František Nožička

Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, 179--209

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122658

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950)

LE VECTEUR AFFINONORMAL ET LA CONNEXION DE L'HYPERSURFACE DANS L'ESPACE AFFIN.

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Reçu le 25 Mai 1950.)

Le travail présent est consacré à la théorie de l'induction affine pour un espace à $n - 1$ dimensions X_{n-1} (holonomme) dans un espace n fois étendu A_n, doué d'une connexion affine, plus ou moins générale. Le problème consiste dans la construction du vecteur affinonormal défini aux points de la variété X_{n-1}. La connaîssance du vecteur affinonormal conduit à la définition de la connexion induite et donc à l'immersion de l'espace X_{n-1} dans A_n. On discute la question d'une connexion arbitraire intrinsèque dans X_{n-1} et, ce qui est le but du travail, la question de la connexion invariante et celle du vecteur affinonormal à direction invariante par rapport à la transformation du vecteur tangent.

Pour faciliter l'étude de ce travail, je traite soigneusement toutes les définitions fondamentales. Je laisse à côté beaucoup de problèmes d'intégration qui exigent des études plus approfondies.

I. Notions préliminaires.

Imaginons un espace affin A_n n fois étendu[1]) aux coordonnées ξ^α doué d'une connexion $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$. D'après la définition de l'espace affin on a

$$\Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0. \tag{1,1}$$

Dans A_n considérons un espace X_{n-1} à $n - 1$ dimensions déterminé par les équations paramétriques

$$\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a).^{2)} \tag{1,2}$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que les fonctions $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ admettent en chaque point des dérivées partielles continues par rapport aux variables ξ^α d'ordre suffisamment grand et que les fonctions $\xi^\nu(\eta^a)$ ont des

[1]) $n > 1$ est un nombre entier.

[2]) Les indices latins parcourent les $n - 1$ symboles $1, 2, \ldots, n - 1$, les indices grecs parcourent les n symboles $1, 2, \ldots, n$.

dérivées partielles continues par rapport aux variables η^a d'ordre suffisamment grand dans le domaine considéré.

Nous allons exclure de nos considérations tous les points de l'espace X_{n-1}, où le rang de la matrice aux éléments

$$B_a^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a} \tag{1,3}$$

est plus petit que $n-1$. Si l'on désigne par B l'affineur unitaire de l'espace X_{n-1}, les B_a^ν en sont les composantes mixtes.

Définition 1. *Nous appelons vecteur tangent de l'espace X_{n-1} le vecteur t_ν satisfaisant aux équations*

$$B_a^\nu t_\nu = 0, \; t_\nu \neq 0. \tag{1,4}$$

La solution générale de (1,4) est

$$*t_\nu = P t_\nu, \tag{1,5}$$

où $P \neq 0$ est un scalaire (facteur multiplicatif) arbitraire et t_ν une des solutions des équations (1,4).

Définition 2. *Nous disons que le vecteur contravariant s^α est situé dans l'hyperplan tangent de l'espace X_{n-1} (ou bien qu'il est le vecteur de l'espace X_{n-1}), s'il satisfait à l'équation*

$$s^\alpha t_\alpha = 0. \tag{1,6}$$

Introduisons maintenant le vecteur n^ν de telle manière que l'équation

$$n^\nu t_\nu = 1 \tag{1,7}$$

soit satisfaite. Tous les autres vecteurs n^ν, pour lesquels la relation (1,7) a lieu, ont la forme

$$\overline{n}^\nu = n^\nu + s^\nu,$$

où s^ν est un vecteur de l'espace X_{n-1}.[3]) Soit t_ν une des solutions des équations (1,4). Supposons qu'un vecteur $n^\nu = n^\nu(\eta^a)$ satisfasse à l'équation (1,7). Pour que la relation (1,7) soit valable pour toutes les solutions des équations (1,4), c'est-à-dire, pour que l'équation

$$*t_\nu {*n^\nu} = 1 \tag{1,9}$$

ait lieu en même temps que (1,7) pour chaque choix du facteur multiplicatif du vecteur tangent t_ν, le vecteur n^ν doit se transformer selon la transformation (1,5) en un vecteur $*n^\nu$ et les vecteurs n^ν, $*n^\nu$ sont liés par la relation

$$*n^\nu = Q(n^\nu + s^\nu), \; Q = P^{-1}, \tag{1,10}$$

s^ν étant un vecteur de l'espace X_{n-1}[3]).

[3]) Voir la définition 2.

Définition 3. *Nous allons appeler vecteur affinonormal de l'espace X_{n-1} chaque vecteur $n^\nu = n^\nu(\eta^a)$ bien défini et satisfaisant à la relation* (1,7), *qui se transforme par la transformation* (1,5) *selon* (1,10).

Remarque 1. Le vecteur affinonormal n^ν n'est pas situé — en vertu de la définition 2 — dans l'hyperplan tangent de l'espace X_{n-1}. S'il existe le vecteur n^ν au sens de la définition 3 (voir la démonstration de l'existence sous les conditions données plus loin), le déterminant $[B_1^\nu, B_2^\nu, \ldots, B_{n-1}^\nu, n^\nu]$ est différent de zéro.

Remarque 2. On peut regarder les éléments B_a^ν comme des vecteurs contravariants situés dans l'hyperplan de l'espace X_{n-1} ou comme des composantes mixtes de l'affineur unitaire B. Dans le premier cas nous pouvons écrire $\underset{a}{B^\nu}$, dans le second cas B_a^ν. Parce que les deux conceptions se réduisent l'une à l'autre[4]) il n'importe de quel symbole nous nous servirons. Dans ce qui suit, nous écrirons en général B_a^ν.

Introduisons maintenant le tenseur h_{ab} par la définition suivante

$$h_{ab} \equiv B_b^\lambda \nabla_a t_\lambda \equiv B_b^\lambda(\partial_a t_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu B_a^\mu t_\nu),^{5)} \tag{1,11}$$

où $\partial_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial \eta^a}$. Ce tenseur est symétrique par rapport aux indices a, b.[6])

Pour les considérations suivantes nous introduirons la condition suivante:

Supposition I. *Le rang du tenseur h_{ab} est $n-1$.*

En tenant compte de cette supposition on peut introduire le tenseur $h^{ab} = h^{ba}$ par la définition

$$h_{ac}h^{cb} = \delta_b^a, \text{ où } \delta_b^a = \begin{cases} 1 & \text{pour } a = b. \\ 0 & \text{pour } a \neq b. \end{cases} \tag{1,12}$$

Théorème (1,1). *Sous les suppositions faites le déterminant*

$$[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu]$$

est différent de zéro.

Démonstration. Supposons que l'équation $[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu] = 0$ soit satisfaite au moins dans un point de l'espace considéré. Il résulte de cette supposition qu'il existe un certain vecteur $v^a \neq 0$ $(a = 1, \ldots, n-1)$ et un scalaire ϱ tel que l'équation

$$v^a \nabla_a t_\nu + \varrho t_\nu = 0$$

[4]) Voir V. Hlavatý: Induzierte u. eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen, Mathematische Zeitschrift, Band **38**, p. 285.

[5]) ∇_a est le vecteur symbolique de la dérivée covariante.

[6]) C'est-à-dire $h_{[ab]} = 0$. C'est une conséquence de (1,1) et de la relation $\partial_{[a} B_{b]}^\nu = 0$ valable pour l'espace holonomme X_{n-1}.

ait lieu au point où le déterminant s'annulle. De la dernière relation on déduit, ayant égard à (1,4), (1,11),

$$v^a h_{ab} = 0.$$

Or ces équations, en raison de la supposition I, ne peuvent être remplies que si $v^a = 0$, ce qui est une contradiction, car nous avons supposé $v^a \neq 0$. Le théorème est donc démontré.

Le choix du vecteur t_ν étant fixe, déterminons le vecteur n^ν par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ n^\nu t_\nu = 1, \\ &\text{b)}\ n^\nu \nabla_a t_\nu = v_a, \end{aligned} \tag{1,13}$$

où v_a est un vecteur donné de l'espace X_{n-1}. D'après le théorème précédant les équations (1,13a, b) définissent univoquement n^ν. Le vecteur n^ν ainsi défini est le vecteur affinonormal au sens de la définition 3.[7]) L'équation (1,13a) est la première condition de Ricci pour le vecteur affinonormal, l'équation (1,13b) est la seconde condition généralisée de Ricci.

2. Le vecteur affinonormal et la connexion induite de l'espace X_{n-1}.

Soit v_a un vecteur donné de l'espace X_{n-1} et définissons le vecteur n^ν par les équations

$$t_\nu n^\nu = 1, \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = v_a. \tag{2,1}$$

En prenant le vecteur t_ν fixe la solution n^ν existe et est unique. Cela étant on peut construire les éléments B^a_ν de telle sorte qu'on ait

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b, \quad B^a_\nu n^\nu = 0, \tag{2,2}$$

où $\delta^a_b = 1$ pour $a = b$, $\delta^a_b = 0$ pour $a \neq b$. Parce que $[B^\nu_1, B^\nu_2, \ldots, B^\nu_{n-1}, n^\nu] \neq 0$[8]), les $n(n-1)$ équations (2,2) déterminent sans ambiguité les $n(n-1)$ inconnues B^a_ν. Au moyen de ces éléments nous pouvons déterminer les composantes B^ν_λ de l'affineur unitaire de l'espace X_{n-1}

$$B^\nu_\lambda = B^\nu_a B^a_\lambda. \tag{2,3}$$

On constate facilement que les éléments B^ν_λ satisfont aux équations

$$B^\nu_\lambda n^\lambda = 0, \quad B^\nu_\lambda B^\lambda_b = B^\nu_b.$$

D'autre part, les équations précédentes définissent les composantes B^ν_λ. Or les expressions $\delta^\nu_\lambda - t_\lambda n^\nu$ satisfont aussi aux mêmes équations. L'affineur B^ν_λ étant unique il en résulte

$$B^\nu_\lambda = \delta^\nu_\lambda - t_\lambda n^\nu. \tag{2,4}$$

[7]) Voir plus loin (§ 2).
[8]) En raison de (1,4), (1,7).

Nous pouvons maintenant, à l'aide des éléments B^a_ν, construire des expressions

$$\Gamma^c_{ab} \equiv B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b. \tag{2,5}$$

Théorème (2,1). *Les expressions Γ^c_{ab} sont des composantes d'une connexion intrinsèque de l'espace X_{n-1}.*

Démonstration. On constate facilement que par la transformation des paramètres $\eta^{\bar{a}} = \eta^{\bar{a}}(\eta^b)$ dans X_{n-1} les éléments B^ν_b, B^a_μ se transforment selon

$$B^\nu_{\bar{b}} = A^b_{\bar{b}} B^\nu_b, \quad B^{\bar{a}}_\nu = A^{\bar{a}}_a B^a_\nu,$$

où

$$A^b_{\bar{b}} = \frac{\partial \eta^b}{\partial \eta^{\bar{b}}}, \quad A^{\bar{a}}_a = \frac{\partial \eta^{\bar{a}}}{\partial \eta^a}.$$

En tenant compte de ces relations on obtient par un calcul mécanique

$$\Gamma^{\bar{c}}_{\bar{a}\bar{b}} = A^{\bar{c}}_c A^a_{\bar{a}} A^b_{\bar{b}} \Gamma^c_{ab} + A^{\bar{c}}_a \frac{\partial}{\partial \eta^{\bar{a}}} A^a_{\bar{b}}.$$

Définition 4. *La connexion intrinsèque Γ^c_{ab}, déterminée par* (2,5), *est dite la connexion induite (par le vecteur n^ν) de l'espace X_{n-1}.*

Théorème (2,2). *La connexion induite est symétrique.*

Démonstration. On obtient, en raison de (2,5), (1,1) et de la note[6])

$$\Gamma^c_{[ab]} = B^c_\nu \nabla_{[a} B^\nu_{b]} = B^c_\nu (\partial_{[a} B^\nu_{b]} + \Gamma^\nu_{[\alpha\beta]} B^\alpha_a B^\beta_b) = 0.$$

Théorème (2,3). *La connexion induite Γ^c_{ab} satisfait à la formule de* Gauss

$$\Gamma^c_{ab} B^\nu_c = h_{ab} n^\nu + \nabla_a B^\nu_b. \tag{2,6}$$

Démonstration. On obtient de (2,5), (2,3), (2,4), (1,11)

$$\Gamma^c_{ab} B^\nu_c = B^\nu_c B^c_\alpha \nabla_a B^\alpha_b = B^\nu_\alpha \nabla_a B^\alpha_b = (\delta^\nu_\alpha - t_\alpha n^\nu) \nabla_a B^\alpha_b =$$
$$= \nabla_a B^\nu_b - n^\nu t_\alpha \nabla_a B^\alpha_b = \nabla_a B^\nu_b + h_{ab} n^\nu.$$

Convention I. *Parce que le vecteur n^ν induit dans X_{n-1} une connexion symétrique Γ^c_{ab}, nous emploierons pour la variété X_{n-1}, douée de cette connexion, le symbole A_{n-1} au lieu du symbole X_{n-1}.*

Théorème (2,4). *Soit, sous les suppositions données, le vecteur n^ν déterminé par* (2,1). *La connexion induite* (2,5) *par ce vecteur peut être ramenée à la forme*

$$\Gamma^c_{ab} = h^{cd} (\nabla_d t_\nu) \nabla_a B^\nu_b + h_{ab} h^{cd} v_d, \tag{2,7}$$

où

$$v_d \stackrel{\text{def}}{=} n^\nu \nabla_d t_\nu.$$

Démonstration. On constate de ce qui précède que les éléments B^c_ν — l'indice c étant fixe — sont des composantes d'un vecteur covariant de l'espace A_n. Nous savons encore, à cause du théorème (1,1), que les vecteurs $\nabla_a t_\nu$, t_ν $(a = 1, 2, \ldots, n - 1)$ sont linéairement indépendants. Le vecteur B^c_ν est donc une combinaison linéaire des vecteurs t_ν, $\nabla_a t_\nu$. Ceci permet de poser

$$B^c_\nu = G^{cd}\nabla_d t_\nu + R^c t_\nu, \tag{2,8}$$

où G^{cd}, R^c sont des objets de l'espace X_{n-1}. En multipliant les relations (2,8) par l'élément B^ν_b on obtient d'après (2,2), (1,11), (1,4)

$$\delta^c_b = G^{cd}h_{db}.$$

Il s'ensuit, en raison de (1,12),

$$G^{cd} = h^{cd}. \tag{2,9}$$

On déduit, en multipliant les équations (2,8) par n^ν et à l'aide des relations (2,2), (2,1), (2,9),

$$R^c = -h^{cd}v_d \quad (v_d = n^\nu\nabla_d t_\nu).$$

D'après ce qui précède on peut donc ramener la relation (2,8) à la forme

$$B^c_\nu = h^{cd}\nabla_d t_\nu - h^{cd}v_d t_\nu. \tag{2,10}$$

En tenant compte de cette relation et de (1,11) on peut ramener la connexion induite (2,5) à la forme (2,7).

Théorème (2,5). *Le vecteur n^ν défini par les équations* (2,1) *a la forme*

$$n^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}\left(B^\nu_c\, \Gamma^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b\right), \tag{2,11}$$

où Γ^c_{ab} signifie la connexion induite (par le vecteur n^ν). Ce vecteur n^ν est la seule solution des équations (2,1) *et c'est le vecteur affinonormal au sens de la définition 3.*

Démonstration. Supposons, comme auparavant, le vecteur t_ν fixe. Nous savons déjà que le vecteur n^ν déterminé par (2,1) existe et est unique. On déduit immédiatement de la formule de Gauss (2,6) la relation (2,11). D'autre part, si l'on construit le vecteur n^ν d'après (2,11), où Γ^c_{ab} est déterminée par les équations (2,7) (v_a étant un vecteur donné dans X_{n-1}), on constate facilement que ce vecteur n^ν satisfait aux équations (2,1) et c'est, à cause du théorème (1,1), la seule solution de ces équations.

Pour démontrer le reste du théorème effectuons la transformation (1,5) du vecteur tangent t_ν au vecteur n^ν défini par (2,11). Par la transformation (1,5) les tenseurs h_{ab}, h^{ab} se transforment selon

$$^*h_{ab} = Ph_{ab}, \quad ^*h^{ab} = Qh^{ab} \quad (Q = P^{-1}). \tag{2,12}$$

Cela résulte immédiatement des relations (1,5), (1,4), (1,11), (1,12). La connexion Γ_{ab}^{c} se transforme en général en une autre connexion $^*\Gamma_{ab}^{c}$, tandis que les expressions B_a^ν, $\nabla_a B_b^\nu$ restent invariantes. Il s'ensuit que le vecteur n^ν, défini par (2,11), se transforme selon

$$^*n^\nu = \frac{Qh^{ab}}{n-1}(B_c^\nu\,{}^*\Gamma_{ab}^{c} - \nabla_a B_b^\nu) = \frac{Qh^{ab}}{n-1}(B_c^\nu \Gamma_{ab}^{c} - \nabla_a B_b^\nu) +$$

$$+ \frac{Qh^{ab}}{n-1} B_c^\nu ({}^*\Gamma_{ab}^{c} - \Gamma_{ab}^{c}) = Q(n^\nu + s^\nu),$$

où

$$s^\nu = \frac{1}{n-1} B_c^\nu h^{ab}({}^*\Gamma_{ab}^{c} - \Gamma_{ab}^{c})$$

est un vecteur situé dans l'hyperplan tangent de l'espace A_{n-1} (au sens de la définition 2). Le vecteur n^ν est alors le vecteur affinonormal au sens de la définition 3.

En particulier, si l'on définit le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ par les équations suivantes (le vecteur t_ν étant fixe)

$$t_\nu \overset{\circ}{n}{}^\nu = 1, \quad \overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu = 0 \quad (\text{donc } v_a = 0), \tag{2,13}$$

la connexion induite par le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ est, d'après (2,7),

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c} = h^{cd}(\nabla_d t_\nu)\, \nabla_a B_b^\nu. \tag{2,14}$$

En tenant compte du théorème précédent on peut écrire

$$\overset{\circ}{n}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B_c^\nu \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ba}^{c} - \nabla_a B_b^\nu). \tag{2,15}$$

Définition 5. *La connexion induite* (2,14) *est dite la connexion innée de l'espace* X_{n-1}.[9])

Considérons le vecteur affinonormal n^ν déterminé par les équations (2,1). L'espace X_{n-1} doué de la connexion induite devient ainsi un A_{n-1}.[10]) Soit $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}$ l'affineur de courbure de l'espace A_n, $'R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$ l'affineur de courbure de l'espace A_{n-1}.[11]) Introduisons encore le vecteur symbolique D_a de E. Bortolotti[12]). A l'aide de ce symbole on peut écrire la formule de Gauss (2,6) sous la forme suivante

[9]) Voir V. Hlavatý: Induzierte u. eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen, Mathematische Zeitschrift, Band **38**, p. 292.

[10]) Voir convention I.

[11]) $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 2\partial_{[\alpha}\Gamma_{\beta]\gamma}^{\delta} + 2\Gamma_{[\alpha|\varrho|}^{\delta}\Gamma_{\beta]\gamma}^{\varrho}$, $'R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} = 2\partial_{[a}\Gamma_{b]c}^{d} + 2\Gamma_{[a|f|}^{d}\Gamma_{b]c}^{f}$.

[12]) L'opération D_a fut introduite par B. L. v. d. Waerden et E. Bortolotti. Cette opération est définie comme suit

$$D_a V_{\lambda b\ldots}^{\nu c\ldots} = \partial_a V_{\lambda b\ldots}^{\nu c\ldots} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} B_a^\alpha V_{\lambda b\ldots}^{\mu c\ldots} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} B_a^\alpha V_{\mu b\ldots}^{\nu c\ldots} + \Gamma_{ae}^{c} V_{\lambda b\ldots}^{\nu e\ldots} - \Gamma_{ab}^{e} V_{\lambda e\ldots}^{\nu c\ldots} + \ldots,$$

où $V_{\lambda b\ldots}^{\nu c\ldots}$ est un affineur mixte arbitraire.

$$D_a B_b^\nu = -h_{ab} n^\nu. \tag{2,16}$$

En appliquant le symbole D_a au vecteur affinonormal n^ν on obtient

$$D_a n^\nu = \nabla_a n^\nu. \tag{2,17}$$

En cherchant les conditions d'intégrabilité des équations (2,16) on parvient à l'équation de GAUSS

$$B^{\alpha\beta\gamma d}_{a\,b\,c\,\delta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = {}'R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} - 2l^d_{[a}h_{b]c}, \quad (B^{\alpha\beta\gamma d}_{a\,b\,c\,\delta} \equiv B^\alpha_a B^\beta_b B^\gamma_c B^d_\delta)^{13)} \tag{2,18}$$

où

$$l^d_a \equiv B^d_\alpha \nabla_a n^\alpha. \tag{2,19}$$

La première équation de CODAZZI

$$B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,b\,c} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} t_\delta = -2'\nabla_{[a}h_{b]c} + 2v_{[a}h_{b]c}{}^{13)} \tag{2,20}$$

et la seconde équation de CODAZZI

$$B^{\alpha\beta d}_{a\,b\,\delta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} n^\gamma = 2'\nabla_{[a}l^d_{b]} + 2v_{[a}l^d_{b]} \tag{2,21}$$

sont de même des conditions d'intégrabilité nécessaires des équations (2,16), (2,17). Dans les équations de CODAZZI (2,20), (2,21) le symbole $'\nabla_a$ signifie la dérivée covariante appartenante à la connexion induite dans A_{n-1}.

Introduisons encore les symboles

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = V_{\alpha\beta}, \quad 'R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot c} = V_{ab}.$$

Théorème (2,6). *Les affineurs $V_{\alpha\beta}$, $'V_{ab}$ sont liés par la relation*

$$B^{\alpha\beta}_{ab} V_{\alpha\beta} + 2\partial_{[a}v_{b]} = {}'V_{ab} \tag{2,22}$$

où

$$v_b = n^\nu \nabla_b t_\nu.$$

Démonstration. En effectuant l'opération $\partial_{[a}v_{b]}$ on obtient

$$\begin{aligned} 2\partial_{[a}v_{b]} &= 2\partial_{[a}(n^\nu \nabla_{b]} t_\nu) = 2\nabla_{[a}(n^\nu \nabla \quad = \\ &= 2n^\nu \nabla_{[a}\nabla_{b]} t_\nu + 2(\nabla_a n^\nu)\nabla_{b]} t_\nu = \\ &= -B^{\alpha\beta}_{ab} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} n^\gamma t_\delta + 2(\nabla_{[a}n^\nu)\nabla_{b]} t_\nu. \end{aligned} \tag{2,23a}$$

En raison de la relation (2,10) on peut écrire

$$\nabla_b t_\nu = h_{cb} B^c_\nu + v_b t_\nu.$$

Cela étant on constate à l'aide de la définition (2,19)

$$(\nabla_{[a}n^\nu)\nabla_{b]} t_\nu = l^c_{[a}h_{b]c} + v_{[a}v_{b]} = l^c_{[a}h_{b]c}.$$

Ceci nous permet de ramener (2,23a) à la forme

$$2\partial_{[a}v_{b]} = -B^{\alpha\beta}_{ab} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} n^\gamma t_\delta + 2l^d_{[a}h_{b]d}. \tag{2,23b}$$

D'autre part, l'équation de GAUSS (2,20) nous donne (en y effectuant la contraction $d = c$ et en employant les formules (2,3), (2,4)),

$$B^{\alpha\beta}_{ab} V_{\alpha\beta} - B^{\alpha\beta}_{ab} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} n^\gamma t_\delta = {}'V_{ab} - 2l^d_{[a}h_{b]d}. \tag{2,23c}$$

En tenant compte de (2,23b, c) on parvient à la relation (2,22).

Théorème (2,7). *Supposons l'espace A_{n-1} doué de la connexion innée (2,14). Cela entraîne que les affineurs $V_{\alpha\beta}$, $'\overset{\circ}{V}_{ab}$ sont liés par la relation*

$$B_{ab}^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = '\overset{\circ}{V}_{ab}. \tag{2,24}$$

Démonstration. La connexion innée (2,14) est la connexion induite par le vecteur $\overset{\circ}{n}^\nu$ satisfaisant aux équations

$$\overset{\circ}{n}^\nu t_\nu = 1, \; \overset{\circ}{n}^\nu \nabla_a t_\nu = 0,$$

c'est-à-dire, $v^a \equiv 0$ et la relation (2,24) résulte de (2,22) en y posant $v^a = 0$.

Théorème (2,8). *La connexion dans A_n, déterminée par les composantes $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$, soit équivoluminaire,[14]) c'est-à-dire,*

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = V_{\alpha\beta} = 0.$$

Il en résulte que la connexion innée dans A_{n-1} (X_{n-1} doué de la connexion innée) est de même équivoluminaire.

La démonstration est évidente, car pour $V_{\alpha\beta} = 0$ on obtient de (2,24)

$$'\overset{\circ}{V}_{ab} = '\overset{\circ}{R}_{abc}^{\cdot\cdot\cdot c} = 0.$$

3. Le vecteur affinonormal lié.

Dans les considérations précédentes nous avons défini le vecteur affinonormal n^ν par les équations (2,1). Le vecteur affinonormal étant ainsi donné, nous avons défini la connexion induite et, comme cas spécial, la connexion innée. L'espace X_{n-1} doué de la connexion induite devint ainsi un A_{n-1}. Cela étant, les relations comme la formule de GAUSS (2,6), les équations de GAUSS et de CODAZZI (2,18), (2,20), (2,21) sont valables.

Mais pour construire le vecteur affinonormal on peut aussi procéder d'une autre manière. Supposons qu'on ait choisi une certaine connexion intrinsèque Φ_{ab}^{c} de l'espace X_{n-1}. (La connexion Φ_{ab}^{c} n'est pas nécessairement symétrique.) A l'aide de cette connexion on peut construire le vecteur affinonormal.

Théorème (3,1). *Soit le vecteur tangent t_ν fixe et Φ_{ab}^{c} une connexion donnée intrinsèque de l'espace X_{n-1}. Le vecteur N^ν défini par*

$$N^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1} (B_c^\nu \Phi_{ab}^{c} - \nabla_a B_b^\nu) \tag{3,1}$$

est un vecteur affinonormal au sens de la définition 3.

[13]) La démonstration des équations de GAUSS-CODAZZI voir p. ex. SCHOUTEN-STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Diferentialgeometrie II, p. 159, Groningen-Batavia 1938.

[14]) Voir plus loin § 7.

Démonstration. Remarquons d'abord que les éléments N^ν sont des composantes d'un vecteur contravariant dans A_n qui est défini aux points de l'espace X_{n-1} et indépendant de la transformation des paramètres η^a en X_{n-1}. C'est ce qu'on démontre par un calcul mécanique. On obtient tout de suite, à cause de (1,4), (1,11), (1,12),

$$t_\nu N^\nu = 1.$$

Par la transformation (1,5) du vecteur tangent t_ν les tenseurs h_{ab}, h^{ab} se transforment d'après (2,12), la connexion Φ_{ab}^{c} devient en général $^*\Phi_{ab}^{c}$ tandis que B_c^ν, $\nabla_a B_b^\nu$ restent invariants. Donc le vecteur N^ν et le vecteur transformé $^*N^\nu$ sont liés par la relation

$$^*N^\nu = Q(N^\nu + s^\nu),\ Q = P^{-1},\ s^\nu = \frac{1}{n-1} B_c^\nu h^{ab}(^*\Phi_{ab}^{c} - \Phi_{ab}^{c}).$$

Le vecteur s^ν est alors, au sens de la définition 2, situé dans l'hyperplan tangent de l'espace X_{n-1}. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Définition 6. *On appelle le vecteur N^ν construit à l'aide de la connexion donnée Φ_{ab}^{c} de l'espace X_{n-1} et défini par* (3,1) *le vecteur affinonormal lié à la connexion Φ_{ab}^{c}.*

Théorème (3,2). *Soit Φ_{ab}^{c} une connexion intrinsèque arbitraire de l'espace X_{n-1}. La connexion induite par le vecteur N^ν lié à la connexion Φ_{ab}^{c} a la forme*

$$\overline{\Phi}_{ab}^{c} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c} + \frac{1}{n-1} h_{ab} h^{ed}(\Phi_{ed}^{c} - \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ed}^{c}), \tag{3,2}$$

où $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c}$ est la connexion innée définie par (2,14).

Démonstration. On trouve à l'aide de (3,1), (1,12), (2,14)

$$N^\nu \nabla_d t_\nu = v_d = \frac{h^{ab}}{n-1}(B_c^\nu \Phi_{ab}^{c} - \nabla_a B_b^\nu)\nabla_d t_\nu = \frac{1}{n-1} h^{ab} h_{cd}(\Phi_{ab}^{c} -$$

$$- h^{ce}(\nabla_e t_\nu)\nabla_a B_b^\nu) = \frac{1}{n-1} h^{ab} h_{cd}(\Phi_{ab}^{c} - \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c}).$$

Le vecteur affinonormal N^ν satisfaisant aux équations

$$t_\nu N^\nu = 1,\ N^\nu \nabla_a t_\nu = v_a$$

induit, d'après le théorème (2,4), une connexion $\overline{\Phi}_{ab}^{c}$ dans X_{n-1}, pour laquelle on obtient d'après (2,7), (2,14)

$$\overline{\Phi}_{ab}^{c} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c} + h_{ab} h^{cd} v_d.$$

Dans notre cas

$$v_d = \frac{1}{n-1} h^{ab} h_{cd}(\Phi_{ab}^{c} - \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c})$$

ce qui mène aux équations (3,2).

Théorème (3,3). *Soit* Φ^c_{ab} *une connexion donnée de l'espace* X_{n-1}. *Pour qu'il existe un vecteur affinonormal* n^ν *tel que la connexion* Φ^c_{ab} *soit la connexion induite par lui, il faut et il suffit que la connexion* Φ^c_{ab} *diffère de la connexion innée* $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ *du tenseur* $h_{ab}h^{cd}r_d$, *où* r_d *est un vecteur de l'espace* X_{n-1} *dépendant de la connexion donnée* Φ^c_{ab}.

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe un vecteur n^ν qui induise dans X_{n-1} la connexion donnée Φ^c_{ab}. La connexion induite par ce vecteur n^ν a nécessairement, en raison du théorème (2,4) et des relations (2,7), (2,14), la forme

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}v_d, \quad v_d = n^\nu \nabla_d t_\nu.$$

Il s'ensuit

$$\Phi^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}r_d, \quad r_d \equiv v_d.$$

La nécessité de la condition est donc démontrée.

Le vecteur t_ν étant fixe, le vecteur n^ν qui, d'après la supposition précédente, induit la connexion Φ^c_{ab}, est le seul vecteur jouissant de cette propriété. C'est bien clair car, s'il existait un autre vecteur affinonormal $\bar{n}^\nu$ induisant la même connexion Φ^c_{ab}, il devrait satisfaire à la formule de Gauss (2,6)

$$\Phi^c_{ab}B^\nu_c = h_{ab}\bar{n}^\nu + \nabla_a B^\nu_b.$$

Parce que le vecteur n^ν satisfait à la même équation

$$\Phi^c_{ab}B^\nu_c = h_{ab}n^\nu + \nabla_a B^\nu_b,$$

on obtient, en confrontant les deux équations précédentes et à cause de (1,12), $n^\nu = \bar{n}^\nu$.

Nous pouvons maintenant démontrer la suffisance de la condition de notre théorème. Supposons la connexion donnée Φ^c_{ab} de l'espace X_{n-1} telle qu'on puisse la ramener à la forme

$$\Phi^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}r_d, \tag{3,3}$$

où r_d est un vecteur de l'espace X_{n-1}. Construisons le vecteur affinonormal N^ν lié à la connexion Φ^c_{ab}. D'après (3,1), (3,3), (2,15), (1,12)

$$N^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c\Phi^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) +$$
$$+ B^\nu_c \frac{h^{ab}}{n-1} h_{ab}h^{cd}r_d = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_c h^{cd}r_d.$$

En tenant compte de (2,13), (1,11), (1,12) on obtient

$$N^\nu \nabla_e t_\nu = v_e = \overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_e t_\nu + B^\nu_c h^{cd} r_d \nabla_e t_\nu = r_e.$$

Mais la connexion induite par le vecteur N^ν, qui satisfait, d'après ce qui précède, aux équations

$$N^\nu t_\nu = 1, \quad N^\nu \nabla_e t_\nu = r_e,$$

est, en raison du théorème (2,4) et des relations (2,14), (3,3),

$$\bar{\Phi}_{ab}^{c} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c} + h_{ab} h^{cd} r_d = \Phi_{ab}^{c}.$$

Donc la connexion Φ_{ab}^{c} ayant la forme (3,3), le vecteur affinonormal N^{ν} induisant cette connexion existe et est unique. C'est dans ce cas le vecteur affinonormal N^{ν} lié à la connexion (3,3).

Remarque 3. Supposons que nous avons une connexion quelconque (intrinsèque) de l'espace X_{n-1}.[15] Désignons la par Φ_{ab}^{c}. Le vecteur N^{ν} lié à cette connexion induit dans X_{n-1} une certaine connexion $\bar{\Phi}_{ab}^{c}$. La connexion $\bar{\Phi}_{ab}^{c}$ diffère de la connexion donnée Φ_{ab}^{c} d'un certain tenseur F_{ab}^{c}, pour lequel on obtient de (3,2)

$$F_{ab}^{c} = \bar{\Phi}_{ab}^{c} - \Phi_{ab}^{c} = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ab}^{c} - \Phi_{ab}^{c} - \frac{1}{n-1} h_{ab} h^{ed} (\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ed}^{c} - \Phi_{ed}^{c}). \tag{3,4}$$

On peut remarquer que le tenseur F_{ab}^{c} satisfait à la relation

$$F_{ab}^{c} h^{ab} = 0.$$

Parce que le tenseur F_{ab}^{c} n'est pas en général égal à zéro (identiquement)[16], il n'existe en général aucun vecteur affinonormal qui induise la connexion donnée (voir le théorème précédent).

D'ailleurs on peut douer l'espace X_{n-1} d'une connexion intrinsèque arbitraire Φ_{ab}^{c}. Mais, si la connexion Φ_{ab}^{c} n'est pas de la forme (3,3) ou ne peut pas être ramenée à cette forme, les relations comme la formule de Gauss (2,6), les équations de Gauss et de Codazzi (2,18), (2,20) ne sont plus valables. Il y a donc des formules analogues aux équations de Gauss et de Codazzi. Pour déduire ces relations, construisons d'abord le vecteur affinonormal N^{ν} lié à la connexion Φ_{ab}^{c} dans l'espace X_{n-1}. On obtient par un calcul mécanique d'une manière analogue à celle, qui conduit aux équations de Gauss et de Codazzi dans le cas de la connexion induite, des relations plus compliquées.

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ B_{abc\delta}^{\alpha\beta\gamma d} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = {}'\bar{R}_{abc}{}^{\cdot\cdot\cdot d} - 2 l_{[a}^{d} h_{b]c} + 2\,{}'\bar{\nabla}_{[a} F_{b]c}^{d} + \\
&\qquad + 2 F_{[a|k|}^{d} F_{b]c}^{k} + 2 \Phi_{[ab]}^{k} F_{kc}^{d},\\
&\text{b)}\ B_{abc}^{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta} t_{\delta} = -2\,{}'\bar{\nabla}_{[a} h_{b]c} + 2 v_{[a} h_{b]c} + 2 F_{c[a}^{d} h_{b]d} - \\
&\qquad - 2 \Phi_{[ab]}^{d} h_{dc},\\
&\text{c)}\ B_{ab\delta}^{\alpha\beta d} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta} n^{\gamma} = 2\,{}'\bar{\nabla}_{[a} l_{b]}^{d} + 2 v_{[a} l_{b]}^{d} + 2 F_{c[a}^{d} l_{b]}^{c} + \\
&\qquad + 2 \Phi_{[ab]}^{c} l_{c}^{d},
\end{aligned} \tag{3,5}$$

où ${}'\bar{R}_{abc}{}^{\cdot\cdot\cdot d}$ est l'affineur de courbure appartenant à la connexion Φ_{ab}^{c}, ${}'\bar{\nabla}_{a}$

[15]) P. ex. la connexion symétrique $\left\{ {c \atop ab} \right\} = \frac{1}{2} h^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab})$ ou la connexion $B_{d}^{\nu} h^{dc} \nabla_a \nabla_b t_{\nu}$ qui n'est pas symétrique en général.

[16]) Exemple: connexion Φ_{ab}^{c} asymétrique.

est le vecteur symbolique de la dérivée covariante appartenante à la même connexion; le tenseur F_{ab}^{c} est déterminé par (3,4). Les équations précédentes sont des équations de GAUSS et de CODAZZI généralisées; les équations (2,18), (2,20), (2,21) en résultent pour $F_{ab}^{c} \equiv 0$, c'est-à-dire pour le cas de la connexion induite.

Ajoutons à la fin de ce paragraphe quelques mots sur l'importance de la connexion induite pour l'espace X_{n-1} plongé dans l'espace affin A_n. Sous l'aspect du calcul formel et mécanique on voit que beaucoup des relations deviennent plus simples en considérant l'espace X_{n-1} doué d'une connexion induite que dans le cas d'une connexion arbitraire Φ_{ab}^{c} (pour laquelle il n'existe aucun vecteur affinonormal tel que la connexion Φ_{ab}^{c} soit induite par lui). Cet aspect n'est pas important et ne motive pas l'importance de la connexion induite.

Mais l'induction métrique de la géométrie riemanienne n'est qu'un cas spécial de l'induction affine.[17]) Une raison géométrique pour douer l'espace X_{n-1} de la connexion induite est fournie par le théorème suivant:

Théorème (3,4). *Soit n^ν le vecteur affinonormal de l'espace A_{n-1}*[18]) *doué de la connexion induite par ce vecteur n^ν. S'il existe dans l'espace A_{n-1} une courbe C qui, considérée comme une courbe de l'espace A_n, est géodésique dans A_n,*[19]) *alors cette courbe est nécessairement géodésique dans A_{n-1}.*

Démonstration. Soit la courbe C dans l'espace A_{n-1} déterminée par les équations paramétriques

$$\eta^a = \eta^a(t), \quad a = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dans A_n cette courbe est définie par

$$\xi^\nu = \xi^\nu(\eta^a(t)).$$

Or nous avons supposé que cette courbe soit géodésique dans A_n. Il en résulte pour le vecteur tangent $u^\nu = \dfrac{d\xi^\nu}{dt}$ de cette courbe

$$\frac{d}{dt} u^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} u^\alpha u^\beta = f(t)\, u^\nu,$$

où $f(t)$ est un scalaire. Mais parce que $u^\nu = B_c^\nu u^c$, où $u^c = \dfrac{d\eta^c}{dt}$ est le vecteur tangent de la courbe C dans A_{n-1}, on peut donner à la dernière équation la forme suivante

$$B_c^\nu \frac{d}{dt} u^c + u^a u^b \partial_a B_b^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} B_a^\alpha B_b^\beta u^a u^b = f(t)\, B_c^\nu u^c,$$

---

[17]) Je veux discuter ce problème dans un travail prochain.
[18]) Voir la convention I.
[19]) Les espaces A_{n-1}, où cette supposition est vraie, sont bien connus.

ou bien

$$B^{\nu}_{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^{c}+u^{a}u^{b}\nabla_{a}B^{\nu}_{b}=f(t)\,B^{\nu}_{c}u^{c}.$$

En multipliant cette relation par l'élément B^{d}_{ν} on obtient, en raison de (2,2), (2,5) et du théorème (2,1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^{d}+\Gamma^{d}_{ab}u^{a}u^{b}=f(t)\,u^{d},$$

où Γ^{d}_{ab} est la connexion induite par le vecteur n^{ν}. La courbe C est donc géodésique dans A_{n-1}.

4. La connexion innée et la connexion riemanienne du tenseur h_{ab} dans X_{n-1}.

Soit d'abord le vecteur t_{ν} fixe. Nous avons défini la connexion innée par la formule

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}=h^{cd}(\nabla_{d}t_{\nu})\,\nabla_{a}B^{\nu}_{b}. \tag{4,1}$$

Le vecteur affinonormal lié à cette connexion, c'est-à-dire

$$\overset{\circ}{n}{}^{\nu}=\frac{h^{ab}}{n-1}(B^{\nu}_{c}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}-\nabla_{a}B^{\nu}_{b}), \tag{4,2}$$

induit en effet, en raison du théorème (3,3), la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$ dans A_{n-1}. De plus nous pouvons construire la connexion riemanienne tu tenseur h_{ab}

$$\{{}^{\,c}_{ab}\}=\tfrac{1}{2}h^{cd}(\partial_{a}h_{bd}+\partial_{b}h_{ad}-\partial_{d}h_{ab}). \tag{4,3}$$

Le vecteur affinonormal m^{ν} lié à cette connexion est

$$m^{\nu}=\frac{h^{ab}}{n-1}(B^{\nu}_{c}\{{}^{\,c}_{ab}\}-\nabla_{a}B^{\nu}_{b}). \tag{4,4}$$

Le vecteur m^{ν} induit dans X_{n-1} la connexion I^{c}_{ab}, pour laquelle on obtient de (3,2)

$$I^{c}_{ab}=\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}+\frac{1}{n-1}h_{ab}h^{ed}(\{{}^{\,c}_{ed}\}-\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ed}).$$

Posons, pour abréger le calcul,

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \ T^{c}_{ab}=\{{}^{\,c}_{ab}\}-\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab},\\
&\text{b)}\ \ M_{a}=\frac{2}{n+1}T^{c}_{ac},\\
&\text{c)}\ \ N_{a}=\frac{2}{n+1}h_{ab}h^{cd}T^{b}_{cd}.
\end{aligned} \tag{4,5}$$

Théorème (4,1). Le tenseur T^{c}_{ab}, défini par (4,5a), satisfait aux équations

$$-2T^{\;d}_{c[a}h_{b]d} = B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,bc}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta. \tag{4,6}$$

Démonstration. Désignons par le symbole $\overline{\nabla}_a$ le vecteur symbolique de la dérivée covariante par rapport à la connexion $\{^{\,c}_{ab}\}$ (voir (4,3). Comme la connexion $\{^{\,c}_{ab}\}$ est la connexion métrique du tenseur h_{ab}, il en résulte

$$\overline{\nabla}_a h_{bc} = 0. \tag{4,7}$$

La variété A_{n-1} étant douée de la connexion innée $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$, on obtient de la première équation de Codazzi (2,20), en tenant compte de (2,13),

$$B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,b\,c}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta = -2'\overset{\circ}{\nabla}_{[a}h_{b]c}, \tag{4,8}$$

où $'\overset{\circ}{\nabla}_a$ est le vecteur symbolique de la dérivée covariante par rapport à la connexion innée $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$. Mais, en raison de (4,7), (4,5a),

$$'\overset{\circ}{\nabla}_a h_{bc} = \partial_a h_{bc} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^d_{ba}h_{dc} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^d_{ca}h_{bd} = (\{^{\,d}_{ba}\} - \Gamma^d_{ba})\,h_{dc} +$$
$$+ (\{^{\,d}_{ca}\} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^d_{ca})\,h_{bd} = T^d_{ba}h_{dc} + T^d_{ca}h_{bd},$$

d'où

$$'\overset{\circ}{\nabla}_{[a}h_{b]c} = T^d_{c[a}h_{b]d},$$

car les deux connexions $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$, $\{^{\,c}_{ab}\}$ sont symétriques. Le théorème est alors évident.

Remarque 4. Déterminons le vecteur R_b par les équations suivantes

$$R_b = \frac{2}{n+1}B^\beta_b h^{ac}B^\alpha_a B^\gamma_c R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta. \tag{4,9}$$

Ce vecteur n'est pas nécessairement égal à zéro. Nous allons démontrer cet énoncé dans le cas $n = 3$.

Pour $n = 3$ on a

$$R_b h^{bd} = \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,b\,c}h^{ac}h^{bd}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta = \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,b\,c}h^{ac}h^{bd}R_{[\alpha\beta]\,\gamma}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\,\delta}t_\delta =$$
$$= \tfrac{1}{2}B^{\;\alpha\beta}_{[ab]}h^{c[a}h^{b]d}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta = \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}_{a\,b\,c}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta(h^{c[a}h^{b]d}).$$

Il s'ensuit

$$R_b h^{b1} = -\tfrac{1}{4}B^{\alpha\beta\gamma}_{1\,2\,2}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta(h^{11}h^{22} - h^{12}h^{21}),$$
$$R_b h^{b2} = \tfrac{1}{4}B^{\alpha\beta\gamma}_{1\,2\,1}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta(h^{11}h^{22} - h^{12}h^{21}).$$

D'après la supposition $[h_{ab}] = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \neq 0$ on a alors $h^{11}h^{22} - h^{12}h^{21} \neq 0$. On voit sans peine qu'il existe des espaces A_2 plongés dans A_3, pour lesquels $R_b \neq 0$. C'est ce qui résulte des formules précédentes. La question s'il en est ainsi pour $n \neq 3$, reste ouverte.

Convention II. *Nous appelons cas général de l'espace X_{n-1} dans A_n le cas, où*

$$R_b = \frac{2}{n+1}B^\beta_b h^{ac}B^\alpha_a B^\gamma_c R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta}t_\delta \neq 0.$$

Théorème (4,2). *Dans le cas général les connexions* Γ^c_{ab} *et* $\{^{c}_{ab}\}$ *ne sont pas identiques. Cet énoncé est valable pour chaque choix du vecteur tangent* t_ν.

Démonstration. D'après la supposition du théorème et d'après la convention précédente $R_b \neq 0$. Il s'ensuit, en raison de (4,9), $B^{\alpha\beta\gamma}_{abc} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} t_\delta \neq 0$. Donc

$$T^d_{ac} \neq 0,$$

ce qui résulte, dans le cas considéré, de la rélation (4,6). En tenant compte de la définition du tenseur T^c_{ab} (4,5a) on voit que le théorème est vrai pour t_ν fixe. Par la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$ le tenseur h^{ab} se transforme d'après (2,12). On voit immédiatement que le vecteur R_b reste invariant. Le résultat précédent est alors valable pour chaque choix du vecteur tangent t_ν.

Remarque 5. Dans les considérations précédentes nous avons supposé le plus souvent le vecteur t_ν fixe. En partant de la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$ on peut constater que beaucoup d'objects géométriques ne restent pas invariants par rapport à cette transformation. Nous étudierons maintenant l'effet de la transformation du vecteur tangent t_ν sur la connexion innée et la connexion riemanienne du tenseur h_{ab}.

Théorème (4,3). En effectuant la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$, la connexion innée $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ et le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ lié à cette connexion se transforment selon

$$^*\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} - h_{ab}h^{cd}P_d, \quad P_d = \frac{\partial}{\partial\eta^d}\log|P|. \tag{4,10a}$$

$$^*\overset{\circ}{n}{}^\nu = Q(\overset{\circ}{n}{}^\nu - B^\nu_c h^{cd}P_d), \quad Q = P^{-1}. \tag{4,10b}$$

La démonstration se fait par un calcul mécanique. On part des relations (2,14), (2,15) définissantes $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$, $\overset{\circ}{n}{}^\nu$.

Théorème (4,4). *En effectuant la transformation* $^*t_\nu = Pt_\nu$, *la connexion* $\{^{c}_{ab}\}$ (*voir* (4,3)) *et le vecteur* m^ν *lié à cette connexion se transforment selon*

$$^*\{^{c}_{ab}\} = \{^{c}_{ab}\} + \tfrac{1}{2}(\delta^c_a P_b + \delta^c_b P_a - h_{ab}h^{cd}P_d), \tag{4,11a}$$

$$^*m^\nu = Q\left(m^\nu - \frac{n-3}{2(n-1)} B^\nu_c h^{cd} P_d\right). \tag{4,11b}$$

La démonstration se fait par un calcul mécanique.

On obtient de la formule (4,11b) un résultat rémarquable.

Théorème (4,5). *Pour* X_2 *dans* A_3 *la direction du vecteur affinonormal* m^ν *lié à la connexion* $\{^{c}_{ab}\}$ *est indépendante de la transformation* $^*t_\nu = Pt_\nu$.

Démonstration. Pour $n = 3$ on obtient immédiatement de (4,11b)

$$^*m^\nu = Qm^\nu.$$

Théorème (4,6). *En effectuant la transformation* $^*t_\nu = Pt_\nu$, *les vecteurs* M_a, N_a *déterminés par* (4,5b), (4,5c) *se transforment selon*

$$^*M_a = M_a + P_a, \tag{4,12a}$$

$$^*N_a = N_a + P_a, \tag{4,12b}$$

et leur différence est le vecteur R_a défini par (4,9).

Démonstration. On obtient, en raison des relations (4,10a), (4,11a),

$$^*\{^c_{ab}\} - {}^*\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = \{^c_{ab}\} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + \tfrac{1}{2}(\delta^c_a P_b + \delta^c_b P_a + h_{ab}h^{cd}P_d),$$

ou bien (voir (4,5a))

$$^*T^c_{ab} = T^c_{ab} + \tfrac{1}{2}(\delta^c_a P_b + \delta^c_b P_a + h_{ab}h^{cd}P_d).$$

Il résulte immédiatement de la dernière relation

$$^*T^b_{ab} = T^b_{ab} + \frac{n+1}{2}P_a,$$

$$^*h_{ab}{}^*h^{ed}{}^*T^b_{ed} = h_{ab}h^{ed}T^b_{ed} + \frac{n+1}{2}P_a.$$

En introduisant les symboles M_a, N_a (voir (4,5b), (4,5c)) on peut ramener les relations précédentes à la forme (4,12).

Pour démontrer le reste du théorème, effectuons aux équations (4,6) la multiplication par h^{ac}. On obtient

$$-T^d_{ca}h^{ac}h_{bd} + T^c_{cb} = B^{\alpha\beta\gamma}_{abc}h^{ac}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}t_\delta.$$

Donc, à cause de (4,5b), (4,5c), (4,9),

$$M_b - N_b = R_b. \tag{4,13}$$

Remarque 6. On peut remarquer que la différence $M_a - N_a$ est un vecteur invariant par rapport à la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$. D'après (4,13) le vecteur R_a est alors indépendant du choix du vecteur tangent t_ν.[20])

Dans le paragraphe suivant nous emploierons les résultats précédents pour la construction du vecteur affinonormal à direction invariante et pour la construction de la connexion invariante dans X_{n-1} par rapport à la transformation du vecteur tangent t_ν.[21])

5. La classe des connexions invariantes induites dans A_{n-1}.

Nous allons maintenant résoudre le problème de la construction d'une connexion induite invariante par rapport à la transformation du vecteur tangent t_ν.[22]) Posons d'abord la question, à quelles conditions doit satisfaire le vecteur v_a dans les équations (2,1), définissantes le vecteur affinonormal n^ν, donc dans les équations

[20]) Voir la démonstration du théorème (4,2).

[21]) La transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$.

[22]) Il s'agit de la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$.

$$n^\nu t_\nu = 1, \; n^\nu \nabla_a t_\nu = v_a,$$
pour que la direction de n^ν soit invariante.[22] Le théorème suivant donne la réponse.

Théorème (5,1). Pour que la direction du vecteur affinonormal n^ν, déterminé par les équations

$$n^\nu t_\nu = 1, \tag{5,1a}$$
$$n^\nu \nabla_a t_\nu = v_a, \tag{5,1b}$$

soit invariante par rapport à la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$, il faut et il suffit que le vecteur v_a se transforme selon

$$^*v_a = v_a + P_a, \; P_a = \partial_a \log|P|, \tag{5,2}$$

par rapport à la même transformation.

Démonstration. Supposons d'abord que la direction du vecteur affinonormal n^ν soit invariante,[22] c'est-à-dire,

$$^*n^\nu = Qn^\nu. \tag{5,3}$$

En raison de la transformation considérée

$$\nabla_a {}^*t_\nu = \nabla_a Pt_\nu = t_\nu \partial_a P + P\nabla_a t_\nu$$

et alors, à cause de (5,3), (5,1),

$$^*v_a = {}^*n^\nu \nabla_a {}^*t_\nu = Qn^\nu(t_\nu \partial_a P + P\nabla_a t_\nu) = v_a + P_a.$$

Soit maintenant le vecteur v_a tel que la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$ le transforme en

$$^*v_a = v_a + P_a.$$

En tenant compte de cette relation et de (1,10) on obtient de l'équation

$$^*n^\nu \nabla_a {}^*t_\nu = {}^*v_a,$$
$$Q(n^\nu + s^\nu)(t_\nu \partial_a P + P\nabla_a t_\nu) = v_a + P_a,$$

ou bien (car $s^\nu t_\nu = 0$)

$$P_a + v_a + s^\nu \nabla_a t_\nu = v_a + P_a,$$

d'où

$$s^\nu \nabla_a t_\nu = 0.$$

Parce que le vecteur s^ν satisfait aussi à l'équation $s^\nu t_\nu = 0$ et parce que le déterminant $[\nabla_1 t_\nu, \nabla_2 t_\nu, \ldots, \nabla_{n-1} t_\nu, t_\nu] \neq 0$ (voir le théorème (1,1)), il en résulte $s^\nu = 0$.

Donc

$$^*n^\nu = Qn^\nu.$$

Théorème (5,2). *Soit n^ν un vecteur affinonormal à direction invariante. La connexion induite par ce vecteur est indépendante du choix du vecteur tangent t_ν[23].)*

---

[23]) C'est-à-dire, invariante par rapport à la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$.

Démonstration. Soit, d'après la supposition du théorème, le vecteur affinonormal n^ν tel qu'il se transforme selon

$$*n^\nu = Q n^\nu, \quad Q = P^{-1}.$$

La connexion induite par ce vecteur est, en raison de (2,7), (2,14),

$$\Gamma^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab} h^{cd} v_d,$$

où

$$v_d = n^\nu \nabla_d t_\nu.$$

Par la transformation $*t_\nu = P t_\nu$ les objets $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$, h_{ab}, h^{ab}, v_d deviennent (voir (4,10a), (2,12) et le théorème (5,1))

$$*\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} - h_{ab} h^{cd} P_d, \quad *h_{ab} = P h_{ab}, \quad *h^{ab} = Q h^{ab},$$
$$*v_a = v_a + P_a;$$

donc

$$*\Gamma^c_{ab} = *\overset{\circ}{\Gamma}{}^e_{ab} + *h_{ab} *h^{cd} *v_d = \Gamma^c_{ab}.$$

Remarque 7. Il est maintenant facile de construire un vecteur affinonormal n^ν à direction invariante et la connexion invariante par rapport à la transformation du vecteur tangent. Il suffit pour cela de connaître dans X_{n-1} un vecteur v_a qui, en raison de la transformation $*t_\nu = P t_\nu$, se transforme selon (5,2). Mais nous avons déjà construit des vecteurs ayant cette propriété. Ce sont les vecteurs M_a, N_a déterminés au paragraphe précédent par (4,5b), (4,5c). Nous allons employer d'abord le vecteur M_a.

Théorème (5,3). *Les éléments*

$$\underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab} h^{cd} M_d, \tag{5,3}$$

où M_d est déterminé par (4,5b), *sont des composantes de la connexion invariante*[23]) *dans A_{n-1}. Le vecteur affinonormal $\underset{\circ}{n}{}^\nu$ lié à la connexion $\underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab}$ induit cette connexion et satisfait aux équations suivantes:*

$$\underset{\circ}{n}{}^\nu t_\nu = 1, \quad \underset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu = M_a.$$

La direction du vecteur $\underset{\circ}{n}{}^\nu$ est indépendante du choix du vecteur tangent t_ν.

Démonstration. It est clair, en raison du théorème (3,3), que les éléments $\underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab}$ sont des composantes d'une certaine connexion en X_{n-1}, pour laquelle existe un certain vecteur $\underset{\circ}{n}{}^\nu$ qui la induit. Ce vecteur affinonormal $\underset{\circ}{n}{}^\nu$ est le vecteur lié à cette connexion (voir la démonstration de la suffisance de la condition du théorème (3,3)), alors

$$\underset{\circ}{n}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1} (B^\nu_c \underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b). \tag{5,5}$$

De la relation (5,5) on obtient facilement les équations (5,4). Le vecteur

M_a se transformant selon (4,12a) on peut appliquer les théorèmes (5,1) et (5,2). Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 8. Dans le cas général on peut obtenir une autre connexion invariante induite à l'aide du vecteur N_a défini par (4,5b). Par le procédé analogue au précédent on parvient à la connexion invariante

$$\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}N_d. \tag{5,3*}$$

Mais on peut de même construire une certaine classe des connexions invariantes dont les connexions (5,3), (5,3*) ne sont que des cas spéciaux.

Théorème (5,4). *Soit R_b le vecteur déterminé par (4,9) et $k = k(\eta^a)$ un scalaire arbitraire dans X_{n-1} et invariant par rapport à la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$. La connexion invariante*

$$\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} = \underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab} - kh_{ab}h^{cd}R_d \tag{5,6}$$

est la connexion induite par le vecteur affinonormal $\underset{k}{n}{}^\nu$ satisfaisant aux relations

$$\underset{k}{n}{}^\nu = \underset{\circ}{n}{}^\nu - kR^\nu, \tag{5,7}$$

où

$$R^\nu = \frac{2}{n+1} B^{\alpha\beta\gamma\nu}_{abcd} h^{ac}h^{bd}R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} t_\delta = B^\nu_d h^{bd} R_b. \tag{5,7a}$$

La direction du vecteur $\underset{k}{n}{}^\nu$ est indépendante du choix du vecteur tangent t_ν.

Démonstration. Il est bien clair que les $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$ sont des composantes d'une connexion dans X_{n-1}. Cette connexion est invariante, à cause des formules (2,12) et du théorème (5,3). En tenant compte de (5,3) on peut mettre la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$ sous la forme

$$\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}(M_d - kR_d).$$

Le vecteur affinonormal lié à la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$, c'est-à-dire le vecteur

$$\underset{k}{n}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c \underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b), \tag{5,8}$$

a la direction invariante[24]) et induit la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$ dans A_{n-1}. C'est une conséquence du théorème (3,3). On obtient immédiatement de la formule (5,8) la relation (5,7) en substituant dans (5,8) les éléments $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$ au côté droit de (5,6).

[24]) Car $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$ est invariante.

Définition 7. *Nous appellerons toutes les connexions de l'espace X_{n-1} aux composantes* (5,6), *où $k = k(\eta^a)$ est un scalaire arbitraire et indépendant du choix du vecteur tangent t_ν,*[25]) *la classe des connexions invariantes induites dans X_{n-1}.*

Remarque 9. On constate facilement que les connexions $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}, \underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}$ appartiennent à la classe des connexions invariantes induites pour le choix $k = 0$, $k = 1$. Il est évident que dans le cas général (c'est, à cause de la convention II, le cas où $R_b \neq 0$) la classe considérée renferme une infinité de connexions invariantes. Dans le cas $R_b \equiv 0$ les formules (5,6) déterminent une seule connexion $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$ (p. ex. dans l'espace affinoeuclidien E_n).

Définition 8. *La connexion $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$, déterminée par* (5,3), *est dite la connexion principale de la classe des connexions invariantes induites. Le vecteur affinonormal $\underset{0}{n}{}^\nu$ lié à cette connexion et induisant cette connexion dans A_{n-1} est dit le vecteur affinonormal principal.*

Théorème (5,5). *La connexion principale $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$ et la connexion invariante*[26]) *introduite par* V. Hlavatý[27])

$$\overset{0}{\Gamma}{}^c_{ab} + \frac{1}{n+1} h_{ab} h^{cd} \mathfrak{h}^{-1\prime} \overset{0}{\nabla}_d \mathfrak{h}, \quad \text{où } \mathfrak{h} = [h_{ab}], \tag{5,9}$$

sont identiques.

Démonstration. Par un calcul mécanique on vérifie la relation

$$\left\{{c \atop ab}\right\} - \overset{0}{\Gamma}{}^c_{ab} = \tfrac{1}{2} h^{cd} ({}'\overset{0}{\nabla}_a h_{bd} + {}'\overset{0}{\nabla}_b h_{ad} - {}'\overset{0}{\nabla}_d h_{ab}),$$

où ${}'\overset{0}{\nabla}_a$ est le vecteur symbolique de la dérivée covariante appartenante à la connexion innée $\overset{0}{\Gamma}{}^c_{ab}$. On obtient de la dernière relation et de (4,5a), (4,5b)

$$M_a = \frac{2}{n+1} T^{\,c}_{ac} = \frac{2}{n+1} \left(\left\{{c \atop ac}\right\} - \overset{0}{\Gamma}{}^c_{ac}\right) = \frac{1}{n+1} h^{cd}\, {}'\overset{0}{\nabla}_a h_{cd}.$$

Mais[28])

$$h^{cd\prime} \overset{0}{\nabla}_a h_{cd} = \mathfrak{h}^{-1} \overset{0}{\nabla}{}'_a \mathfrak{h},$$

où $\mathfrak{h}$ est le déterminant du tenseur h_{ab}.

Donc

$$M_a = \frac{1}{n+1} \mathfrak{h}^{-1\prime} \overset{0}{\nabla}_a \mathfrak{h}.$$

Le reste de la démonstration est évident.

---

[25]) P. ex. des constantes.

[26]) Le mot „invariant" signifie dans nos considérations toujours „invariant par rapport à la transformation $^*t_\nu = P t_\nu$".

[27]) Voir V. Hlavatý: Zur Konformgeometrie, Koninklijke Akademie Amsterdam, 1935, p. 741 (4), l'équation (3,3).

[28]) Voir Schouten-Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, p. 82 (7,11ß). Groningen-Batavia 1935.

6. La classe des connexions de Weyl dans X_{n-1}.

A l'aide du vecteur M_a, déterminé par (4,5b), on peut construire une autre connexion intrinsèque dans X_{n-1} et invariante par rapport à la transformation du vecteur tangent t_ν. C'est la connexion de WEYL.

Théorème (6,1). *Les éléments* $\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab}$ *définis par*

$$\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} = \left\{ {c \atop ab} \right\} - \tfrac{1}{2}\,(\delta^c_a M_b + \delta^c_b M_a - h_{ab} h^{cd} M_d) \tag{6,1}$$

sont des composantes d'une connexion de WEYL *dans* X_{n-1} (*indépendante du choix du vecteur tangent* t_ν).

Démonstration. En partant des relations (4,11a), (4,12a) on constate facilement que $*\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} = \underset{0}{\Psi}{}^c_{ab}$, c'est-à-dire, la connexion (6,1) ne dépend pas de la transformation $*t_\nu = Pt_\nu$. Il résulte de la transformation (4,12) du vecteur M_a que la connexion (6,1) est une connexion de WEYL.

Théorème (6,2). *Soit* R_b *le vecteur déterminé par* (4,9) *et* $l = l(\eta^a)$ *un scalaire arbitraire invariant.*[26]) *La connexion*

$$\underset{l}{\Psi}{}^c_{ab} = \underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} + \tfrac{1}{2}(\delta^c_a R_b + \delta^c_b R_a - h_{ab} h^{cd} R_d) \tag{6,2}$$

est une connexion invariante[26]) *dans* X_{n-1}. *Le vecteur affinonormal* $\underset{l}{m}{}^\nu$ *lié à cette connexion est à direction invariante et peut être ramené à la forme*

$$\underset{l}{m}{}^\nu = \underset{0}{m}{}^\nu - \frac{n-3}{2(n-1)} R^\nu, \tag{6,3}$$

où $\underset{0}{m}{}^\nu$ *est le vecteur affinonormal lié à la connexion* $\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab}$ (*voir* (6,1)) *et* R^ν *est déterminé par* (5,7a).

Démonstration. On sait que les objets $\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab}$, l, R_a sont invariants. Il en résulte que les éléments (6,2) sont de même invariants. Ces éléments sont des composantes d'une connexion dans X_{n-1}, car $\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab}$ est une connexion et $\frac{1}{2}l(\delta^c_a R_b + \delta^c_b R_a - h_{ab} h^{cd} R_d)$ est un tenseur dans X_{n-1}. On obtient pour le vecteur affinonormal $\underset{l}{m}{}^\nu$ lié à la connexion (6,2), à cause de la définition 6 et des relations (1,12), (4,9),

$$\underset{l}{m}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}\,(B^\nu_c \underset{l}{\Psi}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) = \frac{h^{ab}}{n-1}\,(B^\nu_c \underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) +$$
$$+ \frac{l}{2(n-1)} B^\nu_c h^{ab}(\delta^c_a R_b + \delta^c_b R_a - h_{ab} h^{cd} R_d) =$$
$$= \underset{0}{m}{}^\nu - \frac{n-3}{2(n-1)} B^\nu_c h^{cd} R_d = \underset{0}{m}{}^\nu - \frac{n-3}{2(n-1)} R^\nu.$$

Il est clair que le vecteur $\underset{0}{m}{}^\nu$ est à direction invariante, car il s'agit d'un vecteur affinonormal lié à une connexion invariante.

Remarque 10. En posant $l = 0$ on obtient de (6,3) la connexion $\underset{\circ}{\Psi}{}^{c}_{ab}$ définie dans le théorème (6,1).

Définition 9. *Nous appellerons toutes les connexions de l'espace X_{n-1} aux composantes* (6,2), *où $l = l(\eta^a)$ est un scalaire arbitraire et invariant,*[26]) *la classe des connexions de* WEYL *dans X_{n-1}.*

Théorème (6,3). *Dans l'espace affin à trois dimensions A_3 il existe un seul vecteur affinonormal à direction invariante de l'espace X_2 lié aux connexions de* WEYL *dans X_2. C'est le vecteur*[29])

$$m^\nu = \tfrac{1}{2} h^{ab}(B^\nu_c \{^{\,c}_{ab}\} - \nabla_a B^\nu_b).$$

Démonstration. Pour $n = 3$ on obtient de (6,3) $\underset{l}{m}{}^\nu = \underset{\circ}{m}{}^\nu$ pour chaque scalaire l. On trouve pour le vecteur $\underset{\circ}{m}{}^\nu$, en raison de (6,1), (1,12), (4,4) et dans le cas $n = 3$,

$$\underset{\circ}{m}{}^\nu = \tfrac{1}{2} h^{ab}(B^\nu_c \underset{\circ}{\Psi}{}^{c}_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) = \tfrac{1}{2} h^{ab}(B^\nu_c \{^{\,c}_{ab}\} - \nabla_a B^\nu_b) -$$
$$- \tfrac{1}{4}(\delta^c_a M_b + \delta^c_b M_a - h_{ab} h^{cd} M_d)\, h^{ab} B^\nu_c = m^\nu.$$

Théorème (6,4). *Soit $\underset{l}{\Psi}{}^{c}_{ab}$ une connexion*[30]) *appartenante à la classe des connexions de* WEYL *dans X_{n-1} et soit $\underset{l}{m}{}^\nu$ le vecteur affinonormal lié à cette connexion. La connexion $\underset{l}{\bar{\Lambda}}{}^{c}_{ab}$ induite dans X_{n-1} par le vecteur $\underset{l}{m}{}^\nu$ appartient ensuite à la classe des connexions invariantes induites* (5,6) *dans X_{n-1}: cela veut dire*

$$\underset{l}{\bar{\Lambda}}{}^{c}_{ab} = \underset{k}{\Lambda}{}^{c}_{ab}, \quad k = \frac{n + 1 + (n-3)\, l}{2(n-1)}. \tag{6,4}$$

Démonstration. Pour le vecteur affinonormal lié $\underset{l}{m}{}^\nu$ on a, à cause de la définition,

$$\underset{l}{m}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c \underset{l}{\Psi}{}^{c}_{ab} - \nabla_a B^\nu_b).$$

Ce vecteur affinonormal induit dans X_{n-1} une certaine connexion $\underset{l}{\bar{\Lambda}}{}^{c}_{ab}$. On obtient pour cette connexion, d'après le théorème (3,2),

$$\underset{l}{\bar{\Lambda}}{}^{c}_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab} + \frac{1}{n-1} h_{ab} h^{ed} (\underset{l}{\Psi}{}^{c}_{ed} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ed}).$$

En tenant compte des équations (6,2), (6,1), (4,5), (4,13) on obtient par un calcul un peu long

$$\underset{l}{\bar{\Lambda}}{}^{c}_{ab} = \underset{\circ}{\Lambda}{}^{c}_{ab} - \frac{n + 1 + (n-3)\, l}{2(n-1)} h_{ab} h^{cd} R_d.$$

---

[29]) Voir le théorème (4,5).
[30]) l désigne un scalaire fixe.

Donc la connexion $\underset{l}{\Lambda}{}^c_{ab}$ est contenue dans la classe des connexions invariantes (5,6) pour le choix

$$k = \frac{n+1+(n-3)\,l}{2(n-1)}.$$

Théorème (6,5). *Soit $n \neq 3$. La classe des vecteurs affinonormaux liés aux connexions de la classe des connexions de* WEYL *(6,2) et la classe des vecteurs affinonormaux liés aux connexions de la classe des connexions invariantes induites* (5,6) *sont identiques.*

Démonstration. Soit $\underset{l}{\Psi}{}^c_{ab}$ une connexion arbitraire de la classe (6,2). Le vecteur affinonormal $\underset{l}{m}{}^\nu$ lié à cette connexion induit, en raison du théorème précédent, dans X_{n-1} la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$, où

$$k = \frac{n+1+(n-3)\,l}{2(n-1)}, \tag{6,5}$$

qui appartient à la classe des connexions invariantes induites (5,6). Mais le vecteur $\underset{k}{n}{}^\nu$, satisfaisant à la relation (5,7) (k est déterminé par (6,5)), c'est-à-dire le vecteur[31])

$$\underset{k}{n}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}\,(B^\nu_c \underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b),$$

induit de même la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$. Parce que les deux vecteurs $\underset{l}{m}{}^\nu$, $\underset{k}{n}{}^\nu$ induisent dans X_{n-1} la même connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$, il suit de la formule de GAUSS (2,6)

$$\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} B^\nu_c = h_{ab} \underset{l}{m}{}^\nu + \nabla_a B^\nu_b,$$

$$\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab} B^\nu_c = h_{ab} \underset{k}{n}{}^\nu + \nabla_a B^\nu_b;$$

d'où

$$h_{ab}(\underset{l}{m}{}^\nu - \underset{k}{n}{}^\nu) = 0.$$

Il s'ensuit (comme h_{ab} est du rang $n-1$)

$$\underset{l}{m}{}^\nu = \underset{k}{n}{}^\nu,$$

où k est déterminé par (6,5). Donc, à chaque scalaire l appartient un seul scalaire k et réciproquement (car $n \neq 3$). Il résulte alors des considérations précédentes que chaque vecteur affinonormal $\underset{l}{m}{}^\nu$ lié à la connexion $\underset{l}{\Psi}{}^c_{ab}$ de la classe des connexions de WEYL est égal à un vecteur affinonormal bien déterminé de la classe (5,7) et réciproquement.

---

[31]) Donc le vecteur affinonormal lié à la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^c_{ab}$.

Remarque 11. Le cas $n = 3$ est en ce sens exceptionnel. Il existe, en raison du théorème (6,3), un seul vecteur affinonormal commun, lié aux connexions de la classe de WEYL. La relation (6,5) donne dans ce cas $k = 1$. Le vecteur m^ν, déterminé par (4,4), est alors égal au vecteur $\underset{1}{n}^\nu$ de la classe des vecteurs (5,7); le vecteur $\underset{1}{n}^\nu$ est le vecteur affinonormal lié à la connexion $\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}$, déterminée par (5,3*). Les considérations réciproques, dont nous avons parlé plus haut, n'ont pas lieu ici.

Théorème (6,6). *La classe des connexions de* WEYL (6,2) *et la classe des connexions invariantes induites* (5,6) *ne sont pas identiques dans le cas général*[32]).

Démonstration. Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que dans la classe des connexions de WEYL (6,2) il existe au moins une connexion qui n'est pas identique avec aucune de la classe des connexions invariantes induites (5,6). Prenons par exemple la connexion $\underset{1}{\Psi}{}^c_{ab}$; c'est la connexion de la classe (6,2) pour le choix $l = 1$. Supposons qu'il existe dans la classe des connexions invariantes induites (5,6) une certaine connexion $\underset{m}{\Lambda}{}^c_{ab}$ égale à la connexion $\underset{1}{\Psi}{}^c_{ab}$. Supposons alors

$$\underset{1}{\Psi}{}^c_{ab} = \underset{m}{\Lambda}{}^c_{ab}. \tag{α}$$

Le vecteur affinonormal $\underset{1}{m}^\nu$, lié à la connexion $\underset{1}{\Psi}{}^c_{ab}$, est, à cause du théorème (6,5), égal au vecteur $\underset{1}{n}^\nu$, lié à la connexion $\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}$ (car la formule (6,5) nous donne dans ce cas $k = 1$). Alors $\underset{1}{m}^\nu = \underset{1}{n}^\nu$. Mais le vecteur $\underset{1}{n}^\nu$ induit dans X_{n-1}, en raison du théorème (5,4), la connexion $\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}$. La formule de GAUSS nous donne, en raison de la supposition et du théorème (5,4),

$$\underset{m}{\Lambda}{}^c_{ab} B^\nu_c = \nabla_a B^\nu_b + h_{ab} \underset{1}{m}^\nu$$

$$\underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab} B^\nu_c = \nabla_a B^\nu_b + h_{ab} \underset{1}{m}^\nu,$$

d'où
$$B^\nu_c(\underset{m}{\Lambda}{}^c_{ab} - \underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}) = 0.$$

Il s'ensuit
$$\underset{m}{\Lambda}{}^c_{ab} = \underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab}.$$

Il en résulte: si la supposition (α) était valable, cela entraînerait nécessairement $m = 1$. Il suffit donc d'étudier la différence

$$\underset{1}{G}{}^c_{ab} = \underset{1}{\Lambda}{}^c_{ab} - \underset{1}{\Psi}{}^c_{ab}. \tag{β}$$

[32]) Voir convention II.

On obtient pour cette différence, en tenant compte de (5,6), (6,2), (5,3), (6,1), (4,5a), (4,13),

$$\underset{1}{G}{}^{c}_{ab} = \underset{0}{\Lambda}{}^{c}_{ab} - \underset{0}{\Psi}{}^{c}_{ab} - \tfrac{1}{2}(\delta^{c}_{a}R_{b} + \delta^{c}_{b}R_{a} + h_{ab}h^{cd}R_{d}) = \overset{0}{\Gamma}{}^{c}_{ab} - \left\{ {c \atop ab} \right\} -$$
$$- \tfrac{1}{2}[\delta^{c}_{a}(R_{b} - M_{b}) + \delta^{c}_{b}(R_{a} - M_{a}) + h_{ab}h^{cd}(R_{d} - M_{d})] =$$
$$= - T^{c}_{ab} + \tfrac{1}{2}(\delta^{c}_{a}N_{b} + \delta^{c}_{b}N_{a} + h_{ab}h^{cd}N_{d}).$$

On vérifie maintenant facilement la relation

$$\underset{1}{G}{}^{c}_{a[b}h_{d]c} = - T^{c}_{a[b}h_{d]c}.$$

A cause des équations (4,6) on peut écrire la dernière relation comme suit

$$2\underset{1}{G}{}^{d}_{c[a}h_{b]d} = B^{\alpha\beta\gamma}_{abc}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta}t_{\delta}. \qquad (\gamma)$$

Or le tenseur $B^{\alpha\beta\gamma}_{abc}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta}t_{\delta}$ est en général différent de zéro et donc, dans le cas général,

$$\underset{1}{G}{}^{c}_{ab} \neq 0,$$

ce qui entraîne, d'après (β),

$$\underset{1}{\Lambda}{}^{c}_{ab} \neq \underset{1}{\Psi}{}^{c}_{ab};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 12. Nous avons pris, pour démontrer le théorème précédent, la connexion $\underset{1}{\Psi}{}^{c}_{ab}$. Mais on peut partir d'une connexion arbitraire $\underset{l}{\Psi}{}^{c}_{ab}$ de la classe de Weyl. Le calcul montre que, si la connexion Ψ^{c}_{ab} était égale à quelque connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^{c}_{ab}$ de la classe des connexions invariantes induites, elle devrait nécessairement coincider avec la connexion $\underset{k}{\Lambda}{}^{c}_{ab}$, où $k = \dfrac{n+1+(n-3)\,l}{2(n-1)}$. Par un procédé analogue au précédent on obtiendrait pour la différence $\underset{l}{G}{}^{c}_{ab} = \underset{k}{\Lambda}{}^{c}_{ab} - \underset{l}{\Psi}{}^{c}_{ab}$:

$$2\underset{l}{G}{}^{d}_{c[a}h_{b]d} = B^{\alpha\beta\gamma}_{abc}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\cdot\cdot\cdot\delta}t_{\delta} - \frac{n+1}{n-1}(l-1)\,R_{[a}h_{b]c}.$$

Pour $l = 1$ on obtient la relation (γ).

A la fin de ce paragraphe nous résumons brièvement les résultats ici obtenus:

Sous les suppositions données il existe, en général, deux classes des connexions invariantes pour l'espace X_{n-1} dans A_n. Ce sont:

I. la classe des connexions invariantes induites (5,6),

II. la classe des connexions de Weyl (6,2).

Ces deux classes ne sont pas nécessairement identiques. Les vecteurs *affinonormaux liés aux connexions de la classe I sont à direction invariante et induisent des connexions invariantes de la même classe. Les vecteurs affinonormaux liés aux connexions de la classe II sont de la classe des vecteurs affinonormaux liés à la classe des connexions I.*

7. La connexion équivoluminaire dans A_n.

Supposons que le transport (la connexion) dans A_n, déterminé par les fonctions $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(\xi^{\alpha})$, soit équivoluminaire, c'est-à-dire,

$$V_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = 0.\text{[33]} \tag{7,1}$$

Théorème (7,1). *Soit la connexion dans A_n équivoluminaire. Le vecteur M_a déterminé par* (4,5b) *est ensuite un vecteur gradient.*

Démonstration. On obtient de (4,5b)

$$\partial_{[b}M_{a]} = \frac{2}{n+1}\left(\partial_{[b}\{{}_{a]c}^{c}\} - \partial_{[b}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{a]c}\right).$$

Parce que $\{{}_{ab}^{c}\}$ est la connexion riemanienne du tenseur h_{ab}, il s'ensuit[34])

$$\partial_{[b}\{{}_{a]c}^{c}\} = 0.$$

En tenant compte du théorème (2,8) on déduit

$$2\partial_{[b}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{a]c} = {}'\overset{\circ}{V}_{ba} = 0;$$

alors
$$\partial_{[b}M_{a]} = 0.$$

Il est évident que ce résultat a lieu pour chaque choix du vecteur tangent t_{ν}.

Remarque 13. Le vecteur M_a étant le vecteur gradient on peut construire le scalaire

$$p = e^{-\int_{[\eta_0^a]}^{[\eta^a]} M_b d\eta^b}, \tag{7,2}$$

où $[\eta_0^a]$ est un point fixe de l'espace X_{n-1} (dans le domaine considéré).

Théorème (7,2). *Le scalaire p, déterminé par* (7,2), *se transforme par la transformation $^*t_{\nu} = Pt_{\nu}$ comme il suit*

$$^*p = cpQ, \text{ où } c = \text{const.} \neq 0,\ Q = P^{-1}. \tag{7,3}$$

Démonstration. D'après (4,12a)

$$^*p = e^{-\int_{[\eta_0^a]}^{[\eta^a]} {}^*M_b d\eta^b} = e^{-\log|P| + \log|P_0| - \int_{[\eta_0^a]}^{[\eta^a]} M_b d\eta^b} = \frac{P_0}{P}p = P_0Qp,$$

où
$$P_0 = P(\eta_0^a) \neq 0.$$

---

33) Voir p. ex. J. A. SCHOUTEN: Der Ricci-Kalkül, p. 90. Berlin 1924.

Posons encore $P_0 = c$ et le théorème est démontré.

Théorème (7,3). *Le vecteur u_λ défini par l'équation*

$$u_\lambda = pt_\lambda, \tag{7,4}$$

où t_λ est un vecteur tangent arbitraire et p est le scalaire déterminé par (7,3), *satisfait aux équations*

$$B_a^\lambda u_\lambda = 0. \tag{7,5}$$

Ce vecteur u_λ se transforme, en raison de la transformation $^*t_\nu = Pt_\nu$, selon

$$^*u_\lambda = cu_\lambda,\quad c = const. \neq 0. \tag{7,6}$$

Démonstration. La relation est, à cause de la définition (7,4) et de (1,4), évidente. La relation (7,6) est une conséquence de (7,4), (7,3).

Définition 10. *Le vecteur u_ν, déterminé par* (7,4), *sera dit le vecteur tangent normalisé.*

Remarque 14. Le vecteur u_λ est donc déterminé à un facteur multiplicatif constant $c \neq 0$ près. A l'aide de ce vecteur on peut définir le tenseur

$$g_{ab} = B_a^\alpha \nabla_b u_\alpha. \tag{7,7}$$

On constate, en raison de (7,4), (7,7), (1,4), que

$$g_{ab} = ph_{ab}. \tag{7,8}$$

Par la transformation du vecteur tangent le tenseur g_{ab} devient

$$^*g_{ab} = cg_{ab},\quad c = \text{const.} \neq 0. \tag{7,9}$$

Le rang du tenseur g_{ab} est $n - 1$, car le rang du tenseur h_{ab} est $n - 1$ (d'après la supposition I) et le scalaire p est différent de zéro. On peut donc construire le tenseur g^{ab} qui satisfait aux équations

$$g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a, \tag{7,10}$$

$$g^{ab} = p^{-1}h^{ab}. \tag{7,11}$$

Ces résultats nous amènent au théorème suivant:

Théorème (7,4). *Soit la connexion dans A_n équivoluminaire. La connexion de l'espace X_{n-1} aux composantes*

$$\underset{u}{\overset{\circ}{\Gamma}}{}^c_{ab} = g^{cd}(\nabla_d u_\lambda)\, \nabla_a B_b^\lambda \tag{7,12}$$

est indépendante du choix du vecteur tangent t_ν. Elle est égale à la connexion $\underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab}$, déterminée par (5,3). *Le vecteur $\underset{u}{n^\nu}$ ainsi défini*

$$\underset{u}{n^\nu} = \frac{g^{ab}}{n-1}(B_c^\nu \underset{u}{\overset{\circ}{\Gamma}}{}^c_{ab} - \nabla_a B_b^\nu) \tag{7,13a}$$

[34]) SCHOUTEN-STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, p. 144 (11,25b). Groningen-Batavia 1935.

satisfait aux équations

$$\underset{u}{n^\nu} u_\nu = 1, \ \underset{u}{n^\nu} \nabla_a u_\nu = 0 \tag{7,13b}$$

et sa direction est invariante par rapport à la transformation $*t_\nu = Pt_\nu$.

Démonstration. On obtient de (7,12), (7,11), (7,4), (2,14), (1,11)

$$\underset{u}{\overset{\circ}{\Gamma}}{}^c_{ab} = p^{-1}h^{cd}(\nabla_d pt_\nu)\, \nabla_a B^\nu_b = h^{cd}(\nabla_d t_\nu)\, \nabla_a B^\nu_b + \\ + t_\nu(\nabla_a B^\nu_b)\, h^{cd} p^{-1} \partial_d p = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} - h_{ab} h^{cd} p_d,$$

où $p_d = \partial_d \lg p$. Mais, d'après la définition (7,2),

$$p_d = -M_d \tag{7,14}$$

et donc (voir (5,3))

$$\underset{u}{\overset{\circ}{\Gamma}}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab} h^{cd} M_d = \underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab}.$$

La première affirmation du théorème est démontrée, car la connexion $\underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab}$ est invariante. En tenant compte du résultat précédent et de (7,11), (5,5) on obtient de (7,13a):

$$\underset{u}{n^\nu} = p^{-1} \frac{h^{ab}}{n-1} (B^\nu_c \underset{\circ}{\Lambda}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b) = p^{-1} \underset{\circ}{n^\nu}.^{35)}$$

Il s'ensuit, en raison de (7,4), (5,4), (7,14),

$$\underset{u}{n^\nu} u_\nu = p^{-1} \underset{\circ}{n^\nu} pt_\nu = 1,$$

$$\underset{u}{n^\nu} \nabla_a u_\nu = p^{-1} \underset{\circ}{n^\nu} \nabla_a (pt_\nu) = p^{-1}\partial_a p + \underset{\circ}{n^\nu} \nabla_a t_\nu = M_a - M_a = 0.$$

Remarque 15. Par un procédé analogue au précédent on peut démontrer que la connexion

$$\underset{u}{\{{}^{\,c}_{ab}\}} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \tag{7,15}$$

est invariante et égale à la connexion $\underset{\circ}{\Psi}{}^c_{ab}$ déterminée par (6,1). On peut dire brièvement que la connexion $\underset{\circ}{\Psi}{}^c_{ab}$ se réduit, pour le cas de la connexion équivoluminaire dans A_n, à la connexion riemanienne $\underset{u}{\{{}^{\,c}_{ab}\}}$. On peut aussi construire le vecteur $\underset{u}{m^\nu}$ d'après

$$\underset{u}{m^\nu} = \frac{g^{ab}}{n-1} (B^\nu_c \underset{u}{\{{}^{\,c}_{ab}\}} - \nabla_a B^\nu_b) \tag{7,16}$$

qui est à direction invariante et qui satisfait à l'équation

$$\underset{u}{m^\nu} u_\nu = 1.$$

---

[35]) $\underset{u}{n^\nu}$ est alors à direction invariante à cause du théorème (5,3).

On vérifie facilement que

$$\underset{u}{m}^{\nu} = p^{-1}\underset{\circ}{m}^{\nu}, \tag{7,17}$$

où $\underset{\circ}{m}^{\nu}$ est le vecteur affinonormal lié à la connexion $\underset{\circ}{\Psi}{}^{c}_{ab}$.

Définition 11. *Le vecteur $\underset{u}{n}^{\nu}$, déterminé par* (7,13a), *sera dit le vecteur affinonormal principal normalisé.*[36])

Théorème (7,5). *Le vecteur affinonormal principal normalisé $\underset{u}{n}^{\nu}$ est égal au vecteur affinonormal déduit par J. A. Schouten*[37]) *(au cas de la connexion équivoluminaire dans A_n).*

Démonstration. En tenant compte du théorème (6,5) et de la démonstration de ce théorème on déduit la relation

$$\underset{\circ}{n}^{\nu} = \underset{\circ}{m}^{\nu} + \frac{1}{n-1} h^{\nu\beta} h^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta} t_{\delta}, \tag{7,18}$$

où $h^{\nu\beta} = B^{\nu}_{a} B^{\beta}_{b} h^{ab}$ et $\underset{\circ}{n}^{\nu}(\underset{\circ}{m}^{\nu})$ est le vecteur affinonormal lié à la connexion $\underset{\circ}{\Lambda}{}^{c}_{ab}(\underset{\circ}{\Psi}{}^{c}_{ab})$ déterminée par (5,3) ((6,1)). En multipliant la relation (7,18) par p^{-1} (p est déterminé par (7,2)) on peut écrire cette relation, à cause de (7,4), (7,13a), (7,17), (7,16),

$$\begin{aligned}\underset{u}{n}^{\nu} = \underset{u}{m}^{\nu} + \frac{1}{n-1} g^{\nu\beta} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta} u_{\delta} = \frac{g^{ab}}{n-1} (\underset{u}{\{^{\,c}_{ab}\}} B^{\nu}_{c} - \nabla_a B^{\nu}_{b}) + \\ + \frac{1}{n-1} g^{\nu\beta} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta} u_{\delta}, \text{ où } g^{\nu\beta} = B^{\nu}_{a} B^{\beta}_{b} g^{ab}.\end{aligned} \tag{7,19}$$

Posons

$$P_{ab}^{\cdot\cdot\,\nu} = \nabla_a B^{\nu}_{b} - B^{\nu}_{c} \underset{u}{\{^{\,c}_{ab}\}}.$$

Donc

$$\underset{u}{n}^{\nu} = -\frac{1}{n-1} g^{ab} P_{ab}^{\cdot\cdot\,\nu} + \frac{1}{n-1} g^{\nu\beta} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\,\delta} u_{\delta}.$$

Cette dernière relation est la définition du vecteur affinonormal de J. A. Schouten[37]) dans le cas de la connexion équivoluminaire dans A_n.

Remarque 16. On peut regarder la relation (7,4) comme une certaine transformation du vecteur tangent t_{ν}. Il en résulte que beaucoup de relations précédentes (p. ex. la formule de Gauss, les équations de Gauss et de Codazzi) sont valables en écrivant u_{λ} au lieu de t_{λ}, g_{ab} au lieu de h_{ab} e. t. c.

[36]) Voir la définition 8.

[37]) J. A. Schouten: Der Ricci-Kalkül, p. 145 (109a). Berlin 1924.

Normála a konexe pro nadplochu v prostoru afinním.

(Obsah předešlého článku.)

V afinním prostoru A_n o souřadnicích ξ^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) s danou konexí $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ je definována nadplocha X_{n-1} parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)$ ($a = 1, 2, \ldots, n - 1$). Autor se zabývá v tomto článku otázkou konstrukce normály pro tuto nadplochu a podává řešení za předpokladu, že hodnost tensoru h_{ab}, definovaného rovnicemi (1,11), jest $n - 1$. Zároveň s touto otázkou je diskutována otázka konexe indukované touto normálou (problém afinní indukce). Za uvedeného předpokladu je možno sestrojit dvě třídy konexí v X_{n-1} invariantních vůči transformaci $^*t_\nu = Pt_\nu$, kde t_ν je tečný vektor nadplochy X_{n-1}, $P \neq 0$ skalár v X_{n-1}, tedy konexí nezávislých na volbě faktoru tečného vektoru. Jsou to třídy konexí definovaných rovnicemi (5,6), (6,2). Definice těchto invariantních konexí vede k definici normál invariantního směru pro nadplochu X_{n-1}, tedy normál, jichž směr je nezávislý na transformaci $^*t_\nu = Pt_\nu$.