Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, D434--D443

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122661`

LITERATURA

A. Recense vědeckých publikací.

А. И. Мальцев: **Основы линейной алгебры.** (*A. J. Malcev*: **Úvod do lineární algebry.**) Moskva-Leningrad, 1948, OGIZ, stran 424, cena 17,50 r.

Jak čteme v předmluvě, vznikla tato kniha z přednášek, které měl autor na Ivanovském státním pedagogickém ústavě. Má býti pomůckou při studiu lineární algebry jak pro pedagogické ústavy, tak pro university. Podnět k jejímu sepsání vyšel od známého algebraika prof. *Kuroše*. Kniha je psána velice srozumitelně a přesně. Je vzornou učebnicí. Na čtenáři požaduje pouze znalost základních poznatků z theorie determinantů a soustav lineárních rovnic. Text je provázen příklady objasňujícími probranou látku. Na konci jednotlivých paragrafů jsou připojeny příklady a úlohy ke cvičení.

Rozsahem lze knihu rozděliti na dvě poloviny. V první, jež zahrnuje kapitoly I—VI, zabývá se autor lineárním prostorem nad číselným tělesem, studuje jeho lineární transformace a provádí jejich klasifikaci. Druhá polovina (kapitoly VII až X) je věnována lineárním prostorům metrickým a jejich lineárním transformacím.

Kapitola I má úvodní ráz. Obsahuje několik poznámek o číselných tělesech a mnohočlenech jedné neurčité nad tělesem K, jakož i základní poznatky z maticového počtu, potřebné ke čtení knihy. Mimo jiné je zde definována podobnost matic a charakteristický a minimální polynom matice. Tyto pojmy poslouží v kapitole IV ke klasifikaci lineárních transformací.

Kapitola II začíná axiomatickou definicí lineárního (nebo také vektorového) prostoru nad tělesem koeficientů K. Následují nejjednodušší důsledky axiomů, z nichž nejdůležitější jsou existence nulového a inversního vektoru. Odtud je krok k pojmům lineární závislosti, nezávislosti a kombinace vektorů, na nichž spočívá pojem base množiny, která je částí prostoru. Z vět rozváděj͏ících tyto pojmy mají základní důležitost tvrzení, že každý nenulový lineární prostor obsahuje alespoň jednu basi, a věta o jednoznačném vyjádření libovolného vektoru prostoru jako lineární kombinaci jeho base. V dalším je celá kniha věnována studiu lineárních prostorů o konečném počtu rozměrů, t. j. takových, které mají konečnou basi. Několik vět podává geometrický výklad rozměru. Tvrzení, že lineární prostor při daném tělese koeficientů K je svým rozměrem n určen jednoznačně až na isomorfismus, dovoluje omeziti se na t. zv. prostor řádků délky n nad K, t. j. množina matic typu $(1, n)$ s prvky z K. Poslední paragrafy kapitoly pojednávají o zadání vektoru pomocí čísel, o soustavě souřadnic v lineárním prostoru a jejich transformaci, o lineárních podprostorech lineárního prostoru a jejich tak zvaném přímém součtu.

Obsahem kapitoly III jsou lineární transformace. Po obecné definici transformace množiny a pojmech a důsledcích s ní bezprostředně souvisejících je zaveden pojem lineární transformace lineárního prostoru a odvozen vztah, charakterisující tuto transformaci. Dále je ukázáno, že lze vzájemně jednoznačně přiřadit lineární transformace n-rozměrného lineárního prostoru nad K, je-li v tomto zvolena soustava souřadnic, a n-řadové matice nad K. Přicházíme tak k pojmu matice lineární transformace v dané soustavě souřadnic. Následuje důležitá formule, podle níž se mění matice dané lineární transformace, měníme-li v prostoru soustavu souřadnic. Další paragraf pojednává o třech operacích s lineárními transformacemi: o násobení a sčítání lineárních transformací a o násobení lineární transformace číslem. Na základě těchto operací je definován mnohočlen v lineární transformaci $f(\boldsymbol{A})$. Kapitola je zakončena paragrafem o hodnosti a defektu lineární transformace, podávajícím geometrický výklad vlastností lineárních transformací a pohled do stavby lineárního prostoru. Předně je dokázána věta, že obraz i vzor lineárního podprostoru prostoru $\mathfrak{L}$ při jeho libovolné lineární transformaci je opět lineární podprostor v $\mathfrak{L}$. Vzor nulového podprostoru v $\mathfrak{L}$ při $\boldsymbol{A}$ je nazván jádrem lineární transformace $\boldsymbol{A}$, obraz celého prostoru $\mathfrak{L}$ při $\boldsymbol{A}$ oborem hodnot transformace $\boldsymbol{A}$. Defektem resp. hodností lineární transformace je pak pojmenován rozměr jejího jádra resp. oboru hodnot. O nich je dokázána věta: Součet hodnosti a defektu lineární transformace je roven rozměru prostoru. Dále jsou uvedeny nutné a dostačující podmínky pro regulárnost lineární transformace a pro isomorfismus lineárních transformací a ukázána jednoduchá souvislost defektu a hodnosti lineární transformace s defektem a hodností matice té transformace.

Kapitola IV je nadepsána „normální *Jordanova* forma". Je v ní ukázáno, jak vhodnou volbou soustavy souřadnic lze dosáhnouti co nejjednoduššího tvaru matice dané lineární transformace. Nové pojmy zde se vyskytující jsou: invariantní podprostor při lineární transformaci, nilpotentní transformace, cyklický podprostor, kořenový podprostor a jiné. Lineární prostor se rozloží v přímý součet podprostorů $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ invariantních při lineární transformaci $\boldsymbol{A}$. (Existence takového rozkladu komplexního prostoru je přesně dokázána.) Za jeho basi se zvolí souhrn basí jednotlivých podprostorů. V takovéto soustavě souřadnic má matice transformace $\boldsymbol{A}$ tvar matice diagonální, jejíž prvky jsou čtverečné matice. Transformace $\boldsymbol{A}_i$ indukované v $\mathfrak{A}_i$ transformací $\boldsymbol{A}$ lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{A}_i = \varrho_i \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{C}_i$, kde ϱ_i jsou vlastní hodnoty transformace $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}_i$ jsou transformace jednotkové a $\boldsymbol{C}_i$ jsou transformace nilpotentní. Na základě věty o nilpotentních transformacích lze matici $\boldsymbol{A}_i$ dát tvar matice *Jordanovy* s vlastní hodnotou ϱ_i a tím matici transformace $\boldsymbol{A}$ uvésti na t. zv. normální *Jordanovu* formu.

V kapitole V studují se předně λ-matice, k nimž vedl pojem charakteristické matice, zavedený dříve. Na základě elementárních transformací λ-matic je zaveden pojem ekvivalence λ-matic, vedoucí k třídám ekvivalentních λ-matic. Následuje důkaz věty, že každá tato třída obsahuje právě jednu t. zv. normální diagonální matici. S ní souvisí invariantní činitelé a elementární dělitelé λ-matice. Pomocí takto získaných výsledků jsou nalezeny nutné a dostačující podmínky pro isomorfismus lineárních transformací komplexního lineárního prostoru a pro podobnost matic nad tělesem komplexních čísel, a dokázána jednoznačnost *Jordanovy* matice libovolné lineární transformace komplexního prostoru a současně ukázán vhodný způsob vyčíslení této matice. Je tím v podstatě rozřešena úloha klasifikace lineárních transformací komplexního vektorového prostoru. Obdobným úvahám nad libovolným číselným tělesem je věnován poslední, petitem psaný paragraf.

Kapitola VI je dosti speciální. Pojednává o maticových funkcích, o komutativních maticích a o komposici matic.

Kapitolou VII opouští autor ryze afinní theorii. Zavedením nové operace — skalárního součinu — doplní lineární prostor nad K na prostor, v němž lze zavésti metriku. Pod tělesem K rozumí se pak prakticky buďto těleso všech komplexních čísel (prostory unitární) anebo těleso všech reálných čísel (prostory *Euklidovy*). Po zavedení délky vektoru, vektoru normovaného a orthogonálních vektorů jsou uvedeny některé geometrické vlastnosti unitárního prostoru. Jednu z nejdůležitějších obsahuje věta, že v každém unitárním prostoru existuje orthonormovaná base. Následují vlastnosti orthonormovaných soustav souřadnic (o. s. s.). Zvláště jednoduše lze v o. s. s. vyjádřit hodnotu skalárního součinu. Věta o isomorfismu pro unitární prostory souhlasí s obdobnou větou pro prostory lineární. Definice orthogonálního doplňku dané množiny poslouží ke klasifikaci lineárních transformací.

Pojem orthogonálního průmětu vektoru na lineární podprostor vede k vyšetření dalších geometrických vlastností unitárního prostoru.

Další paragraf je věnován lineárním a bilineárním funkcionálům definovaným na lineárním prostoru $\mathfrak{L}$ nad K. Hlavní výsledky jsou obsaženy ve větách: Každou lineární funkci $f(x)$ lze vyjádřit ve tvaru skalárního součinu (x, a). Množina všech lineárních funkcí tvoří t. zv. sdružený lineární prostor $\mathfrak{L}'$ antiisomorfní s $\mathfrak{L}$. Lineární funkcionál umožní definovat novou operaci s lineárními transformacemi: přechod k sdružené transformaci $\boldsymbol{A}^*$ lineární transformace $\boldsymbol{A}$. Pro prostor unitární je definován bilineární funkcionál *Hermitův.* Mezi těmito funkcionály a lineárními transformacemi je ukázána vzájemně jednoznačná korespondence; vyšetřování bilineárních funkcionálů je tím převedeno na studium lineárních transformací. Současně je ukázáno, jak lze bilineární funkcionál zadat pomocí matice. Speciálním případem bilineárního funkcionálu je samotný skalární součin.

Na konci kapitoly je pojednáno o unitárních transformacích. Jsou to lineární transformace zachovávající hodnotu skalárního součinu, tedy automorfismy unitárního prostoru. V o. s. s. jsou charakterisovány unitárními maticemi. Je ukázáno, jak lze matici unitární transformace uvésti na normální tvar, a to zvlášť pro unitární prostory a zvlášť pro *Euklidovy* prostory (zde se potom mluví o orthogonálních transformacích).

Pro aplikace jsou důležité souměrné a polosouměrné transformace. Jejich vlastnosti jsou odvozeny na počátku kapitoly VIII. Jejich matice je v komplexním unitárním prostoru uvedena na diagonální tvar. Vzhledem ke korespondenci mezi bilineárními funkcionály a lineárními transformacemi existují t. zv. souměrné a polosouměrné funkcionály, odpovídající souměrným a polosouměrným transformacím. Dále je ukázána (1,1) korespondence mezi souměrnými bilineárními a reálnými kvadratickými funkcionály a souvislost funkcionálů s formami. Pozornost je věnována nezápornému kvadratickému funkcionálu, spec. kladně definitnímu. Lineární transformace, odpovídající jeho polárnímu funkcionálu, je nazvána nezápornou, spec. kladně definitní. O důležitosti transformací unitárních, souměrných a polosouměrných svědčí paragraf nadepsaný „rozklad obecných transformací". Poslední paragraf pojednává o normálních transformacích unitárního prostoru (komutativních se svými sdruženými). Jejich vlastnosti dovolují obecnější pohled na vztahy mezi transformacemi unitárními, souměrnými a polosouměrnými.

V posledních dvou kapitolách (IX a X) se vyšetřují bilineárně metrické prostory a jejich lineární transformace. Jde v podstatě o zobecnění kapitoly VII a VIII. Autor definuje axiomaticky obyčejný bilineárně metrický prostor a *Hermitův* bilineárně metrický prostor, a v dalším studuje je souběžně. Je dokázáno, že bilineární metriku lze zavést v lineárním prostoru $\mathfrak{L}$ nad K volbou bilineárního funkcionálu nebo bilineární formy. Tyto lze pak zadat maticí. Poněkud podrobněji je podána theorie kvadratických forem a jejich dvojic, a to ryze geometricky. Hlavní pozornost je věnována t. zv. bilineárně metrickým prostorům základních typů. Pro ně je požadováno, aby K bylo buďto těleso všech komplexních anebo všech reálných čísel, aby prostor byl regulární (defekt rovný nule), a aby metrika byla souměrná nebo polosouměrná. Kombinace těchto podmínek vede k rozdělení prostorů bilineárně metrických na komplexní *Euklidovy*, pseudounitární, pseudoeuklidovy a simplektické. O lineárních transformacích těchto prostorů pojednává kapitola X. Podrobněji jsou rozebrány nejjednodušší tvary, k nimž lze uvésti matice souměrných, polosouměrných a isometrických transformací. *Miloš Jasný.*

C. L. Siegel: **Transcendental numbers.** (Annals of Mathematics Studies 16, Princeton University Press, 1949; str. VIII + 102, cena 2 dolary.)

Číslo α nazýváme algebraickým číslem, jestliže existuje přirozené číslo n a racionální čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že jest

$$\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0.$$

Číslo, které není algebraické, nazýváme transcendentním. Od doby *Cantorovy* víme, že transcendentních čísel je „mnohem více" než algebraických: množina transcendentních čísel je nespočetná, množina algebraických čísel je spočetná. Ale již před *Cantorem* byla známa existence transcendentních čísel. *Liouville* dokázal, že každé reálné iracionální číslo, které lze „velmi dobře" aproximovati racionálními čísly, je transcendentní. A takováto čísla lze snadno konstruovati. Je-li na př. $k_1, k_2, \ldots$ posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = +\infty$, je číslo

$$10^{-k_1} + 10^{-k_2} + 10^{-k_3} + \ldots$$

transcendentní. Tedy *konstrukce* transcendentních čísel nepůsobí obtíží. Ale situace je zcela jiná, mám-li o *daném* čísle (na př. o čísle e, π, π^e a pod.) rozhodnouti, je-li transcendentní. Zde první velký úspěch zaznamenal *Hermite*, který r. 1873 dokázal, že číslo e je transcendentní. Po něm *Lindemann* r. 1882 dokázal transcendentnost čísla π, a tím rozřešil prastarý problém kvadratury kruhu. Vyjdeme-li totiž ze dvou bodů, majících vzdálenost rovnou jedné, a sestrojujeme-li z nich nové body t. zv. euklidovskými konstrukcemi (říkává se též „pravítkem a kružítkem"), jsou vzájemné vzdálenosti takto konstruovaných bodů vesměs rovny algebraickým číslům, jak se velmi snadno dokáže. Nemohou se tedy (podle *Lindemannovy* věty) mezi nimi vyskytnouti dva body o vzdálenosti π.

Od doby *Hermiteovy* a *Lindemannovy* bylo dosaženo významných pokroků v těchto otázkách, ale přes to problém rozhodnutí o transcendentnosti předem daného čísla zůstal problémem svrchovaně obtížným, který byl rozřešen jenom v několika speciálních případech. O nejdůležitějších z nich pojednává právě knížka *Siegelova,* který sám je jedním z nejúspěšnějších pracovníků na tomto poli. Knížka se skládá ze čtyř kapitol, jejichž obsah stručně vyložím.

Kapitola I. Po úvodních paragrafech, zabývajících se iracionalitou (nikoliv ještě transcendentností) čísel π, e^a, tg$a$ (pro racionální $a \neq 0$) přistupuje autor k problému transcendentnosti hodnot e^a, který vrcholí v této větě Weierstrass-Lindemannově: Buďte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ algebraická čísla,[1] mezi nimiž neplatí žádná rovnice $a_1g_1 + a_2g_2 + \ldots + a_mg_m = 0$ s racionálními koeficienty $g_1, \ldots, g_m$, vyjma triviální případ $g_1 = g_2 = \ldots = g_m = 0$. Potom čísla $e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_m}$ jsou algebraicky nezávislá. To značí: Je-li $P(y_1, \ldots, y_m)$ polynom s algebraickými koeficienty a je-li $P(e^{a_1}, \ldots, e^{a_m}) = 0$, potom polynom $P(y_1, \ldots, y_m)$ je nutně identicky roven nule, t. j. všechny jeho koeficienty jsou rovny nule. Odtud plyne speciálně dále: *Je-li $a \neq 0$ algebraické číslo, je e^a transcendentní* (neboť je-li nějaký polynom $P(y)$ s algebraickými koeficienty roven nule pro $y = e^a$, musí býti všechny koeficienty polynomu P rovny nule). Odtud speciálně plyne, že e je transcendentní, ale také, že *π je trancendentní*; neboť kdyby π bylo algebraické, bylo by též $2\pi i$ algebraické a tedy by $e^{2\pi i}$ bylo transcendentní; ale to není pravda, neboť $e^{2\pi i} = 1$.

Kapitola II obsahuje některé výsledky Siegelovy, týkající se integrálů lineárních diferenciálních rovnic. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$$

nazývá Siegel funkcí typu E, jestliže platí:

1. Všechna c_n leží v jistém algebraickém tělese konečného stupně (nad tělesem racionálních čísel).

2. Pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot n^{-n\varepsilon} = 0,$$

a táž rovnice platí i tehdy, nahradím-li c_n kterýmkoliv číslem konjugovaným.

---

[1]) Ani zde ani v dalším se neomezuji na reálná čísla.

3. Pro každé n existuje ovšem přirozené číslo q_n tak, že čísla $c_0 q_n$, $c_1 q_n$, $c_2 q_n$, ..., $c_n q_n$ jsou vesměs celá algebraická čísla. Předpokládáme pak toto: Volím-li q_n co nejmenší, potom pro každé $\varepsilon > 0$ jest

$$\lim_{n \to \infty} q_n \cdot n^{-n\varepsilon} = 0.$$

O funkcích typu E dokazuje pak Siegel takovouto větu: Buďte $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ funkce typu E, které vyhovují systému diferenciálních rovnic

$$y_k' = \sum_{l=1}^{m} Q_{kl}(x)\, y_l \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

kde Q_{kl} jsou racionální funkce s algebraickými koeficienty; při tom předpokládejme, že systém (1) splňuje jistou „podmínku normality" (kterou zde pro její složitost nemohu vypisovati). Potom platí: Je-li α libovolné algebraické číslo, různé od nuly a od pólů racionálních funkcí Q_{kl}, potom čísla $y_1(\alpha)$, $y_2(\alpha)$, ..., $y_m(\alpha)$ jsou algebraicky nezávislá (ve smyslu kap. I).

Význam této věty spočívá v tom, že *aritmetická* otázka algebraické nezávislost se převádí na úlohu verifikovati podmínku normality, což je úloha čistě *analytická* (funkčně theoretická). Ale verifikace této podmínky je často úloha velmi obtížná; proto *Siegel* uvádí jen jednu aplikaci: Budiž λ racionální číslo, které není ani polovinou lichého čísla ani celé záporné. Budiž $J_\lambda(x)$ známá *Besselova* funkce 1. druhu s indexem λ, a definujme funkci $K_\lambda(x)$ rovnicí

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \left(\tfrac{1}{2}x\right)^\lambda K_\lambda(x).$$

Budiž $\alpha \neq 0$ algebraické číslo; potom čísla $K_\lambda(\alpha)$, $K'_\lambda(\alpha)$ jsou algebraicky nezávislá. Speciálně tedy: nemůže býti $K_\lambda(\alpha) = 0$, t. j. všechny od nuly různé kořeny funkce J_λ jsou transcendentní čísla.

Kapitola III. Budiž $a \neq 0$ algebraické číslo. Je-li b racionální, jest ovšem a^b rovněž algebraické. Ale jak je tomu pro iracionální algebraické b? Tento problém považoval na př. *Hilbert* za nesmírně obtížný a předpovídal, že dlouho zůstane neřešen. Avšak již v r. 1929 rozřešil částečně tento problém sovětský matematik *Gelfond*, a to pro případ, že b je imaginární kvadratická iracionalita, a *Kuzmin* přenesl jeho důkaz na reálné kvadratické iracionality. V r. 1934 pak *Gelfond* a *Siegelův* žák *Schneider* skoro současně rozřešili problém v plné obecnosti. Symbol a^b definujeme ovšem pomocí exponenciální funkce rovnicí $a^b = e^{b \log a}$. Pro iracionální b je ovšem tento symbol následkem mnohoznačnosti logaritmu nekonečně mnohoznačný. A věta *Gelfond-Schneiderova* praví: *Jestliže $a \neq 0$ je číslo algebraické, b iracionální algebraické, $\log a \neq 0$, potom $e^{b \log a}$ je číslo transcendentní* (tedy dokonce i čísla $1^b = e^{b \cdot 2k\pi i}$ — pro celé k — jsou vesměs transcendentní s výjimkou hodnoty $k = 0$). Příklady: 1. Dekadické logaritmy přirozených čísel jsou vesměs transcendentní čísla, až na logaritmy čísel 1, 10, 10^2, ... 2. Číslo e^π je transcendentní; neboť kdyby bylo algebraické, bylo by číslo $e^{\pi i} = -1$ transcendentní.

Siegel uvádí oba důkazy, *Gelfondův* i *Schneiderův*.

Kapitola IV. Poslední kapitola knihy je věnována *Schneiderovým* větám o eliptických integrálech. Buďte dána čísla g_2, g_3 taková, že $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$; definujme funkci $y = y(x) = \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$. Vyšetřujme integrál

$$J = \int_a^b \frac{\lambda + \mu x}{y}\, dx,$$

kde λ, μ jsou dvě konstanty; a, b jsou komplexní čísla, a integrál se počítá podél libovolné křivky L v komplexní rovině s krajními body a, b (J ovšem závisí na L).

Potom platí: *Jsou-li* $\lambda, \mu, g_2, g_3, a, b$ *algebraická,* $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, *potom je* J *transcendentní číslo* — s výjimkou některých triviálních případů, jež lze snadno udati. *Schneider* dokazuje tuto větu nikoliv přímo, nýbrž pro *Weierstrassovy* eliptické funkce $\wp(z)$, $\zeta(z)$ (při tom $\wp$ je funkce inversní k integrálu 1. druhu: Je-li $z = \int\limits_x^\infty \frac{dx}{y}$, definuji $\wp(z) = x$); potom má věta tento tvar: *Jsou-li* λ, μ, g_2, g_3 *algebraická čísla,* $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, *a je-li* z *komplexní číslo, potom není možno, aby obě čísla* $\wp(z)$, $\lambda z + \mu\,\zeta(z)$ *byla současně algebraická.* Zajímavý je tento speciální případ:

Jsou-li a, b dvě různá kladná algebraická čísla, potom obvod elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je transcendentní číslo (srovnej s transcendentností čísla π).

Siegel uvádí v této kapitole bez důkazu ještě některé jiné zajímavé výsledky *Schneiderovy* o eliptických a *Abelových* integrálech.

Methody uvedených čtyř kapitol se navzájem podstatně liší, přece však obsahují společný základ, který se pokusím naznačiti na příkladě funkce e^x. Budiž $a \neq 0$ algebraické reálné číslo; máme dokázati, že e^a je transcendentní. Předpokládejme tedy, že e^a je algebraické, takže čísla a, e^a jsou obsažena v jistém algebraickém tělese K konečného stupně h; z toho se snažíme odvoditi spor. Je-li ξ libovolné algebraické číslo z K, značíme $N(\xi)$ jeho *normu* v K, t. j. součin všech konjugovaných čísel $\xi^{(1)}\xi^{(2)} \ldots \xi^{(h)}$. Víme, že platí toto: Je-li $\xi \in K$ celé algebraické číslo různé od nuly, je $|N(\xi)|$ přirozené číslo. Odvodím-li tedy z našich předpokladů existenci celého algebraického čísla $\xi \in K$ takového, že $\xi \neq 0$, $|N(\xi)| < 1$, bude tím hledaný spor odvozen. K tomu cíli zvolím přirozené číslo n (jež později poroste nade všechny meze), vezmu $h + 1$ polynomů $P_0(x), \ldots, P_h(x)$ stupně $\leq n$ (zatím s neurčitými koeficienty) a sestrojím funkci

$$R(x) = P_0(x) + P_1(x)\,e^{ax} + \ldots + P_h(x)\,e^{hax}. \tag{2}$$

Polynomy $P_0, \ldots, P_h$ mají celkem $M + 1 = (h + 1)(n + 1)$ koeficientů; $R(x)$ je mocninná řada, a my se pokusíme zvoliti koeficienty polynomů P_j tak, aby $R(x)$ mělo v bodě $x = 0$ nulový bod aspoň M-tého řádu, t. j.

$$R(x) = c\,\frac{x^M}{M!} + \ldots; \tag{3}$$

při tom ovšem vylučujeme triviální případ, že by všechny koeficienty všech P_j byly rovny nule. Tak dostáváme z (2) celkem M homogenních lineárních rovnic pro $M + 1$ koeficientů polynomů P_j, takže netriviální řešení vskutku existuje. Toto řešení se dá explicitně stanoviti a zjistí se, že ke každé hodnotě $c \neq 0$ v (3) existuje právě jedno. Volme $c = 1$; potom se zjistí pro $x = 1$ toto (znaky $c_1, c_2, \ldots$ značí kladná čísla, nezávislá na n):

$$|R(1)| < \frac{c_1}{(n!)^{h+1}}. \tag{4}$$

$P_j(1)$ jsou čísla v K, a existuje přirozené číslo

$$T < c_2^n n! \tag{5}$$

tak, že všechna čísla $TP_j(1)\,e^{ja}$ $(j = 0, 1, \ldots, h)$ jsou celá algebraická čísla. Tedy také $TR(1)$ je celé algebraické číslo.

$$|P_j(1)| < c_3^n, \tag{6}$$

a týž odhad platí i pro všechna konjugovaná čísla.

Z (6) plyne ihned toto: Všechna čísla

$$(R(1))^{(1)}, \ldots, (R(1))^{(h)}, \tag{7}$$

konjugovaná k $R(1)$, vyhovují nerovnosti

$$|(R(1))^{(k)}| < c_4^n. \tag{8}$$

Odhadněme nyní normu celého čísla $TR(1)$:

$$N(TR(1)) = T^h(R(1))^{(1)} \dots (R(1))^{(h)}. \tag{9}$$

Jedno z čísel (7) je právě číslo $R(1)$; toto číslo odhadneme podle (4); ostatní čísla z (7) odhadneme podle (8), takže z (9) a z (5) plyne

$$|N(TR(1))| < T^h \cdot \frac{c_1}{(n!)^{h+1}} \cdot c_4^{(h-1)n} < \frac{c_5^n}{n!} \tag{10}$$

(uvažme, že h nezávisí na n). Ale číslo n můžeme voliti libovolně. Pravá strana v (10) má pro $n \to \infty$ limitu nulu. Při vhodné volbě čísla n dostáváme proto z (10), že

$$|N(TR(1))| < 1.$$

(T, $R(1)$ ovšem závisí na n, ale to nám nevadí.) Z explicitní formule pro $R(x)$ však snadno odvodíme $R(1) \neq 0$, a tím dostáváme hledaný spor, neboť $TR(1) \neq 0$ je celé algebraické číslo, takže

$$|N(TR(1))| \geqq 1.$$

Vidíte základní ideu: Hledáme celé algebraické číslo γ (zde to bylo číslo $TR(1)$) tak, aby $|\gamma|$ bylo velmi malé, a aby $|\gamma^{(k)}|$ (absolutní hodnoty konjugovaných čísel) nebyly příliš velké, takže vyjde $|N(\gamma)| < 1$; jestliže zvolíme γ současně tak, že $\gamma \neq 0$ (a v této podmínce spočívají specifické zvláštnosti a obtíže jednotlivých problémů), je tím hledaný spor nalezen.

Knížka *Siegelova* je psána velmi jasně a přesně; důkazy jsou úplně provedeny. Její studium vyžaduje však značného soustředění, což je pochopitelno při obtížnosti problémů a bohatství látky, umístěné na malém počtu stránek. Nejobtížnější je kap. II, kde komplikovaný důkaz hlavní věty se táhne přes více než 20 stránek. Následující kap. III překvapí svou jednoduchostí; hlavně studium *Gelfondova* důkazu působí na tomto místě jako příjemná rekreace.

Speciálních znalostí kniha nevyžaduje. Vedle nejprimitivnějších znalostí z theorie analytických funkcí stačí nejjednodušší věty o algebraických tělesech; pouze v kap. IV je nutno znáti první počátky theorie *Weierstrassových* eliptických funkcí $\wp$ a ζ.

V. Jarník.

Bohumil Bydžovský: **Úvod do algebraické geometrie.** (Vydala Jednota československých matematiků a fysiků r. 1948 v Praze, stran 668, cena 320,— Kčs.)

Autor podává veřejnosti ve 20 kapitolách shora citovaného díla pohled na algebraickou geometrii v jasné a dokonalé formě i logické výstavbě a to hlavně pokud se týká algebraických rovinných křivek. Co se týče algebraických ploch a prostorových křivek, šlo mu spíše o vysvětlení nejzákladnějších pojmů. Pro studium spisu se předpokládá znalost lineární algebry (částečná znalost theorie matic) a podrobnější znalosti z elementární analytické geometrie.

Kapitola I uvádí čtenáře k úvahám vícedimensionální geometrie stručnou rekapitulací vědomostí o homogenních souřadnicích, vysvětluje co nazýváme bodem (reálným i imaginárním) a co jeho souřadnicemi, definuje totožnost a různost dvou bodů, jakož i pojem soustavy bodů lineárně závislých i nezávislých. Vysvětluje pojem lineární prostor (včetně jeho charakteristického čísla), dotýká se pojmu incidence dvou prostorů a osvětluje pojem nadroviny. V dalším seznamuje se souřadnicovým simplexem, jeho vzájemně protilehlými prvky a jednotkovým bodem; po zavedení souřadnicové soustavy přistupuje k transformaci souřadnic regulární lineární transformací a k definici souřadnic v lineárních podprostorech prostoru m-rozměrného. Speciálně používá zavedených pojmů k definici projektivních souřadnic bodů přímé řady a dvojpoměru.

V kapitole II se jedná o nadrovině; odvozuje se tam rovnice nadroviny určené skupinou lineárně nezávislých bodů. Je vymezen pojem společného lineárního prostoru nadrovin lineárně nezávislých, definován svazek nadrovin určený dvěma základními nadrovinami, jakož i (m — 2)-rozměrný jejich průnik a dokázána nezávislost dvojpoměru čtyř nadrovin (při jejich určitém pořadí) na volbě nadrovin základních. Po projektivnosti dvou svazků nadrovin definována jejich perspektivnost jako zvláštní případ. Princip duality odvozen ze souvislosti souřadnic bodu a nadroviny.

Kapitola III se zabývá kolineací a korelací v prostoru m-rozměrném (soumístná kolineace bodů téhož prostoru), vysvětlen pojem kolineace inversní, aby bylo možno definovati kolineaci involutorní (totožnou se svou kolineací inversní) pro $m = 1, 2, 3$. Vyloženy pojmy samodružných bodů a nadrovin a podle násobnosti kořenů charakteristické rovnice a hodnosti charakteristického determinantu přistoupeno ke klasifikaci kolineací (pro $m = 1, 2, 3$). Vytčením invariantní nadroviny vyňata z grupy kolineací subgrupa afinit.

V dalším je uvedena definice a souhrn vlastností korelace a podobně jako u kolineace probrána korelace soumístná, korelace involutorní, což doplněno zmínkou o korelacích singulárních.

Čtvrtá kapitola se zabývá algebraickými nadplochami, jejich projektivně invariantními vlastnostmi, t. j. řádem, třídou a reducibilností, tečnou nadrovinou resp. nadkuželem v bodě singulárním. Definicí polár vzhledem k nadploše, zavedením polárního operátoru a uvedením způsobu, jak se obdrží poláry libovolného řádu (postupným tvořením prvních polár), vzájemným vztahem mezi první polárou a body singulárními, resp. r-násobnými a zjištěním, jaké vzájemné vlastnosti mají poláry bodu nadplochy, přichází se k definici Jakobiánu a Hessiánu a kapitola končí zkoumáním a odvozením vět pro svazek nadploch.

Poznatky o nadkvadrikách jsou uvedeny v kapitole V (rovnice, diskriminant nadkvadriky, projektivní invariant, vztahy mezi nadkvadrikou a přímkou, nadkvadrika regulární a singulární, singulární body nadkvadriky, polární vlastnosti, bodová a tečnová rovnice, dualita, odvození normálního tvaru nadkvadriky pomocí polárního simplexu, simultánní invarianty, svazek nadkvadrik, charakteristická rovnice, resp. determinant, dvojice nadkvadrik, rozbor charakteristické rovnice a její vlastnosti).

Kapitola VI se zabývá projektivní geometrií v přímce, t. j. klasifikuje tyto projektivnosti, definuje charakteristický dvojpoměr projektivnosti, vysvětluje projektivnost involutorní, definuje regulární i singulární (dvojnásobnou) dvojici bodovou, jedná o dvojicích apolárních (harmonický invariant) a vyjadřuje apolaritu dvou bodů ke dvěma různým dvojicím bodovým Jakobiánem obou daných dvojic, jedná o regulárních i singulárních svazcích dvojic bodových a uvádí nutnou a postačující podmínku pro to, aby 3 dvojice bodů byly v involuci. Dále se zjišťují vlastnosti trojice bodové, uvádí její Hessián, polární vlastnosti a normální tvar regulární kubické formy, aby byly ozřejměny věty geometrie afinní a metrické.

Obsahem kapitoly následující (VII) je lineární projektivní geometrie v rovině. Probrány známé definice a věty o souřadnicích, bodu a přímce, svazku přímek, úplném čtyrrohu (čtyrstranu), určení kolineace dvou rovin, o klasifikaci kolineací a jejich typech, kolineaci involutorní, o korelaci dvou rovin a korelaci v rovině, aby závěrem kapitoly bylo pojednáno o afinní geometrii, geometrii ekviformní a geometrii metrické v rovině.

Jestliže předchozí kapitola jednala o lineární projektivní geometrii v rovině, kapitola VIII si všímá této geometrie v prostoru trojrozměrném v obdobném postupu, ovšem příslušně zaměřeném.

V kapitole IX byly shrnuty poznatky o kuželosečkách, t. j. o jejich klasifikaci a určení, tečnách a polárních vlastnostech, projektivním vytvoření, parametrickém vyjádření, o větě *Pascalově*, normálním tvaru polárním, o singulárních a regulárních svazcích kuželoseček (charakteristické rovnici a jejím rozboru), o klasifikaci typů dvojic regulárních kuželoseček (geometrický význam invariantů), větě *Desarguesově* a o vztazích duálních.

Obdobně v kapitole X klasifikovány a vyloženy vlastnosti kvadrik a v kapitole XI přistoupeno k základním vlastnostem rovinných algebraických křivek. Definovâna tečna inflexní (obyčejná nebo vyššího řádu), dvojnásobný a vícenásobný bod křivky, vyhledány společné body dvou křivek, jejich resultant a z něho vyplývající věta *Bézoutova*. Definován rod alg. křivky a soustavy těchto křivek.

V kapitole XII je užito algebraických funkcí jedné komplexní proměnné v theorii křivek. Definuje se větev křivky, její charakteristická čísla, t. j. stupeň (stupeň cyklu) a třída, uvádí se důsledky pro větev křivky při transformaci souřadnic, eventuality při klasifikaci dvojnásobných bodů, věta o násobnosti průsečíků dvou křivek, užití této věty a modality průsečíků křivky a její první poláry, resp. průsečíků křivky a jejího Hessiánu.

Kapitolou XIII o čtyřech *Plückerových* vzorcích je vlastně ukončena obecná theorie algebraických rovinných křivek. Je uvedena třída křivky (první vzorec *Plückerův*), pojednáno o počtu tečen vedených z bodů zvláštní polohy, vlastnostech obyčejného bodu r-násobného, o mezi pro počet bodů úvratu, o kvartice s třemi body úvratu a Hessiánu křivky nerozložitelné a rozložitelné. Počet obyčejných inflexních tečen křivky stanoví druhý vzorec *Plückerův*, při čemž jsou uvedeny vlastnosti *Hesseovy* a *Steinerovy* křivky jako geometrických míst, odvozena tečnová rovnice křivky jako duální k rovnici bodové, vlastnosti větve křivky duální, a užití principu duality, aby závěrem byly uvedeny zbývající dva vzorce *Plückerovy* a proveden jejich rozbor (*Plückerova* čísla křivky, dualita, vzájemná závislost všech čtyř vzorců a nezávislost kterýchkoliv tří vzorců).

Kapitoly XIV a XV doplňují obecnou theorii algebraických rovinných křivek příklady kubiky a kvartiky. V kapitole XIV je pojednáno o určení kubiky, o společných bodech dvou kubik s uvedením důležitých vět o jejich devíti průsečících (uveden též případ mezný), o projektivním vytvoření kubiky a jejích polárních vlastnostech. Jedná se o tečnách vedených ke kubice z jejího bodu, při čemž je dokázána věta *Salmonova* (konstantní dvojpoměr [absolutní invariant] čtyř tečen ke kubice z jejího bodu), o konfiguraci inflexních bodů kubiky rodu jedna (syzygetický svazek kubik), o inflexním trojstranu a jeho vlastnostech, o syzygetickém svazku a kubikách ekvianharmonických a harmonických, o nutné podmínce ekvivalence dvou kubik rodu jedna, o grupě automorfních kolineací kubiky rodu jedna a to zejména případu ekvianharmonického a harmonického, o kubice s uzlovým bodem a o parametrickém vyjádření automorfních kolineací rac. kubik. Pokud se příkladu kvartiky v rovině týče, je tu zdůvodněna věta o čtyřech kuželosečkách, které tvoří uzavřený řetěz na kvartice, o kuželosečkách čtyrnásob dotykových, o jejich soustavě a vlastnostech soustavy dvojnásobných tečen, o projektivním vytvoření kvartiky, o počtu dvojnásobných tečen kvartiky rodu nula a polárních vlastnostech kvartiky s uzlovým bodem.

Kapitola XVI ukončuje obecnou theorii alg. křivek objasněním z hlediska názoru a jedná o pravoúhlých souřadnicích, o vlastnosti nevlastní přímky, o počtu bodů reálných algebraických křivek, o tečně a inflexních bodech v nehomogenních souřadnicích pravoúhlých, o asymptotách, o bodech vícenásobných, o křivkách *Laméových* (sudého a lichého stupně) a dalších (kubika, kvartika), na něž jsou aplikovány alg. methody k jejich podrobnějšímu poznání (na př.: výpočet rozvojů v daném bodě křivky [výsledky kap. XII], užití *Newtonova* polygonu, průběh větví nejnižších stupňů, tvar křivky v okolí dvojnásobného bodu, analytický trojúhelník atd.).

Kapitolou XVII počíná část jednající o alg. plochách a prostorových křivkách, která se nezabývá obtížemi obecné theorie, ale seznamuje čtenáře se základními pojmy nutnými k poznání těchto ploch a křivek. Definuje se určenost alg. plochy, uvažuje alg. prostorová křivka jako průnik dvou alg. ploch, stupeň prost. alg. křivky, uvádějí se podmínky pro plochu přímkovou, studuje se tečná rovina a tečna plochy (tečny oskulační), tečné roviny podél přímky plochy (vícenásobná, torsální přímka plochy), definují a podrobněji se zkoumají parabolické body (Hessián plochy rovná se nule) a jejich křivka na ploše, plocha *Hesseova* a *Steinerova*, vztah Hessiánu k přímkám plochy a Hessián plochy rozvinutelné (každá přímka je torsální), singulární bod plochy (též dvojnásobný — konický, biplanární, uniplanární), tečny z bodu ku ploše a třída plochy, polohy přímky a prostorové křivky (n-sekanty, tečny), její tečná a oskulační rovina, singulární bod křivky, uvádí se jak studovat prost. křivku z jejího průmětu do roviny, obecnější definici prostorové křivky alg. (stupeň, třída, hodnost, rod) a užití duality v theorii alg. ploch i prost. alg. křivek.

XVIII. kapitola se zabývá studiem kubické plochy, důkazy o počtu jejích přímek, studiem kuželoseček na kubické ploše a počtu rovin dvojnásob i trojnásob tečných, dvojšestic přímek, jejich počtem a vlastnostmi vyplývajícími z úvah i o jiných skupinách mimoběžek na ploše, shrnutím charakteristických vlastností dvojšestice a jejími vztahy k ostatním přímkám plochy a k ploše samé. V dalším se kapitola nejdříve zabývá nepřímkovými kubickými plochami s dvojnásobnými body. Všímá si: přímek plochy procházejících jejím dvojným bodem, torsálních přímek kubické plochy, kubické plochy s jedním bodem konickým, biplanárním, uniplanárním, s třemi dvojnásobnými body (podmínky pro existenci dalšího dvojnásobného bodu), se čtyřmi dvojnásobnými body a s nekonečně mnoha dvojnásobnými body (kubická plocha přímková — ovšem nekuželová) a jejích dvou typů (na př.: plochy s dvěma řídícími přímkami, kubické plochy *Cayleyovy* a *Steinerovy* plochy 4. stupně).

V XIX. kapitole je pojednáno o kubice a kvartice v prostoru. Křivka je vyjádřena parametricky, zkoumány vzájemné vztahy kubiky, roviny a přímky, určena třída a hodnost kubiky a vyjádřeny důsledky plynoucí z vlastností průmětu kubiky do roviny a nulové korelace spojené s kubikou; kubika je určena jednoznačně 6 body, z nichž žádné 4 neleží v rovině, je uvedeno její projektivní vytvoření, zobecněné parametrické vyjádření a dualita prostorové kubiky (je duální sama k sobě). V dalším jsou uvedeny dva druhy prostorové kvartiky a základní jejich vlastnosti.

Kapitola XX seznamuje s případy *Cremonových* transformací, především však s transformací kvadratickou mezi dvěma rovinami (hlavní body a hlavní přímky, kuželosečka odpovídá přímce, určenost a konstrukce kvadratické transformace, její užití na křivku stupně n), kvadratickou transformací involutorní a kvadratickou inversí (kvartika vzniklá kvadratickou transformací kuželosečky, kvartika s vyšší singularitou). Pak přistoupeno k transformacím *Cremonovým* v trojrozměrném prostoru a po nutném úvodním rozboru a zdůvodnění (homaloidní soustavy kvadrik) je uvedena transformace kvadrobikvadratická, kvadrokubická, kvadrokvadratická, involutorní transformace kvadratická, kvadratická inverse prostorová, při čemž uvedeno zobrazení alg. resp. kubické plochy na rovinu pro jejich podrobnější studium.

Učebnice je doplněna za každou kapitolou příklady k cvičení, jejichž značný počet umožní čtenáři ovládnouti látku.

Po vnější stránce kniha vyniká dobrou úpravou typografickou a vzorně narýsovanými obrazci (v počtu 46); je doplněna abecedním ukazatelem a seznamem opravených chyb a nedopatření tiskových a jiných.

Profesor *Bydžovský* se v tomto spise opět ukázal jako mistrný učitel, přenášející na čtenáře svůj vřelý poměr k vykládané látce. Její výběr je promyšleně vyvážen, takže není přehnaný odhad, že pro každého, kdo se hodlá zabývati geometrií, i když ne algebraickou, *Bydžovského* kniha je nezbytnou a dokonalou průpravou.

Otto Hlinka.