, jak lze upotřebiti výsledků, jichž jsme se v předcházejících odstavcích dodělali.

Pro kuželosečky jakož křivky druhého stupně jest $n = 2$ a rovnice všeobecně zní:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tak že

$$u_n = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$
$$u_{n-1} = 2Dx + 2Ey.$$

Rovnice $\frac{u_n}{x_n} = 0$ zní pak

$$A + 2B\left(\frac{y}{x}\right) + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0,$$

z čehož jde

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

a jelikož:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = 2Ax + 2By, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = 2Bx + 2Cy$$

zní rovnice asymptoty (porovnej odstavec 13.)

$\frac{y}{x} = \alpha$

$$\frac{\xi(2Ax + 2By) + \eta(2Bx + 2Cy) + (2Dx + 2Ey)}{x} = 0$$

aneb

$\frac{y}{x} = \alpha$

$$\left(\xi\left(A + B\frac{y}{x}\right) + \eta\left(B + C\frac{y}{x}\right) + \left(D + E\frac{y}{x}\right)\right) = 0,$$

a konečně tudíž

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}(B\xi + C\eta + E) + (A\xi + B\eta + D) = 0.$$

Kuželosečka má dvě reálné asymptoty, je-li $B^2 > AC$ (Hyperbola) a dvě pomyslné, je-li $B^2 < AC$ (Ellipsa).

Jest-li $B^2 = AC$ (Parabola), pak stává dvou splývajících asymptot, jejichž rovnice zní

$$-B(B\xi + C\eta + E) + C(A\xi + B\eta + D) = 0$$

aneb

$$\xi(AC - B^2) + \eta(BC - BC) + CD - BE = 0,$$

t. j. tudíž jednoduše

$$CD - BE = 0,$$

což, jak známo, nám značí nekonečně vzdálenou přímku (porovnej odstavec 3.); a vskutku se parabola nekonečně vzdálené přímky dotýká, která jest pro parabolu asymptotu.

17. Cissoida.

Jest-li OB průměr kruhu, T tečna kruhu v bodu B a proložíme-li bodem libovolnou přímku P, tu buďtež m, n průseky této přímky s kruhem a s tečnou T. Naneseme-li od bodu n v směru k bodu O na přímku P délku Om, obdržíme tím na P bod p a místo takovýchto bodů p jest tak zvaná *Cissoida.*

Rovnice Cissoidy, zní vezmeme-li A za počátek a AB za osu X souřadnic pravoúhlých a jest-li a poloměr kruhu upotřebeného,

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0.$$

Jest tudíž $n = 3$, $u_n = x^3 + xy^2$, $u_{n-1} = -2ay^2$.

Jelikož u_n jest tvaru $x(x^2 + y^2)$, tu vidíme, že jeden z nekonečně vzdálených bodů vyjádřen jest rovnicí $x = 0$ t. j, že se nalézá v nekonečné vzdálenosti na ose y, kdežto ostatní dva plynou z rovnice $x^2 + y^2 = 0$ z čehož vysvítá, že jsou to kruhové body v nekonečnu. Cissoida protíná tudíž nekonečně vzdálenou přímku v reálném bodu na ose y a v bodech kruhových.

Rovnice $\frac{u_n}{x^n} = 0$ stupně $n$tého (zde třetího) zní

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0,$$

z čehož soudíme (porovnej odstavec 13.), že 3 kořeny této kubické rovnice, které však nejvyšší člen schází, jsou:

$$\alpha = \left(\frac{y}{x}\right) = \infty, + \sqrt{-1}, - \sqrt{-1}.$$

Rovnice asymptoty jest (poněvadž $\frac{\partial u_n}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u_n}{\partial y} = 2xy\Big)$:

$$\frac{\xi(3x^2 + y^2) + \eta\, 2xy - 2ay^2}{x^2} \Big/ \tfrac{y}{x} = \alpha = 0$$

aneb

$$\left[\xi\left(3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + 2\eta\left(\frac{y}{x}\right) - 2a\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \Big/ \tfrac{y}{x} = \alpha = 0 \text{ t. j.}$$

$$\xi(3 + \alpha^2) + 2\eta\alpha - 2a\alpha^2 = 0.$$

Pro první případ, že totiž $\alpha = \infty$, pišme rovnici takto:

$$\xi\left(\frac{3}{\alpha^2} + 1\right) + \frac{2\eta}{\alpha} - 2a = 0,$$

načež obdržíme pro $\alpha = \infty$

$$\xi - 2a = 0$$

t. j. $$\xi = 2a$$

co rovnici první asymptoty. Patrně jest to rovnice tečné T.

Pro $\alpha = +\sqrt{-1}$ obdržíme

$$\xi(3-1) + 2\eta\sqrt{-1} + 2a = 0$$

aneb $$\xi + i\eta + a = 0.$$

Pro $\alpha = -\sqrt{-1} = -i$

obdržíme rovnici třetí a poslední asymptoty, totiž

$$\xi(3-1) - 2\eta\sqrt{-1} + 2a = 0$$

t. j. $$\xi - i\eta + a = 0.$$

Cissoida má tudíž následující tři asymptoty:

(1) $$\xi = 2a,$$

(2) $$\xi + i\eta + a = 0,$$

(3) $$\xi - i\eta + a = 0,$$

z nichž jen první jest přímka reálná. Druhá a třetí jsou přímky pomyslně sdružené, mající reálný průsek na ose x, poněvadž pro $\eta = 0$ pro obě plyne

$$\xi = -a.$$

Obě tyto pomyslné asymptoty se tedy protínají na ose $(-X)$ ve vzdálenosti a od bodu počátečného, který jest, jak známo, bodem úvratu (point de rebroussement) pro Cissoidu.

18. Kardioïda.

V témže kruhu prodlužme tetivu $\overline{Om}$ a nanesme na prodloužení průměr kruhu $2a$; obdržíme tak bod p, jehož místo jest křivka zvána *kardioïda*.

Rovnice této křivky zní:

$$(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2),$$

tak že tu jest patrně $n=4$,

$$u_n=(x^2+y^2)^2,\; u_{n-1}=-4ax(x^2+y^2).$$

Z tvaru členu u_n soudíme (viz odst. 15.), že kruhové body v nekonečnu jsou průseky kardioidy s nekonečně vzdálenou přímkou, tak totiž, že každý z těchto dvou bodů zastupuje dva průseky křivky s přímkou nekonečně vzdálenou.

Rovnice $\frac{u_n}{x^n}=0$ zní

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2=0$$

a má kořeny:

$$\alpha=\left(\frac{y}{x}\right)=\begin{cases}+i \text{ dvakráte}\\ -i \text{ dvakráte}\end{cases}$$

Dále máme:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=4(x^2+y^2)x,\; \frac{\partial u_n}{\partial y}=4(x^2+y^2)y,$$

tak že rovnice asymptoty zní:

$${}_{\frac{y}{x}=\alpha}\frac{\xi 4(x^2+y^2)x+\eta 4(x^2+y^2)y-4ax(x^2+y^2)}{x^3}=0,$$

aneb, vyloučíme-li *všem* členům společného součinitele

$$4\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right],$$

$$\xi+\eta\alpha-a=0.$$

Pro $\alpha=+i$ (dvakrát) obdržíme dvě splývající asymptoty

$$\xi+i\eta=a;$$

pro $\alpha=-i$ (dvakrát) též dvě splývající asymptoty

$$\xi-i\eta=a.$$

Pomyslné tyto asymptoty protínají se v reálném bodu na ose x, neb pro $\eta=0$ obdržíme v obou případech

$$\xi=a.$$

Reálný průsek obou asymptot jest tudíž střed upotřebeného kruhu.

Kardioida protíná co křivka 4. stupně nekonečně vzdálenou přímku ve čtyrech bodech, z nichž vždy dva splývají s jedním kruhovým bodem v nekonečnu. Každý z těchto bodů má dvě splývající v konečnu se nalezající (pomyslné) tečny, z čehož soudíme, že každý z obou bodů kruhových pro kardioidu jest bodem úvratu a že tečny úvratu (t. j. asymptoty) mají rovnice:

$$\xi \pm i\eta = a.$$

Jak známo jest třetí bod úvratu bod počáteční O a osa x příslušnou tečnou.

Všecky tři tečny úvratu se tudíž protínají v témž bodě, totiž v středu upotřebeného kruhu.

19. Konchoïda.

Na ose y se nalézá ve vzdálenosti $-b$ od bodu počátečného bod A; bodem tím prokládáme přímky P, které osu X v bodech p protínají a od bodu toho nanášíme po obou stranách na přímky P stálou délku a. Obdržené body vyplňujou křivku, jenž má rovnici

$$x^2y^2 - (b+y)^2(a^2-y^2) = 0$$

a kterouž nazýváme *konchoidu* (Nicomedovu).

Pro konchoidu jest tudíž $n = 4$,

$$u_n = x^2y^2 + y^4, \quad u_{n-1} = 2by^3.$$

Z rovnice

$$u_n = y^2(x^2+y^2) = 0$$

soudíme, že dva nekonečně vzdálené body konchoidy vyhovují podmínce

$$y^2 = 0$$

t. j., že se nalézají na ose X a ostatní dva podmínce

$$x^2 + y^2 = 0$$

t. j., že body kruhové v nekonečnu přináležejí konchoidě.

Rovnice $\frac{u_n}{x^n} = 0$ zní zde

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = 0$$

α má kořeny

$$\alpha = \begin{cases} 0 \;\ldots\ldots\; \text{dvakráte} \\ +i \\ -i \end{cases}$$

Dále máme

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = 2x^2y + 4y^3$$

a zní tudíž rovnice asymptot

$$\Big/_{\frac{y}{y}=\alpha} \frac{\xi(2xy^2)+\eta(2x^2y+4y^3)+2by^3}{x^3}=0$$

aneb

$$\Big/_{\frac{y}{x}=\alpha} \left[\xi\left(\frac{y}{x}\right)^2+\eta\left[\left(\frac{y}{x}\right)+2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]+b\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]=0.$$

Vyloučíme-li *všem* členům společného činitele $\left(\frac{y}{x}\right)$, pak rovnice zní, píšeme-li α místo $\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$\xi\alpha+\eta(1+2\alpha^2)+b\alpha^2=0.$$

Pro $\alpha=0$ (dvakráte) obdržíme

$$\eta=0,$$

z čehož soudíme, že osa x zastupuje dvě asymptoty a že tudíž nekonečně vzdálený bod na ose x považovati dlužno za bod úvratu naší konchoidy.

Pro $\alpha=\pm i$ máme pro zbývající dvě (pomyslné) asymptoty rovnici

$$\pm i\xi+\eta(1-2)-b=0$$

aneb

$$\mp i\xi+\eta+b=0.$$

Tyto dvě pomyslné asymptoty protínají se v *reálném* bodě osy y, neb obdržíme pro obě $\eta=-b$, položíme-li $\xi=0$. Reálný průsek jest tudíž bod A, kterýmž procházejí přímky P. Jak známo jest bod ten dvojným bodem křivky. Tečny jeho jsou reálné, je-li $a>b$, splývají, je-li $a=b$, a stanou se pomyslnými, je-li $a<b$.

Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie.

(Podává *Josef Hervert.*)

(Dokončení.)

Dle tohoto pravidla i ku každému obrazci, jak přímo- tak i křivočarému, nechť jej za předmět aneb za obraz pojímáme, přiřaděný obrazec sestrojiti můžeme a zároveň přesvědčiti se o dvojatém přiřadění předmětu a obrazu, ač-li paprsky