Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jiří Melichar

O dvojdotykových kružnicích kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 549--555

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122689

Píšeme-li poslední rovnici ve tvaru

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{H}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2\varepsilon^2}$$

a dosadíme za n, jest přesnost v určení F dána vzorcem

$$H=\sqrt{\frac{h_1h_2h_3}{h_2^2h_3^2\alpha_1+h_1^2h_3^2\alpha_2^2+h_1^2h_2^2\alpha_3^2}}$$

aneb přehledněji

$$\frac{1}{H^2}=\frac{\alpha_1^2}{h_1^2}+\frac{\alpha_2^2}{h_2^2}+\frac{\alpha_3^2}{h_3^2}=\Sigma\frac{\alpha_k^2}{h_k^2}.$$

O dvojdotykových kružnicích kuželoseček.

Napsal prof. J. **Melichar** v Kroměříži.

I. *O kružnicích dvojdotykových, majících středy na hlavní ose kuželosečky.*

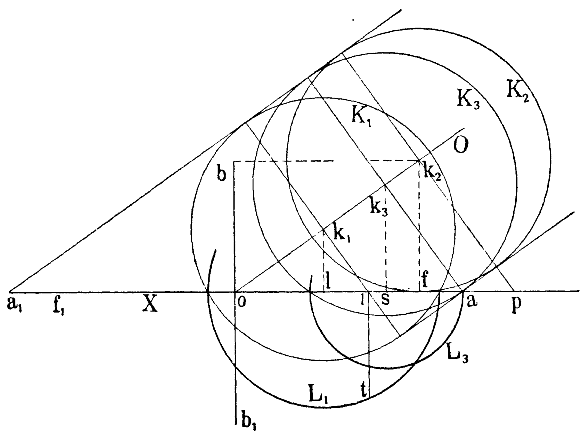
Jednotlivé kružnice této soustavy sestrojíme, položíme-li danou kuželosečkou, ležící v rovině π, rotační plochu kuželovou nebo válcovou a do této vepíšeme řadu ploch kulových, jež budou protínati rovinu π v soustavě kružnic L, dotýkajících se dvojnásobně dané kuželosečky, ježto plocha kuželová nebo válcová má s každou plochou kulovou vepsanou za vzájemný průsek dotyčnou kružnici, jež zajisté, jakožto průsečná čára obou ploch, bude procházeti průsečnými body obou průseků těchto ploch, s rovinou π; že průseky tyto se navzájem dotýkají, patrno z toho, že jeden z nich — daná kuželosečka — je vlastně obrysem plochy kulové a druhý, kružnice L, je průmětem povrchové kružnice téže plochy kulové pro střed promítání, ležící ve středu plochy kuželové.

1. Je-li kuželosečka ellipsou o osách aa_1, bb_1, veďme jí rotační plochu válcovou (obr. 1.); osa její O bude asymptotou hyperboly, ležící v rovině ν, kolmé ku π a mající za vrcholy hlavní osy ohniska a za ohniska vrcholy dané ellipsy; sestrojme sklopený řez plochy válcové rovinou ν a sklopený průmět do ν některé vepsané plochy kulové K_1 o středu k_1; jeho tětiva na

přímce X, průsečnici to rovin π, ν, je průměrem dvojdotykové kružnice L_1, jejíž dotyčné body tt_1 s ellipsou jdou bodem 1.

Zvláštní případy vepsané plochy kulové jsou:

a) jde-li plocha kulová K_2 ohniskem f, pak dotýká se v něm rovina π, a ohnisko f je tudíž nekonečně malou kružnicí, mající s ellipsou dvojnásobný dotyk, při čemž spojnice dotyčných bodů jde bodem p; z pravoúhlého $\triangle opk_2$ vychází, že $\overline{oa}^2 = \overline{of} \, . \, \overline{op}$;



Obr. 1.

b) dotýká-li se plocha kulová K_3 plochy válcové ve vrcholu a, takže protíná rovinu π v kružnici L_3, jejíž oba dotyčné body s ellipsou splývají ve vrcholu a, kružnice L_3 má pak s ellipsou ve vrcholu a společné 4 nekonečně blízké body a sluje hyperoskulační; její poloměr $sa = r$ určen je z pravoúhlého $\triangle oak_3$ hodnotou $\frac{b^2}{a}$, jsou-li a, b poloosy ellipsy, ježto $ak_3 = b$.

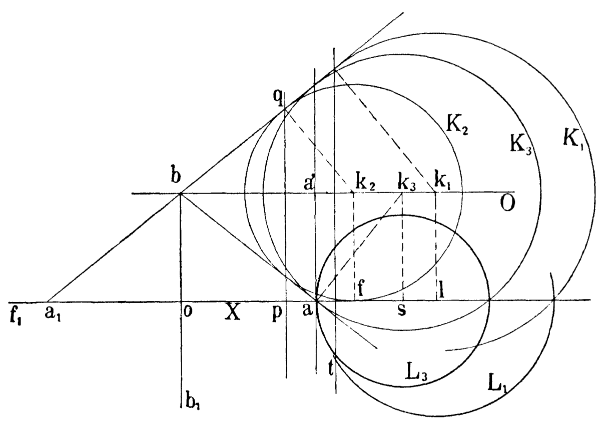
Plochy kulové, mající své středy od k_3 do k_2, protínají π v kružnicích reálných, jejichž body dotyčné s ellipsou jsou imaginárné; jejich spojnice jsou reálné a proběhnou délku od a do p. Plochy kulové o středech od k_2 nahoru protínají π v imaginárních kružnicích; spojnice dotyčných bodů jsou však reálné.

Z poznaného snadno řešíme úlohy:

a) sestrojiti dvojdotykovou kružnici ellipsy, má-li daný střed na hlavní ose, čili daným bodem hlavní osy vésti normály k ellipse;

b) daným poloměrem sestrojiti k ellipse dvojdotykovou kružnici na hlavní ose; střed pomocné plochy kulové je nad X ve výšce rovné odvěsně $\triangle$, jehož přepona je poloosa b a odvěsna daný poloměr;

c) daným bodem na hlavní ose sestrojiti dvojdotykové kružnice ellipsy; zde jde vlastně o sestrojení pomocné kružnice o daném poloměru, jejíž středy jsou na přímce O a jež má procházeti bodem daným, což jednoduchá známá úloha dvojího řešení.



Obr. 2.

2. Je-li kuželosečka hyperbolou o osách aa_1, bb_1 (obr. 2.), jest geometrickým místem středů ploch kuželových jí vedených ellipsa v rovině kolmé v o vrcholech f, f_1 a ohniskách a, a_1, takže sklopená tato ellipsa má za vrcholy malé osy body b, b_1. Veďme hyperbolou plochu kuželovou, mající za sklopený střed vrchol b, osa O bude pak rovnoběžná s X. Libovolnou dvojdotykovou kružnici tu lze opět pomocí vepsané plochy kulové K_1 snadno sestrojiti; při ploše kulové K_2, dotýkající se π v ohnisku f, opět docházíme k témuž významu ohniska jako při ellipse; z $\triangle$ pravoúhlého bqk_2 jde opět $\overline{oa_2} = of \,.\, op$, neboť $bq = a$

Plocha kulová K_3, jdoucí vrcholem, dá opět hyperoskulační kružnici L_3 hyperboly, jejíž poloměr $as = r$ určiti lze z pravoúhlého $\triangle bak_3$ hodnotou $\frac{b^2}{a}$, ježto b je výškou na přeponu a a, r úseky její; trojúhelník tento je však shodný s $\triangle oa's$, při čemž oa' je asymptotou dané hyperboly, takže známé sestrojení středu s hyperoskulační kružnice hyperboly se tu potvrzuje.

Plochy kulové, mající středy od k_3 do k_2, poskytnou dvojdotykové kružnice reálné s imaginárním dotykem; plochy kulové se středy od k_2 do b (pro pravou polovici hyperboly) dají pak dvojdotykové kružnice imaginárné, spojnice dotyčných bodů v obou případech jsou však reálné.

Řešení úloh $a)$, $b)$ je velmi jednoduché; při úloze $c)$ jde o sestrojení kružnic majících tečny ba, ba_1 a jdoucích daným bodem; řešení dvojznačné.

3. Je-li kuželosečka parabolou o vrcholu a a ohnisku f, položme jí rot. plochu kuželovou, jejíž osa tvoří s osou paraboly úhel 45°; střed její bude pak na kolmici ku π jdoucí vrcholem a ve výšce rovné dvěma $\overline{af}$. Všechny vztahy kružnic dvojdotykových jsou obdobné jako dříve, zejména podotknuto budiž, že kružnice hyperoskulační ve vrcholu a má poloměr rovný dvěma $\overline{af}$.

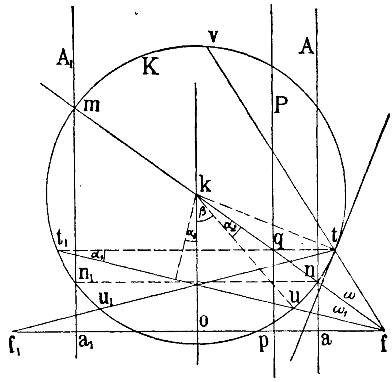
Řešení úloh $a)$, $c)$ jako dříve; úlohu $b)$ řešme tu použitím poučky, že subnormála paraboly je rovna parametru, t. j. dvěma $\overline{af}$, jde pak vlastně o sestrojení průsečíku paraboly s rovnoběžkou s její osou ve vzdálenosti rovné odvěsně $\triangle$, jehož přepona je daný poloměr a odvěsna dvojnásobná délka af; průsečík najdeme snadno pomocí přímky řídící.

II. *O kružnicích dvojdotykových, mających střed na vedlejší ose.*

K soustavě těchto kružnic snadno dojdeme, hledáme-li geometrické místo bodů v prostoru majících stálý poměr vzdáleností od pevné přímky P a bodu f.

Zvolíme-li na P bod q, bude geometrické místo všech bodů v prostoru, majících stálý poměr vzdáleností od bodů f, q, plocha kulová K nad průměrem $\overline{mn}$, jehož body m, n ležíce na spojnici $\overline{fq}$ mají daný poměr vzdáleností $mf : mq = nf : nq$.

Ježto nám jde toliko o body, mající tento poměr vzdáleností od přímky P a bodu f, budou takové body ležeti patrně v rovině jdoucí bodem q kolmo ku P, t. j. na té povrchové kružnici plochy kulové K, jejíž průmět do roviny Pf je tětiva $\overline{tt_1}$ kolmá ku P.



Obr. 3.

Proběhne-li zvolený bod q přímku P, vytvoří body t, t_1 ellipsu neb hyperbolu, je-li stálý poměr vzdáleností větší neb menší než 1. Tvrzení toto dokážeme v obou případech v podstatě stejným způsobem i postupem. Zvolme případ druhý; veďme spojnici $\overline{pq}$ (obr. 3.), na níž najdeme body mn hovící úměře:

$mq : mf = nq : nf$; body t, t_1 rovněž dají úměru

$tq : tf = t_1q : t_1f$, v níž záměnou vnitřních členů bude

$tq : t_1q = tf : t_1f$, což svědčí o rovnosti úhlů ω, ω_1, oblouků nt, nu a úhlů α_1, α_2, kdež α_1 je obvodový úhel nad obloukem ut a α_2 středovým úhlem nad polovičním obloukem un. Úhly α_1, α_3 mají ramena navzájem kolmá, proto $\alpha_1 = \alpha_3$ a také $\alpha_2 = \alpha_3$.

K stejným polovičním středovým úhlům $\beta + \alpha_2$ a $\beta + \alpha_3$ náleží stejné tětivy nn_1, ut_1, z čehož následkem rovnosti délek ft, fu vychází, že $ft_1 - ft = ut_1 = nn_1 = aa_1$, je-li

$$na \,\|\, n_1a_1 \,\|\, P \text{ a } fa \perp P.$$

Učiníme-li dále $ko \parallel P$ a $of_1 = of$, bude následkem rovnosti úhlopříček rovnoramenného lichoběžníka tt_1f_1f patrna rovnost $f_1t - ft = aa_1$. Ježto pak body jsou stálé pro všechny body q zvolené na P následkem stálosti poměru určujícího body mn, jež budou na přímkách A, A_1 rovnoběžných s P, vytvoří body t, t_1 hyperbolu o ohniskách f, f_1 a vrcholech aa_1; P sluje přímkou řídící; z kružnice nad průměrem $\overline{aa_1}$ patrna rovnost $\overline{oa}^2 = of \cdot op$, čímž P nabývá významu poznaného v části I. Hledané geom. místo je zde tudíž rotační jednoplochý hyperboloid (nebo při poměru větším než 1 sploštělý ellipsoid).

Kružnice K se hyperboly této v bodech t, t_1 dotýká.

Rovnost úhlů ω, ω_1 ukazuje na rovnost tětiv tv, ut_1; souměrnost obrazce ku přímce ko svědčí o rovnosti tětiv ut_1, tu_1, z čehož srovnáním s dřívější rovností jde rovnost tětiv tv, tu_1; úhel těchto rovných tětiv je zajisté půlen poloměrem jdoucím společným jejich bodem t, t. j. poloměr k t půlí vedlejší úhel průvodičů ft, f_1t a jest tudíž normálou hyperboly, čili kružnice K dotýká se hyperboly aa_1ff_1 v bodech t, t_1.

Dvojdotykové kružnice hyperboly nebo ellipsy, mající své středy na vedlejší ose, mají za průměry úseky paprskového svazku o středu v ohnisku mezi vrcholovými tečnami; spojnice dotyčných bodů jdou průsečíky přímky řídící s jednotlivými paprsky.

Řešení známých úloh a), b) je tu velmi jednoduché; při b) najdeme směr paprsku jakožto přeponu $\triangle$ o odvěsně oa a přeponě rovné známému poloměru hledané kružnice. Při ellipse ve vrcholech malé osy dostaneme kružnice hyperoskulační; z pravoúhlých trojúhelníků podobných a rovnoběžných, jejichž jedny odvěsny rovnoběžné mají délky R (poloměr hyperoskulační kružnice) a b (jdoucí ohniskem); odvěsny druhé, ležící na vrcholové tečně, mají délky $\frac{a^2}{e}$ a $\frac{a^2}{e} - e$ či $\frac{b^2}{e}$; ze stejných poměrů odvěsen $R : b = \frac{a^2}{e} : \frac{b^2}{e}$ jde, že $R = \frac{a^2}{b}$.

Při hyperbole jsou pro všechny paprsky kružnice reálně se dotýkající; při ellipse většina má dotyk imaginárný.

Úlohu *c*) řešiti tu možno snadno ve znění obecnějším: sestrojiti dvojdotykovou kružnici kuželosečky o středu na vedlejší ose, aby procházela libovolným bodem. Hledaná kružnice jde souměrně ležícím bodem k vedlejší ose; svazek kružnic o těchto dvou bodech seče vrcholové tečny A, A_1 ve 4 bodech, jejichž spojnice, jdoucí středy jednotlivých kružnic, obalují ellipsu nebo hyperbolu, jejíž ohniska jsou středy svazku a vrcholové tečny přímky A, A_1. V případě, že bod hledané kružnice je na vedlejší ose, bude tato obalová kuželosečka kružnicí, ježto obě ohniska její splývají.

Řešení úlohy *c*) pro daný bod na ose i mimo osu převedeno na vedení tečen ohniskem f ku pomocné kružnici nebo kuželosečce obalové; řešení zajisté jak jednoduché tak krásné zároveň.

Jde-li o sestrojení kružnice dvojdotykové o středu na hlavní ose a jdoucí libovolným bodem, myslíme nad danou ellipsou jakožto meridiánem rotační vejčitý ellipsoid, nad hyperbolou dvojplochý rot. hyperboloid a nad parabolou rot. paraboloid; na těchto plochách najdeme takový elliptický řez, jehož průmět do π je kružnice — zajisté dvojdotyková s danou kuželosečkou. K tomu cíli zvolme některou dvojdotykovou kružnici (u ellipsy zajisté o poloměru b, u hyperboly a paraboly kružnici hyperoskulační); v průsečných bodech této s hlavní osou vedené kolmice ku π protínají kolmý meridián v bodech, jejichž spojnice (při zmíněné volbě u ellipsy jdoucí středem, u hyperboly a paraboly jdoucí vrcholem a) jsou průměty hledaných 2 pomocných řezů do roviny tohoto kolmého meridiánu. Bodem na povrchu plochy, jehož průmětem je daný bod, veďme roviny rovnoběžné s těmito řezy (pomocí roviny rovnoběžné s kolmým meridiánem); roviny takto vyhledané sekou plochu v ellipsách, jejichž průměty jsou hledané kružnice dvojdotykové (stačí ovšem najíti průměty jejich středů).