Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 4, 207–214

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122700`

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 15.

(Podává *Ed. Weyr.*)

Má se určiti a geometricky vyložiti integrál rovnice

$$(2y - 3z)\frac{\partial z}{\partial x} + 2(2z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 4y.$$

Jsou-li

$$F_1(x, y, z) = C_1,$$
$$F_2(x, y, z) = C_2$$

integrály následujících dvou differenciálních rovnic

$$\frac{dx}{2y-3z} = \frac{dy}{2(2z-x)} = \frac{dz}{3x-4y},$$

bude, jak známo,

$$\Phi(F_1, F_2) = 0$$

všeobecným integrálem dané rovnice differenciální.

V tomto zvláštním případu můžeme si snadno takové dva integrály F_1, F_2 zjednati, neboť dle posledních rovnic můžeme položiti

$$dx = (2y - 3z)\,dt,$$
$$dy = 2(2z - x)\,dt,$$
$$dz = (3x - 4y)\,dt.$$

Násobíme-li první z těchto rovnic číslem 4, druhou 3, a poslední 2, obdržíme, sečteme-li pak,

$$4dx + 3dy + 2dz = 0,$$

a integrujeme-li teď,

$$F_1 = 4x + 3y + 2z = C_1,$$

což jest jedním z hledaných integrálů.

Násobíme-li však tytéž rovnice, jak po sobě jdou, činiteli x, y, z a sečteme-li, obdržíme patrně

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

a integrujeme-li,

$$F_2 = x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Za tou příčinou jest

$$\Phi(4x + 3y + 2z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

hledaný integrál všeobecný.

Geometrický význam jeho jest patrný; neboť rovná-li se $x^2 + y^2 + z^2$ stálé, musí též $2x + 3y + 2z =$ stálé, z čehož jde, že plocha $\Phi = 0$ obsahuje průseky koulí

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

s rovnoběžnými rovinami

$$4x + 3y + 2z = m,$$

kdež r^2 závisí na m tak, že

$$\Phi(m, r^2) = 0.$$

Integrál všeobecný značí tudíž *rotační plochy*, jichž osa prochází počátkem souřadnic a má rovnice

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

Poznámka. Integrovaná částečná differenciální rovnice jest obsažena ve všeobecnější rovnici

$$(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4)\frac{\partial z}{\partial x} + (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4)\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4, \tag{1}$$

kterouž při této příležitosti, pokud vím, způsobem novým též integrovati hodlám. — Položme za tím účelem

$$dt = \frac{dx}{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}$$
$$= \frac{dy}{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}$$
$$= \frac{dz}{b_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4}. \tag{2}$$

Zjednáme-li si tu oba integrály

$$F_1(x, y, z) = C_1,$$
$$F_2(x, y, z) = C_2,$$

bude opět všeobecným integrálem rovnice (1)

$$\Phi(F_1, F_2) = 0,$$

kdež Φ značí libovolnou funkci.

Znásobíme-li čítatele i jmenovatele zlomků (2), jak po sobě jdou, neurčitými koëfficienty α, β, γ, a položíme-li

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = n\alpha,$$
$$a_2\alpha + b_2\beta\, c_2\gamma = n\beta,$$

$$a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma = n\gamma,$$
$$a_4\alpha + b_4\beta + c_4\gamma = B,$$

z čehož jde též

$$\begin{aligned}(a_1 - n)\alpha + b_1\beta + c_1\gamma &= 0,\\ a_2\alpha + (b_2 - n)\beta + c_2\gamma &= 0,\\ a_3\alpha + b_3\beta + (c_3 - n)\gamma &= 0,\end{aligned} \tag{3}$$

při čemž značí n taktéž neurčitý koëfficient, obdržíme snadno ze soustavy (2)

$$dt = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{n(\alpha x + \beta y + \gamma z) + B}. \tag{4}$$

Hodnota veličiny n ustanoví se vyloučením α, β, γ z rovnic (3), čímž se obdrží rovnice stupně třetího podlé n

$$\begin{vmatrix} a_1 - n, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2 - n, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 - n \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Předpokládejme, že nižádný z kořenů této rovnice nerovná se 0, že tedy determinant $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \gtrless 0$.

Vložíme-li do rovnice (3) za n jednu z hodnot kořenů n_1, n_2, n_3 rovnice (5), obdržíme příslušné *poměry* veličin α, β, γ.

Abychom usnadnili další kroky, položme dle rovnic (3)

$$\begin{aligned}\alpha &= (b_2\, c_3) - [b_2 + c_3]\, n + n^2,\\ \beta &= (c_2\, a_3) + a_2 n,\\ \gamma &= (a_2\, b_3) + a_3 n,\end{aligned} \tag{6}$$

kdež symbol $(b_2\, c_3)$ značí determinant $b_2c_3 - c_2b_3$ a podobně ostatní.

Vložíme-li do těchto rovnic za n posloupně kořeny n_1 n_2, n_3 rovnice (5), obdržíme soustavy hodnot

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3.$$

Jsou-li kořeny n_1, n_2, n_3 vesměs reálné, budou i hodnoty, α, β, γ reálnými; jsou-li však dva kořeny na př. n_2, n_3 ideálné, a je-li $n_2 = re^{i\varphi}$, bude $r_3 = re^{-i\varphi}$,

načež vloživše tyto hodnoty do rovnic (6) shledáme ihned, že i

$$\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$$

budou představovati spřežité neb konjugované hodnoty ideální.

Známe-li koëfficienty α, β, γ, vložme je do rovnice (4), majíce zároveň na zřeteli rovnice (3), načež obdržíme

$$dt = \frac{\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz}{n_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + B_1}$$

$$= \frac{\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz}{n_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + B_2}$$
$$= \frac{\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz}{n_3(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) + B_3},$$

kdež ukazovatel u B oznamuje, že se takový má připojiti k α, β, γ v B obsaženém.

Differenciální rovnice tyto možná bezprostředně integrovati: povstaneť tu

$$\frac{1}{n_1} l[n_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + B_1] = \frac{1}{n_2} lA[n_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + B_2],$$

aneb obrátíme-li

$$\frac{[n_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + B_1]^{n_2}}{[n_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + B_2]^{n_1}} = C_3.$$

Podobně bychom si mohli zjednati integrály ostatní, ač i jednoduchou kruhovou výměnou přípon se snadno obdrží.

Položíme-li tedy

$$\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z = A_n,$$

objeví se co integrály

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{(n_2 A_2 + B_2)^{n_3}}{(n_3 A_3 + B_3)^{n_2}} = C_1. \\ F_2 &= \frac{(n_3 A_3 + B_3)^{n_1}}{(n_1 A_1 + B_1)^{n_3}} = C_2, \\ F_3 &= \frac{(n_1 A_1 + B_1)^{n_2}}{(n_2 A_2 + B_2)^{n_1}} = C_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Jest tu patrno, že vždy jeden z těchto integrálů jest funkcí dvou ostatních, neb

$$F_1^{n_1} F_2^{n_2} F_3^{n_3} = 1.$$

Všeobecný integrál rovnice (1) jest tudíž

$$\Phi(F_1, F_2) = 0,$$

aneb nezrušíme-li souměrnost,

$$\Phi(F_1, F_2, F_3) = 0,$$

Jsou-li kořeny rovnice (5) vesměs *reálné*, jsou nalezené integrály F_1, F_2, F_3 též vesměs reálné funkce a úloha naše tudíž úplně řešena.

Má-li však rovnice (5) též kořeny *soujemné*, na př. n_2 a n_3, obsahují též všecky tři funkce F_1, F_2, F_3 veličiny imaginární, pročež tu nastává otázka, kterak lze udati všeobecný integrál rovnice (1) ve formě reálné.

Abychom k této otázce stručnou dali odpověď, poukazujeme přede vším k tomu, že pak hodnoty α_2, β_2, γ_2 a α_3, β_3, γ_3 jsou spřežité č. konjugovaně imaginární, z čehož plyne, že i A_2, B_2 a A_3, B_3, jakož i $n_2A_2 + B_2$ a $n_3A_3 + B_3$ budou spřežité (při čemž arci jen reálné souřadnice x, y, z béřeme v úvahu).

Položíme-li tedy

$$n_2A_2 + B_2 = re^{i\varphi},$$

bude

$$n_3A_3 + B_3 = re^{-i\varphi},$$

kdež r a φ snadno lze ustanoviti, a tudíž

$$F_1 = \frac{r^{n_3} e^{in_3\varphi}}{r^{n_2} e^{-in_2\varphi}} = r^{n_3 - n_2} e^{i(n_3+n_2)\varphi} = C_1$$

jeden z integrálů (7). Nazveme-li však reálný součet všech tří kořenů rovnice (5) s, bude

$$n_3 + n_2 = s - n_1;$$

mimo to jest rozdíl dvou spřežitých veličin ryze imaginární, možná tedy položiti

$$n_3 - n_2 = iv,$$

kdež v značí hodnotu reálnou. Tím se nám poslední vzorec promění v

$$F_1 = r^{iv} e^{i(s-n_1)\varphi} = C_1$$

aneb v

$$F_1 = r^v e^{(s-n_1)\varphi} = c_1, \tag{8}$$

kdež c_1 jest opět veličina stálá, a povstane tudíž integrál rovnice (2) tvaru reálného.

Zcela obdobným spůsobem lze ostatní dva integrály (7) uvésti na formu reálnou; obdržíť se tu snadno součin

$$F_2F_3 = (n_1A_1 + B_1)^{n_2-n_3} \left(\frac{n_3A_3 + B_3}{n_2A_2 + B_2}\right)^{n_1} = C_2C_3,$$

z čehož opět plyne, položíme-li

$$n_2 - n_3 = -iv \text{ atd.},$$

$$F_2F_3 = (n_1A_1 + B_1)^{-iv} e^{-2in_1\varphi} = C_2C_3$$

aneb zkrátka

$$F_2 = (n_1A_1 + B_1)^r e^{2n_1\varphi} = c_2, \tag{9}$$

v kterémžto druhém integrálu rovnice (2) jest c_2 integrační stálou.

Všeobecný integrál rovnice (1) jest pak

$$\Phi(F_1, F_2) = 0$$

a jest tudíž i co do tvaru reálný.

Při integraci předložené rovnice jsme předpokládali, že determinant

$$\Sigma \pm (a_1\, b_2\, c_3) \gtrless 0,$$

t. j. že nižádný z kořenů n_1, n_2, n_3 nerovná se 0.

Vezměme nyní i tento případ v úvahu a budiž tedy

$$\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3 = 0, \text{ tedy } n_1 = 0.$$

Jest patrno, že tím integrace, kterouž jsme obdrželi funkcí F_1, nikterak se neruší; neb tu jsme předpokládali, že $n_2 \gtrless 0$, a $n_3 \gtrless 0$. Jest tedy i nyní $F_1 = C_1$ jedním integrálem rovnic (2).

Pro ten případ, že by n_2, n_3 byly hodnoty ideálné, bude

$$F_1 = r^v\, e^{s\varphi} = c_1$$

reálným integrálem.

Druhý integrál si však bezprostředně takto zjednáme.

Položme v rovnicích (3)

$$n = n_1 = 0,$$

načež obdržíme dle (4)

$$dt = \frac{\alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz}{B_1},$$

kdež můžeme položiti

$$\alpha_1 = (b_2\, c_3),\ \beta_1 = (c_2\, a_3),\ \gamma_1 = (a_2\, b_3),$$

načež bude, jak snadno lze poznati,

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Píšeme-li pak zkrátka α_0 místo $\frac{\alpha_1}{B_1}$ atd., bude

$$dt = \alpha_0 dx + \beta_0 dy + \gamma_0 dz = \frac{\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz}{n_2 A_2 + B_2},$$

načež integrováním obdržíme druhý integrál rovnic (2), který se též snadno uvede na tvar reálný, kdyby n_2 bylo hodnoty ideálné.

Ku konci budiž této právě vyvinuté methody upotřebeno k integrování rovnice s počátku položené a sice

$$(2y-3z)\frac{\partial z}{\partial x} + (2z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = 3x-4y.$$

Zde jest patrně

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = \begin{vmatrix} 0, & -2, & 3 \\ 2, & 0, & -4 \\ -3, & 4, & 0 \end{vmatrix}$$

a tudíž co protiměrný determinant stupně lichého s příčkou prázdnou hodnoty 0, z čehož jde, že i $n_1 = 0$; pro druhé dva kořeny obdržíme pak $n_2 = i\sqrt{29}$, $n_3 = -i\sqrt{29}$.

Dále jest $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, tedy i $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, pročež tu platí

$$dt = \frac{\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz}{B_1} = \frac{4dx + 3dy + 2dz}{0},$$

což vyžaduje, aby bylo

$$4dx + 3dy + 2dz = 0$$

aneb, integrujeme-li,

$$F_1 = 4x + 3y + 2z = C_1;$$

toť jest tedy první integrál rovnic (2) v tomto zvláštním případě.

Obdobně bude dále

$$dt = \frac{\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz}{n_2 A_2} = \frac{\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz}{n_3 A_3}.$$

aneb, jelikož $n_2 = -n_3$,

$$\frac{\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz}{A_2} + \frac{\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz}{A_3} = 0,$$

z čehož jde integrováním

$$lA_2 + lA_3 = C \text{ neb } A_2 A_3 = C',$$

což jest druhým integrálem.

Uvážíme-li, že

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = 13 : -(12 + i\sqrt{29}) : -(8 - 3i\sqrt{29})$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = 13 : -(12 - i\sqrt{29}) : -(8 + 3i\sqrt{29}),$$

obdržíme místo posledního vzorce

$$A_2 A_3 = 13^2 x^2 + 260y^2 + 325z^2 - 24 \cdot 13xy$$
$$- 16 \cdot 13xz - 156yz = C',$$

z čehož jde, dělíme-li 13,

$$F_2 = 13x^2 + 20y^2 + 25z^2 - 24xy - 16xz - 12yz;$$

bude tedy též

$$F_1^2 + F_2 = 29(x^2 + y^2 + z^2) = C$$

integrálem rovnic (2).

Jest tudíž, jak s počátku již bylo ustanoveno,

$$\Phi(4x + 3y + 2z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

všeobecným integrálem předložené rovnice differenciální.

Druhá cesta tato jest sice o něco delší nežli první, jest však za to všeobecnou.

II. Z fysiky.

Řešení úlohy 19.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. tř. gymn v Č. Budějovicích.)

Značí-li k koëfficient boussoly na místě, kde se pozorování děje (či množství za minutu vyloučeného třaskavého plynu prouđem, jenž jehlu odchyluje o 45°), mimo to W odpor galvanického řetězu a krátkých silných drátů spojujících řetěz s boussolou, E elektromotorickou sílu řetězu, úhel α pak odchyl, spojen-li řetěz galvanický s tangentním proudoměrem *přímo*, jest

$$\frac{E}{W} = k\, tg\, \alpha,$$

a značí-li β odchyl po vložení 6′ drátu měděného,

$$\frac{E}{W+6} = k\, tg\, \beta,$$

béřeme-li totiž za míru odporu jednotku drátu měděného.

Vyloučíme-li tedy z obou rovnic E, obdržíme především

$$W = 6\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta} = 6\,\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

a dosadíme-li hodnoty svrchu uvedené za α a β,

$$W = 12{\cdot}949.$$

Pomocí nabytého W najdeme pak snadno

$$E = 5{\cdot}165\, K.$$

Odpor řetězu jest tudíž 12·949krát větší nežli odpor jednotky drátu a síla elektromotorická jest 5·165krát větší nežli ona, která by při jedničce odporu jedničku proudu spůsobila.

Úloha 27.

Aby loď nějaká za 1 h. urazila 7 angl. mil, jest zapotřebí 12 sil konských; jak musí býti tento počet zvýšen neb snížen, má-li uraziti za 1 h. mil *a*) 12, *b*) 5?