Zobrazme v $K_1'$ kružnici K sklopenou kolem osy X do průmětny $\pi$; vytknouce pak obrazy $m_1'$, $m_3'$ libovolného bodu $m$ oné kružnice, stanovme z nich obrazy $m_3$, $m_1$. Vedeme-li průměr $m_1' \, n_1'$ (tvořící s $X_{1.2}$ úhel $\omega$) a k němu kolmice $e_1h_1$, $f_1k_1$, bude

$$\overline{e_1h_1} = \overline{f_1k_1} = \overline{o_1e_1} \, . \sin\omega$$

a poněvadž

$$\sin\omega = \frac{p_2m_1'}{o_1m_1'} = \frac{o_3m_3}{o_3c_3} = \frac{p_3m_3}{c_1c_3} = \frac{p_3m_3}{o_1e_1},$$

tedy jest $$e_1h_1 = p_3m_3 \, .$$

Pozorujme nyní pravoúhlý trojúhelník $epm$ v rovině kolmé ku $\pi$, srovnávajíce jej s trojúhelníkem $e_1h_1m_1'$. Jelikož

$$em = e_1m_1', \quad pm = p_3m_3 = e_1h_1,$$

jest $$\triangle\, epm \cong \triangle\, e_1h_1m_1'$$

a proto $$e_1m_1 = m_1'h_1 \, .$$

Z důvodů zcela obdobných jest

$$f_1m_1 = m_1'k_1 = h_1n_1'$$

a tudíž

$$e_1m_1 + f_1m_1 = m_1'h_1 + h_1n_1' = m_1'n_1' = a_1b_1.$$

Tím dokázáno, že bod $m_1$ náleží ellipse, jejíž osy jsou $a_1b_1$, $c_1d_1$ a ohniska $e_1$, $f_1$.

---

# Vysvětlení a upotřebení návodu Schellbachova při stanovení maxima neb minima funkce o jedné neznámé.

Žákům středních škol podává

**Josef Koch,**
professor v Praze.

Pozorujeme-li rozmanité úkazy kolem nás se jevící, puzeni jsme rozumem svým pátrati po příčinách jejich, po spojení předcházejících s následujícími — krátce po souvislosti. Hledí-li se na př. vyšetřiti relativní pevnosť nějakého trámce, známo, že pevnosť jeho se mění s délkou anebo tlouštkou aneb výškou trámce. Vrhne-li se kámen do výšky, dostoupí jisté výšky a vrací se pak ku zemi zpět — výška však, kteréž dosáhne, závislá jest i na rychlosti, kterouž kámen jest vržen i na úhlu, ve kterémž byl vržen, mění se tedy i rychlostí vrhu i úhlem. Krouží-li proud elektrický hmotou, známo, že intensita jeho se mění, že závislá jest i na síle elektrobudící i na odporu — odpor však, zůstává-li hmota i teplota vodiče jinak stejná, že mění se, mění-li se délka a průřezná plocha vodiče. Obvod a plocha kruhu, povrch i obsah koule závisly jsou na velikosti poloměru jeho, plocha trojúhelníka na výšce jeho a podstavě atd.

Ve všech zde uvedených příkladech veličina jedna (zjev) odvislá jest od veličin jiných (zjevů). Všeobecná odvislosť veličiny jedné od jiné neb několika jiných veličin vyznačuje se mathematicky tím, že se veličiny tyto, na nichž hodnota jiné závisí, vloží do závorky a před ni postaví $f$ neb F co zkratka slova „funkce".

Je-li veličina $y$ závislá na jedné nebo několika stálých i proměnných veličinách $a$, $b$, $c$ . . ., $x$, $z$, $v$ . . ., na př.

$$y = \frac{ax + c}{b} \text{ neb } y = \frac{ax^2 + bz + c}{b^2 v},$$

že mění se $y$, mění-li svou hodnotu veličiny $x$, $z$, $v$, . . ., nazývá se dle Bernouilli-ho veličina $y$ odvisle proměnnou či funkcí veličin $a$, $b$, $c$, . . ., $x$, $z$, $v$, . . ., při čemž proměnné $x$, $z$, $v$, . . . se zovou „neodvisle proměnné"; i píše se v prvém případu: $y = f(a, b, c, x)$, v druhém $y = f(a, b, c, x, z, v)$.

Jelikož však stálé veličiny $a$, $b$, $c$, . . . vlivu nemají na změnu odvisle proměnné, lze tyto v závorce vynechati a psáti:

$$y = f(x), \quad y = f(x, z, v);$$

i čteme: $y$ jest funkce proměnné $x$, neb funkce proměnných $x$, $z$, $v$. Funkce tohoto tvaru nazývají se rozvinuté, jelikož zřejmo, která veličina jest odvisle a která neb které jsou neodvisle proměnné.

Rovnice shora uvedené lze však uvésti na nulu:

$$ax - by + c = 0, \quad ax^2 - b^2 vy + bz + c = 0;$$

v tomto případě zovou se funkce nerozvinuté, neb není tu nijak patrným učiněn rozdíl mezi proměnnými — i píšeme:

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y, z, v) = 0,$$

řešením však dle té neb oné za odvislou volené proměnné stane se funkce nerozvinutá opětně funkcí rozvinutou.

Funkce dělí se též na algebraické a transcendentní. Algebraické zovou se funkce, jsou-li proměnné i stálé veličiny vespolek spojeny toliko čtyřmi nižšími úkony počtářskými aneb jsou-li proměnné základem mocnin o stálých mocnitelích; není-li tomu tak, zovou se funkce transcendentní. Na př. funkce

$$y = m + nx, \quad y = ax^n, \quad y = a\sqrt{b + x}$$

jsou algebraické funkce,

$$y = a \sin x, \quad y = b^x, \quad y = m \log x,$$

jsou transcendentní funkce.

Probíhá-li neodvisle proměnná $x$ v určitých mezích od $x = a$ do $x = b$ všechny možné hodnoty, tak že rozdíl dvou sousedních se blíží nule a mění-li při tom i odvisle proměnná $y = f(x)$ stále svou hodnotu o neskonale malou veličinu, že rozdíl dvou sousedních jest též nekonečně malý, nazývá se odvisle proměnná „funkcí spojitou", jinak však funkcí přetržitou, ve které tedy rozdíl těch kterých dvou členů nekonečně blízkých buď jest konečný buď nekonečně veliký.

Tak jest funkce

$$y = 2x^2 - 5x - 7$$

spojitou v celé rozsáhlosti od $-\infty$ do $+\infty$; neb zvolí-li se za $x$ řada hodnot

$$x = -\infty \ldots -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, 4, \ldots +\infty,$$

jest

$$y = -\infty \ldots \; 26, \; 11, \; 0, -7, -11, -9, -4, 5, \ldots +\infty;$$

funkce $y = \frac{1}{x}$ jest však přetržitá, neb zvolí-li se za $x$ řada hodnot

$$x = \infty \ldots 3, \; 2, \; 1, \; 0, \; -1, \; -2, \; -3, \ldots -\infty,$$

jest

$$y = 0 \ldots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \; 1, \; \infty, \; -1, \; -\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{3}, \ldots \; 0.$$

Je-li $x = 0$, jest $y = \pm \infty$ t. j. křivka funkcí touto graficky znázorněná přechází z kladné do záporné nekonečnosti. [Rovnicí $y = \frac{1}{x}$ či $xy = 1$ jest dána rovnostranná hyperbola, asymptoty její jsou osy soustavy souřadnic pravoúhlých.]

Stává se však, že neodvisle proměnná $x$ roste toliko s počátku a že ubývá jí pak neustále — v případě tomto jest zajisté mezi všemi hodnotami neodvisle proměnné i hodnota taková, která činí, že odvisle proměnná $y = f(x)$ jest buď větší buď menší než každá bezprostředně následující i předcházející hodnota její, že jest buď maximum buď minimum.

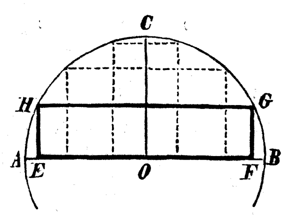
Žeť jedné a téže funkci i několik největších neb nejmenších hodnot mohou náležeti, vysvítá z toho, že přibývání a ubývání funkce v mezích určitých se může opětovati; v případě takovém nazývá se největší maximum neb minimum „absolutní."

Hojně vyskytují se i v mathematice i ve fysice úkoly, při nichž rozhodovati dlužno, zdaliž té které funkci náleží maximum neb minimum a které hodnoty — úkoly tyto řeší se obyčejně bez určité methody. Ze všech návodů, jichž užívá se ku stanovení maxima neb minima funkce o jedné proměnné, zdá se mi býti pro žáky nejpřiměřenější „návod Schellbachův" jak pro svou jednoduchosť a instruktivnosť tak i pro krátkosť času, jehož vyžaduje.

Vysvětliti návod tento lze nejlépe příklady samými.

1. Do polokruhu budiž vepsán obdélník největší plochy.

Do polokruhu lze vepsati neskonale mnoho obdélníků různé velikosti, splývají-li totiž podstavy jejich s průměrem kruhu AB




Obr. 1.

(obr. 1.) a přibývá-li výšek jejich v mezích od $v = 0$ do $v = r$, značí-li $r$ poloměr kruhu. Je-li $v = 0$, jest plocha obdélníka rovna nule; roste-li $v$, zvětšuje se též plocha, než přibývání plochy jest omezeno; dosaženo-li této meze, ubývá plochy vždy více a více, ač výšky stále přibývá — pro $v = r$ jest plocha obdélníka opět rovna nule.

Jest tedy zřejmo, že náleží obdélníkům těmto v mezích $v = 0$ až $v = r$ maximum t. j. mezi všemi možnými obdélníky jest jeden, jehož plocha jest největší.

Budiž obdélník EFGH z rostoucích, jehož plocha

$$p = 2xy,$$

položí-li se $EF = 2x$, $FG = y$.

V $\triangle$ OFG jest $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, pročež

$$p = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Jelikož však obdélník s rostoucí výškou svého maxima dosáhnuv stále se zmenšuje až do nuly, jest zřejmo, že mezi plochami stále se zmenšujícími musí býti též plocha obdélníka, která velikostí svou se rovná ploše EFGH; jsou-li strany obdélníka toho $2x_1$ a $y_1$, jest plocha jeho

$$p_1 = 2x_1\sqrt{r^2 - x_1{}^2},$$

a proto

$$2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2x_1\sqrt{r^2 - x_1{}^2}$$

čili

$$x^4 - x_1{}^4 = r^2(x^2 - x_1{}^2)$$

aneb

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 + x_1^2 - r^2) = 0,$$

z čehož plyne: $x^2 + x_1^2 - r^2 = 0$, neboť činitel $x^2 - x_1^2 = 0$ neskýtá nic nového, podmínkou touto vedeni jsme ku obdélníku EFGH.

Má-li však $x^2 + x_1^2 = r^2$ t. j. součet dvou sčítanců býti stálý, musí, zvětšuje-li se jeden z nich ($x$ nebo $x_1$) současně druhý ($x_1$ nebo $x$) se zmenšovati — mezi všemi hodnotami těmito musí však býti i hodnota, která činí $x_1 = x$; hodnota tato jest zajisté ona, jíž se stává obdélník největší, neboť jenom největšímu obdélníku neodpovídá žádný druhý největší.

Položí-li se tedy $x = x_1 = \xi$, jest $2\xi^2 = r^2$, tedy

$$x = \xi = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \eta = y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

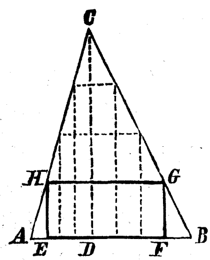
Podstava největšího obdélníka jest tedy:

$$2\xi = 2x = r\sqrt{2},\ \text{výška}\ \eta = y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

a proto plocha jeho $p = r^2$.

2. Do trojúhelníka budiž vepsán pravoúhelník největší plochy.

Splývají-li podstavy všech možných pravoúhelníků opětně s podstavou trojúhelníka daného, jehož podstava AB $= a$ a výška




Obr. 2.

CD $= b$, a přibývá-li výšek těchto pravoúhelníků od $v = 0$ do $v = b$, jest plocha jednoho z rostoucích pravoúhelníků na př. EFGH $= xy$, je-li EF $= y$ a GF $= x$ (obr. 2.).

Z podobnosti trojúhelníků ABC a HGC plyne:

$$a : b = y : (b - x), \quad \text{t. j.} \quad y = \frac{a}{b}(b - x)$$

a tím plocha pravoúhelníka EFGH $= \frac{a}{b}(b - x)x$.

Jelikož však výšky stále přibývá a pravoúhelník dosáhnuv s rostoucí výškou svého maxima stále vždy více se zmenšuje, jest zajisté mezi těmito pravoúhelníky jeden, jehož plocha rovna jest ploše pravoúhelníka EFGH. Je-li tohoto obdélníka podstava $y_1$ a výška $x_1$, jest plocha jeho $= \frac{a}{b}(b - x_1)x_1$.

I jest tímto:

$$\frac{a}{b}(b - x)x = \frac{a}{b}(b - x_1)x_1$$

čili

$$x^2 - x_1^2 = b(x - x_1)$$

aneb $$(x - x_1)\,[x + x_1 - b] = 0.$$

Činitel $x - x_1 = 0$ neskýtá nic nového, neboť podmínkou touto vedeni jsme ku pravoúhelníku EFGH; druhým činitelem však stanoveno:

$$x_1 = b - x;$$

jím dána jest výška pravoúhelníka onoho, jehož plocha rovna jest ploše obdélníka EFGH.

Čím větší jest $x$, tím menší jest $x_1$ a naopak a proto bude konečně i takové hodnoty $x$, kterouž $x_1 = x$, což stane se, zvolí-li se za $x$ hodnota, kterouž pravoúhelník bude největší, neboť největšímu neodpovídá žádný druhý největší.

Položí-li se tedy v podmínce $x + x_1 - b = 0$,

$x = x_1 = \xi$, jest $2\xi = b$ t. j. $\xi = x = \frac{b}{2}$ a proto

$$y = \eta = \frac{a}{b}\left(b - \frac{b}{2}\right) = \frac{a}{2},$$

čímž plocha největšího pravoúhelníka

$$p = \frac{ab}{4}.$$

Z těchto dvou uvedených příkladů lze návod ku stanovení maxima funkce o jedné proměnné zahrnouti ve věty:

*a)* Funkce vyjádří se toliko jedinou proměnnou na př. $x$.

*b)* Výraz obdržený staví se v roveň výrazu stejnému, v němž toliko za $x$ položiti dlužno $x_1$.

*c)* Rovnice obdržená uspořádá se tak, aby bylo lze činitele $x - x_1$ vyjmouti.

*d)* Činitelem $x - x_1$ dělí se rovnice.

*e)* V rovnice posléze obdržené položí se $x = x_1 = \xi$; řešením této rovnice určovací dáno bude ono $x = \xi$, které maximu funkce odpovídá.

Nemá-li funkce maxima nýbrž minima, stanoví se toto minimum způsobem stejným.

*Příklady.*

1. Která hodnota neodvisle proměnné $x$ činí funkci

$$y = \frac{3x^2 + 5}{7 - x}$$

maximum neb minimum?

Polož: $$\frac{3x^2+5}{7-x}=\frac{3x_1^2+5}{7-x_1};$$

uspořádáním obdržíme

$$(7-x_1)(3x^2+5)=(7-x)(3x_1^2+5)$$

aneb $$(x-x_1)[5+21(x+x_1)-3xx_1]=0$$

a dělí-li se rovnice tato činitelem $x-x_1$,

$$5+21(x+x_1)-3xx_1=0.$$

Položíme-li $x=x_1=\xi$,

bude $$5+42\xi-3\xi^2=0,$$

t. j. $$\xi=7\pm\sqrt{49-\frac{5}{3}}=7\pm\frac{1}{3}\sqrt{426}=7\pm\frac{20{\cdot}639\ldots}{3},$$

tedy $$\xi_1=13{\cdot}879\ldots,\quad \xi_2=0{\cdot}121\ldots.$$

Zobrazí-li se graficky výraz funkci danou vyjadřující, t. j. stanoví-li se křivka rovnici dané odpovídající, sezná se, že hodnotě $x=\xi_2=0{\cdot}121$ odpovídá minimum funkce.
Neboť, je-li

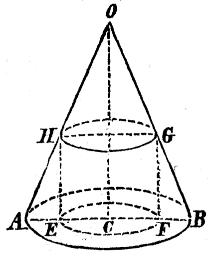
$x=7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1 \mid 0 \mid -1 \mid -2 \mid -3 \mid \ldots,$

jest

$y=\infty \mid 113 \mid 40 \mid 17\frac{2}{3} \mid 8 \mid 3\frac{2}{5} \mid 1\frac{1}{3} \mid \frac{5}{7} \mid 1 \mid 1\frac{1}{3} \mid 3\frac{1}{5} \mid \ldots;$

hodnoty funkce ubývá v mezích $+1$ a 0, pak jí opětně přibývá — náleží tedy funkci této v mezích naznačených „minimum" a sice pro $x=0{\cdot}121\ldots$, čímž $y=0{\cdot}2128\ldots$

2. V kruhový kužel přímý budiž vepsán přímý válec, jehož povrch jest největší.




Obr. 3.

Je-li $x$ poloměr podstavy a $y$ jeho strana (obr. 3.), jest povrch válce:

$$O = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi(x^2 + xy).$$

Veličiny stálé nemají vlivu na maximum neb minimum funkce, jest tedy vyšetřiti, kdy výraz

$$x^2 + xy$$

jest maximum.

Z podobnosti trojúhelníků ABO a OGH plyne:

$$x : r = (v - y) : v,$$

je-li $r$ poloměr podstavy a $v$ výška kužele; tím jest $y = \frac{v(r-x)}{r}$ a proto

$$x^2 + xy = x^2 + x\frac{v(r-x)}{r} = x^2\frac{r-v}{r} + vx.$$

Položíme-li

$$x^2\frac{r-v}{r} + vx = x_1^2\frac{r-v}{r} + vx_1,$$

jest
$$(x - x_1)\left[(x + x_1)\frac{r-v}{r} + v\right] = 0$$

a proto
$$(x + x_1)\frac{r-v}{r} + v = 0.$$

Je-li $x = x_1 = \xi$, bude $v + 2\xi\frac{r-v}{r} = 0$,

t. j.
$$\xi = x = \frac{rv}{2(v-r)};$$

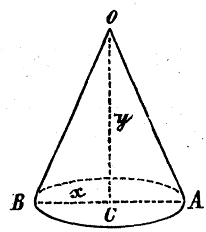
dosadíme-li tuto hodnotu do výrazu pro $y$, jest

$$y = \eta = \frac{v}{r}\left[r - \frac{rv}{2(v-r)}\right] = \frac{v(v-2r)}{2(v-r)},$$

a proto povrch válce žádaného

$$O = 2\pi\left[\frac{r^2v^2}{4(v-r)^2} + \frac{rv^2(v-2r)}{4(v-r)^2}\right] = \frac{\pi v^2 r}{2(v-r)}.$$

3. Budiž sestrojen přímý kužel kruhový, jehož obsah jest K, aby plášť jeho byl nejmenší.




Obr. 4.

Je-li $x$ poloměr, $y$ výška a $s$ strana kužele (obr. 4.), jest obsah jeho

$$K = \frac{1}{3}\pi x^2 y \quad \text{a proto} \quad y = \frac{3K}{\pi x^2}.$$

Plášť kužele $p = \pi x s$ a jelikož $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, jest

$$p = \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi x\sqrt{x^2 + \frac{9K^2}{\pi^2 x^4}}.$$

Položíme-li

$$\pi x\sqrt{x^2 + \frac{9K^2}{\pi^2 x^4}} = \pi x_1\sqrt{\frac{9K^2}{\pi x_1^4} + x_1^2},$$

jest

$$x^4 - x_1^4 + \frac{9K^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_1^2}\right] = 0$$

aneb

$$(x^2 - x_1^2)\left[x^2 + x_1^2 - \frac{9K^2}{\pi^2 x^2 x_1^2}\right] = 0,$$

t. j.

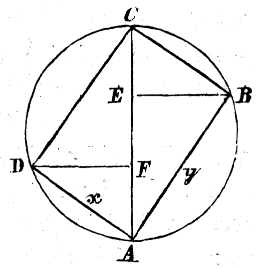
$$x^2 + x_1^2 = \frac{9K^2}{\pi^2 x^2 x_1^2}.$$

Je-li $x = x_1 = \xi$, bude $2\xi^2 = \frac{9K^2}{\pi^2 \xi^4}$, tedy

$$x = \xi = \sqrt[6]{\frac{9K^2}{2x^2}} \quad \text{a proto} \quad y = \eta = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}.$$

4. Ze dřevěného špalku tvaru válcovitého o průměru $d$ budiž docíleno trámce největší pevnosti v lomu.

Pevnost v lomu jest v přímém poměru se šířkou a čtvercem výšky, v převráceném poměru však s délkou trámce.




Obr. 5.

Je-li $x$ šířka a $y$ výška průřezu trámce (obr. 5.), jest pevnosť v lomu $L = k \cdot xy^2$.

V $\triangle$ ABC jest $y^2 = d^2 - x^2$ a proto

$$L = k \cdot x(d^2 - x^2).$$

Položíme-li

$$kx(d^2 - x^2) = kx_1(d^2 - x_1^2),$$

jest $$d^2(x - x_1) - (x^3 - x_1^3) = 0$$

čili $$(x - x_1)\,[d^2 - (x^2 + xx_1 + x_1^2)] = 0,$$

proto $$d^2 = x^2 + xx_1 + x_1^2.$$

Je-li $x = x_1 = \xi$, jest:

$$d^2 = 3\xi^2, \text{ tedy } \xi = x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

a tím $\eta = y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Pročež

$$x : y = \frac{d}{\sqrt{3}} : \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 : \sqrt{2}.$$

Spustí-li se s vrcholu pravoúhlého trojúhelníka ABC kolmice na podstavu (BE $\perp$ AC), jest

$$x^2 = d \cdot \mathrm{CE}, \quad y^2 = d \cdot \mathrm{AC},$$

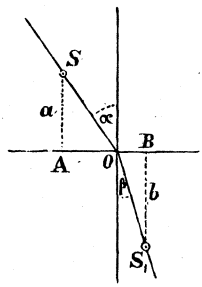
proto

$$x^2 : y^2 = \mathrm{CE} : \mathrm{AC} \text{ čili } x : y = \sqrt{\mathrm{CE}} : \sqrt{\mathrm{AC}},$$

a jelikož též

$x : y = 1 : \sqrt{2}$, jest $1 : \sqrt{2} = \sqrt{\mathrm{CE}} : \sqrt{\mathrm{AC}}$, t. j. $1 : 2 = \mathrm{CE} : \mathrm{CA}$ a proto AC $= 3$, z čehož plyne známá konstrukce: aby se u trámce největší pevnosti v lomu docílilo a dřevo nejlépe se zužitkovalo, rozděluje se průměr AC ve tři stejné dílce AF=FE=EC a v bodech E a F sestrojí se kolmice v směrech protivných FD a EB; spojí-li se pak body A, B, C a D, vznikne průřez trámce.

5. Z prostředí, v němž rychlost šíření se světla jest $c_1$, postupuje světlo s bodu S ku bodu $S_1$ ležícímu v prostředí jiném; je-li rychlost světla v druhém prostředí $c_2$, dle kterého zákona řídí se postup světla, má-li dráha v nejkratší době býti vykonána?




Obr. 6.

Jsou-li dráhy $OS = s_1$ a $OS_1 = s_2$ (obr. 6.) a doby ku proběhnutí jich potřebné $t_1$ a $t_2$, jest $t_1 = \frac{s_1}{c_1}$ a $t_2 = \frac{s_2}{c_2}$, tedy doba $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$, kteráž má býti nejmenší.

Spustí-li se s bodů S a $S_1$ kolmice na rozhraní obou prostředí a je-li $SA = a$, $S_1B = b$ a mimo to $AB = d$ a $OA = x$,

jest $s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$, $s_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$,

proto $t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$.

Položíme-li

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2+x_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x_1)^2}}{c_2},$$

jest

$$\frac{1}{c_1}.[\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2+x_1^2}] = \frac{1}{c_2}[\sqrt{b^2+(d-x_1)^2}\sqrt{b^2+(d-x)^2}]$$

a násobíme-li a dělíme-li současně rozdíl oněch veličin kořenových i v pravém i v levém dílu rovnice se součtem jich, obdržíme

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x^2-x_1^2}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+x_1^2}}=\frac{1}{c_2}\cdot\frac{2d(x-x_1)-(x^2-x_1^2)}{\sqrt{b^2+(d-x_1)^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}};$$

dělením činitelem $x-x_1$ obdržíme

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x+x_1}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+x_1^2}}=\frac{1}{c_2}\cdot\frac{2d-(x+x_1)}{\sqrt{b^2+(d-x_1)^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Je-li $x=x_1=\xi$,

jest $$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}}=\frac{1}{c_2}\cdot\frac{d-\xi}{\sqrt{b^2+(d-\xi)^2}}$$

čili $$\frac{\xi}{c_1 s_1}=\frac{d-\xi}{c_2 s_2}$$

aneb $$c_1:c_2=\frac{\xi}{s_1}:\frac{d-\xi}{s_2}$$

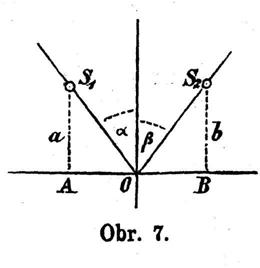
a jelikož $$\frac{\xi}{s_1}=\sin\alpha,\quad \frac{d-\xi}{s_2}=\sin\beta,$$

jest $$c_1:c_2=\sin\alpha:\sin\beta,$$

t. j. $$\frac{c_1}{c_2}=n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

aby v nejkratší době dráha $SOS_1$ byla vykonána, musí poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu býti roven poměru rychlostí v prvém i v druhém prostředí, tedy veličinou stálou — známý zákon lomu.

6. Dle kterého zákona šíří se světlo v témž prostředí s bodu $S_1$ do bodu $S_2$, má-li dráha býti vykonána v nejkratší době?




Obr. 7.

Buďtež dráhy: $OS_1 = s_1$ a $OS_2 = s_2$ (obr. 7.) a rychlost světla $c$. Z bodu $S_1$ dospěje světlo do O v době $t_1$ a z bodu O do $S_2$ v době $t_2$, tím jest

$$t_1 = \frac{s_1}{c}, \quad t_2 = \frac{s_2}{c}$$

a proto $$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1 + s_2}{c}.$$

Je-li $AS_1 = a$, $BS_2 = b$, $AB = d$ a $OA = x$,

jest $$s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad s_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2},$$

proto $$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c};$$

doba ta má býti nejmenší.

Položíme-li

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} = \sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{b^2 + (d - x_1)^2},$$

jest

$$\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x_1^2} = \sqrt{b^2 + (d - x_1)^2} - \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Znásobíme-li a dělíme-li současně výrazy kořenové součtem jich, jest

$$\frac{x^2 - x_1^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + x_1^2}} = \frac{2d(x - x_1) - (x^2 - x_1^2)}{\sqrt{b_2 + (d - x_1)^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

a dělíme-li činitelem $x - x_1$

$$\frac{x + x_1}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + x_1^2}} = \frac{2d - (x + x_1)}{\sqrt{b^2 + (d - x_1)^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Je-li $x = x_1 = \xi$,

jest $$\frac{\xi}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} = \frac{d - \xi}{\sqrt{b^2 + (d - \xi)^2}},$$

t. j. $$\frac{\xi}{s_1} = \frac{d - \xi}{s_2};$$

jelikož však $$\frac{\xi}{s_1} = \sin\alpha, \quad \frac{d - \xi}{s_2} = \sin\beta,$$

bude $$\sin\alpha = \sin\beta \text{ a proto } \alpha = \beta,$$

t. j. světlo dospěje s bodu $S_1$ do $S_2$ v témž prostředí ležícího v době nejkratší, svírá-li paprsek na rozhraní dopadající s kolmicí dopadu týž úhel jako paprsek odražený — známý zákon odrazu.

7. Jak dlužno spojiti $n$ článků galvanických vespolek, aby docíleno bylo při známém vnějším odporu $\omega$ největší intensity proudu?

Je-li elektrobudící síla jednoho každého z daných $n$ článků E a odpor O a $x$ počet článků, jež třeba spojiti vedle sebe v jediný článek veliký, jest $\frac{n}{x}$ počet nových článků, které spojeny býti musí za sebou.

Poněvadž odpor daného článku O, jest odpor nového článku $\frac{O}{x}$ a proto síla batterie

$$S = \frac{\frac{n}{x} . E}{\frac{n}{x} . \frac{O}{x} + \omega} = \frac{nE}{\frac{nO}{x} + \omega x}.$$

Má-li býti S největší, položí se

$$\frac{nE}{\frac{nO}{x} + \omega x} = \frac{nE}{\frac{nO}{x_1} + \omega x_1}.$$

Z rovnice té plyne:

$$\frac{nO}{x} + \omega x = \frac{nO}{x_1} + \omega x$$

aneb $$\omega(x - x_1) = nO\left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right] = nO\,\frac{x - x_1}{xx_1}.$$

Dělíme-li rovnici tuto činitelem $x - x_1$, jest

$$\omega = \frac{nO}{xx_1},$$

a položíme-li $x = x_1 = \xi$, bude $\omega = \frac{nO}{\xi^2}$, t. j. má-li býti síla proudu největší, musí odpor mimo batterii býti roven odporu v batterii. Intensita batterie jest pak, jelikož $x = \xi = \sqrt{\frac{nO}{\omega}}$,

$$S = \frac{nE}{\frac{nO}{\sqrt{\frac{nO}{\omega}}} + \omega\sqrt{\frac{nO}{\omega}}} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{n}{O\omega}}.$$

Příklady zde uvedenými jest s dostatek návod Schellbachův vyložen a odůvodněna i jeho jednoduchosť i jeho všestranné užití. Žeť však často pouhou úvahou (geometrickou) lze rozhodovati o největší neb nejmenší hodnotě funkce, netřeba vykládati — tak jest nejkratší vzdálenosť dvou bodů přímka body tyto spojící, průměr kruhu jest jeho největší tětivou, nejmenší mezi všemi přímkami, které s daného bodu lze vésti ku dané přímce, jest kolmá s bodu daného na přímku spuštěná, mezi všemi trojúhelníky, které mají za podstavu velikou osu ellipsy a vrcholy své na obvodě této, jest největší onen, jehož výškou jest malá osa ellipsy a t. d.

---

# Drobné zprávy.

## I.

Napsal

**A. Strnad,**

professor v Hradci Králové.

**Paradoxní výraz pro číslo Ludolfovo.** Vyvineme-li $(1-1)^n$ dle věty binomické, obdržíme

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots;$$

pravé straně této rovnice lze postupným vyjímáním společného činitele dáti podobu součinu, tak že

$$(1-1)^n = \frac{1-n}{1}\,.\,\frac{2-n}{2}\,.\,\frac{3-n}{3}\,.\,\frac{4-n}{4}\ldots$$

Jelikož jest pak

$$(1-1)^{-n} = \frac{1+n}{1}\,.\,\frac{2+n}{2}\,.\,\frac{3+n}{3}\,.\,\frac{4+n}{4}\ldots,$$