Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Poznámky k analytické theorii přímky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 3, 121--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122674

takže první členové tu byvše dosazeni poskytují řadu

$$2=\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^7}+\frac{9}{2^{14}}+\frac{44}{2^{51}}+\ldots,$$

čímž „paradoxon“ jest odstraněno.

Poznámky k analytické theorii přímky.

Pro žáky středních škol napsal

prof. dr. **F. J. Studnička.**

Vyjádřují-li v pravoúhlých souřadnicích rovnice

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1x+b_1y+c_1=0, \\ U_2 &\equiv b_1x+a_1y+c_2=0, \\ U_3 &\equiv a_2x+a_2y+c_3=0 \end{aligned} \tag{1}$$

tři zvláštní přímky, vyskytují se u nich vlastnosti, jež zasluhují bližšího povšimnutí a vytknutí. Jestiť tu *modulem*, kterýmž se rovnice tyto uvádějí na tvar normalní

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0,$$

kdež α, β, p mají známý význam, pro

$$\begin{aligned} &\text{přímku prvou } \mu_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}, \\ &\quad\text{„ druhou } \mu_2=\sqrt{b_1^2+a_1^2}=\mu_1, \\ &\quad\text{„ třetí } \mu_3=\sqrt{a_2^2+a_2^2}=a_2\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

takže nazvati možná přímky U_1 a U_2 *unimodulárnými*, jakýmiž jsou též přímky *kolmo* na sobě stojící. Zároveň tu patrno, že úhly, jež tyto přímky po dvou svírají, určují se vzorci

$$\begin{aligned} \cos\sphericalangle_2^1 &= \cos\delta_3=\frac{a_1b_1+a_1b_1}{\mu_1\mu_2}=\frac{2a_1b_1}{\mu_1^2}, \\ \cos\sphericalangle_3^2 &= \cos\delta_1=\frac{a_2b_1+a_1a_2}{\mu_1\mu_3}, \\ \cos\sphericalangle_1^3 &= \cos\delta_2=\frac{a_1a_2+a_2b_1}{\mu_1\mu_3}=\cos\delta_1; \end{aligned} \tag{3}$$

jsou tedy dva úhly tu stejné, což poznati možná i z determinantu soustavy (1)

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ b_1, & a_1, & c_2 \\ a_2, & a_2, & c_3 \end{vmatrix},$$

jelikož tu o subdeterminantech prvků sloupce třetího platí

$$C_1 = a_2 b_1 - a_1 a_2 = C_2 .^{*)}$$

Konečně tu možná *pouhým* sečtením a odečtením zjednati si

$$U_1 + U_2 \equiv (a_1 + b_1)(x + y) + c_1 + c_2 \equiv V_1 = 0,$$
$$U_1 - U_2 \equiv (a_1 - b_1)(x - y) + c_1 - c_2 \equiv V_2 = 0,$$

rovnice přímek *kolmo* na sobě stojících, jež *půlí* úhly oběma přímkami původními sevřené, z nichž přímka V_2 *kolmo* stojí na přímce U_3, jelikož tu platí

$$(a_1 - b_1)a_2 - (a_1 - b_1)a_2 = 0.$$

Jestiť tedy trojúhelník přímkami (1) určený *rovnoramenným*, takže řešení jeho stává se velmi jednoduchým. Třebať jenom stanoviti patero veličin

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_3, \quad C_1 = C_2, \quad C_3, \quad \delta,$$

aby se vypočítal ploský obsah jeho, délky stran a výšek, jakož i velikost úhlů, při čemž vzorec obsah Δ vyjádřující taktéž se zjednoduší, ano tu jest

$$\delta = (c_1 + c_2)C_1 + c_3 C_3$$

a tedy podlé známého vzorce

$$2\Delta = \frac{1}{C_3}\left(c_1 + c_2 + \frac{C_3}{C_1} c_3\right)^2;$$

z délek stran a výšek třeba určiti pouze dvě a z úhlů pouze jeden, na př. δ_1, jelikož

---

*) Kdyby koëfficienty veličiny y v soustavě (1) byly negativní vesměs, nezmění se tyto vzorce; kdyby tak bylo u rovnice třetí, vyšlo by $C_1 = -C_2$.

$$\delta_1 = \delta_2, \quad \delta_3 = 180^0 - 2\delta_1.$$

Kdybychom na př. chtěli řešiti trojúhelník, daný rovnicemi

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv 3x - y - 10 = 0, \\ U_2 &\equiv x - 3y + 3 = 0, \\ U_3 &\equiv 2x - 2y - 1 = 0, \end{aligned}$$

zjednali bychom si především

$$\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{10}, \quad \mu_3 = 2\sqrt{2},$$

$$C_1 = C_2 = -2 + 6 = 4, \quad C_3 = -9 + 1 = -8,$$

$$\delta = 4. -7 - 8. -1 = -20,$$

načež by se obdrželo pro úhly podlé známých vzorců

$$\cos\delta_1 = \cos\delta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\delta_3 = \frac{3}{5},$$

z čehož se pomocí tabulek určí

$$\delta_1 = 26^0 33' 54'' 18 = \delta_2, \text{ tedy } \delta_3 = 126^0 52' 11'' 64,$$

pro délky stran pak podlé známých vzorců

$$l_1 = l_2 = \frac{5}{8}\sqrt{10}, \quad l_3 = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

podobně pro výšky podlé známých vzorců

$$p_1 = p_2 = \frac{5}{\sqrt{10}}, \quad p_3 = \frac{5}{4\sqrt{2}},$$

pro ploský obsah konečně buď dle vzorce

$$2\Delta = l_3 p_3 = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,.\,\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{25}{8},$$

neb dle vzorce dříve uvedeného

$$2\Delta = \frac{1}{8}(-7 + 2)^2 = \frac{25}{8},$$

takže tedy $\Delta = \frac{25}{16}$ jednotek čtverečných.

Jak by vypadalo řešení, kdyby v poslední rovnici přímkové stálo $+2y$ místo $-2y$?

O vyhledávání číselných skupin dvojmocninové stejnosti.

Pro žáky středních škol napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V XVII. sv. časopisu „Bulletin de la Société mathématique de France“ uveřejnil *Michal Frolov* pojednání o skupinách čísel celistvých

$$\begin{array}{l} a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, a_n, \\ b_1, \ b_2, \ b_3, \ldots, b_n, \\ c_1, \ c_2, \ c_3, \ldots, c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

vyhovujících podmínkám dvěma a sice nejen

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \Sigma b_k = \Sigma c_k = \ldots,$$

nýbrž mimo to ještě

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \Sigma b_k^2 = \Sigma c_k^2 = \ldots,$$

což znamená, že nejen součty prvých, nýbrž i druhých mocnin se tu sobě rovnají, což vyznačuje symbolem

$$a_1, \ldots, a_n \perp b_1 \ldots b_n \perp c_1, \ldots, c_n \perp \ldots,$$

poznamenávaje, že takovéto skupiny představují „une égalité à deux degrés“, což vyjádřeno slovy „číselné skupiny dvojmocninové stejnosti.“ *)

---

* O pojednání tomto byla již obsažná, byť i jen krátká zpráva podána v 1. sešitě tohoto ročníku na str. 46., takže vracejíce se k němu tímto článkem, máme na zřeteli pouze přání četných našich čtenářů na středních školách, jimž takovéto výklady rázu skoro zábavného jsou často vítány. *Red.*