Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef R. Vaňaus

O významu rovnice paraboly

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 4, 181--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122647

O významu rovnice paraboly.

Sestavil

Dr. Jos. R. Vaňaus.

1.

Nikdy se s takovou jistotou nemůže ku pravému vniknutí v ducha mathematiky dráha klestiti a láska k této vědě buditi, než když se vnitřní souvislost všech pouček zevrubně vyloží a se ukáže, že ve vzorcích mathematických ještě jiné výsledky a pravdy se ukrývají, které někdy teprvé pomocí mnohých úsudků dovozovati třeba.

Výhoda z tohoto všestranného rozboru plynoucí jest dvojí. Že tu vidíme množství pravidel, pouček a výsledků v nepatrný, avšak téměř mluvící vzorec směstnaných, přivádíme tím myšlení své k přesnosti, určitosti a souvislosti. Vědomosti naše se utužují a zdokonalují. Že pak to, co dříve vzdáleno bylo a na oko různým se zdálo, posléze v jedno splývá a shoduje, to budí naši pozornost co nejživěji. Věc stává se nám zajímavější, uvádí myšlení v čilý tok, udržuje snahu všestranněji bádati a odhalené pravdy přiměřenými spůsoby přístupnějšími činiti. V tomto psychologicky důležitém zjevu skrývá se hlavní zárodek pokroku vědy mathematické a proto tuším již záhy má se k němu více přihlížeti zvláště při pružném duchu mladistvém. Není možno mnohdy takový rozbor v učební knize podati a aby mathematika i v tomto směru nejen se nezanedbávala, nýbrž ve své uznané přednosti vždy více vzkvétala, jest úlohou školy.

Na místo mnohých budiž tuto o jednom případě pojednáno.

Na zdání nepatrná rovnice paraboly chová v sobě celou nauku o rovnicích kvadratických a protož promluvíme tu o souvislosti rovnic druhého stupně o jedné neznámé s parabolou, co jejich geometrickým obrazem.

2.

Obyčejná rovnice paraboly při osnově souřadnic pravoúhlých

$$y^2 = 2px$$

dá se změniti na

$$x^2 = 2py, \tag{1}$$

když osnovu o 90° otočíme, tak aby osy na vzájem se vyměnily. Pošine-li se počátek souřadnic s vrchole paraboly do bodu (ξ, η), bude nová rovnice paraboly

$$(x + \xi)^2 = 2p(y + \eta)$$

neb

$$[x^2 + 2\xi x + \xi^2 - 2p\eta] : 2p = y, \tag{2}$$

kterouž všeobecně naznačiti lze tvarem

$$Ax^2 + Bx + C = y, \tag{3}$$

kde hodnoty veličin A, B, C z porovnání rovnic (2) a (3) snadno lze udati. Zvolí-li se pro krátkost stálá veličina $2p = 1$, bude

$$A = 1, \quad B = 2\xi, \quad C = \xi^2 - \eta, \tag{4}$$

a všeobecná rovnice paraboly, jejíž parametr béře se za 1, objevuje se pak v této podobě

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + Bx + C = y \\ x^2 + 2\xi x + \xi^2 - \eta = y \end{array}\right\} \tag{5}$$

neb

Rozborem rovnice (5) dochází se výsledků následujících: Pokud $(B = 2\xi) \lesssim 0$, nalezá se počátek souřadnic vůbec mimo osu paraboly; v ose může nalezati se jen tenkráte, když

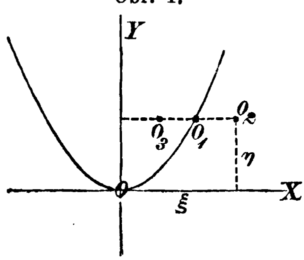
$$(B = 2\xi) = 0.$$

Ohledně veličiny $C = \xi^2 - \eta$ soudíme pak takto: je-li

$$C = 0 \text{ tedy } \xi^2 = \eta,$$

musí dle rovnice (1) počátek souřadnic býti zároveň bodem, paraboly, t. j. nachází se v obvodu paraboly (na př. v O_1 obr. 1.)

Obr. 1.



Je-li C veličina kladná, tedy $\xi^2 > \eta$, musí počátek souřadnic zevně paraboly (na př. v bodu O_2); a je-li konečně C veličinou zápornou, tedy $\xi^2 < \eta$, musí uvnitř položen býti (na př. v O_3). Zvláštních hodnot při tom může nabyti C tím, když $\eta = 0$, tedy $C = \xi^2$, čímž stanoveno, že počátek souřadnic nalezá se v přímce na osu paraboly kolmé a vrchole jejího se dotýkající; aneb když $C = \eta$, tedy $\xi = 0$, kterýžto případ má týž význam, jako při $B = 0$ již udáno bylo.

Majíce tyto úvahy na paměti budeme takto rozhodovati: Rovnice

$$x^2 \pm Bx + C = y \tag{6}$$

jest rovnice paraboly, když počátek souřadnic nalezá se zevně paraboly a mimo osu její. Osa úseček bude s parabolou ve dvou bodech se protínati, pokud (jak z podmínky $y = 0$ pro průsek s osou X z rovnice (6) je patrno)

$$\frac{B^2}{4} > C \text{ anebo } \xi^2 > \xi^2 - \eta,$$

t. j. pokud η o sobě jest veličinou kladnou; při $\eta = 0$ anebo $\frac{B^2}{4} = C$ dotýká se osa úseček vrchole paraboly a je-li η veličinou zápornou, tedy $\frac{B^2}{4} < C$, musí parabola nad osou úseček se rozprostírati, aniž by s ní jakýs bod společný míti mohla.

Ve všech třech případech osa paraboly a v prvním případu i průseky s osou X buď na straně negativních aneb positivních úseček budou se nalezati dle toho, je-li v rovnici (6) druhý člen Bx kladný, aneb záporný. Rovnice

$$x^2 \pm Bx - C = y \tag{7}$$

jest rovnicí paraboly, při níž počátek souřadnic nalezá se uvnitř paraboly a mimo osu její. Osa úseček musí tu nutně parabolu vždy ve dvou bodech protínati, z nichž jeden k positivní, druhý k negativní straně osy úseček bude položen.

Rovnice

$$x^2 \pm C = y \tag{8}$$

jest rovnicí paraboly, kde počátek souřadnic jest v ose její (pro $B = 2\xi = 0$) a to zevně paraboly, pokud člen C jest kladným, kteréž podmínce dle relace $C = -\eta$ vyhovuje se jenom zápornými hodnotami veličiny η, takže osa úseček zcela mimo parabolu jest, nemajíc s ní nic společného; anebo uvnitř paraboly, pokud člen C jest záporným a tedy osa úseček nad vrcholem paraboly, takže ji vždy ve dvou souměrných bodech protínati musí.

Kdyby v rovnici (8) snad i $C = 0$, plyne z ní obyčejná vrcholová rovnice paraboly. Rovnice

$$x^2 \pm Bx = y \tag{9}$$

jest rovnicí paraboly, při níž počátek souřadnic nalezá se v obvodu paraboly a mimo osu její; bude tedy osa úseček mimo počáteční bod ($x = 0$) v parabolu protínati vždy ještě v bodu od prvého o $2\xi = B$ vzdáleném.

Kdyby v rovnici (9) i veličina $B = 0$, přešla by rovnice tato opět v obyčejnou vrcholovou rovnici paraboly.

3.

Rovnice druhého stupně o jedné neznámé vyjadřuje se po odstranění činitele při druhé mocnosti, jak známo všeobecně vzorcem

$$x^2 + ax + b = 0. \tag{10}$$

Patrno, že v tomto algebraickém výrazu jde jen o některé zvláštní hodnoty veličiny x, která jinak všech možných hodnot schopna jest, jejichž souvislost dána jest úkonem

$$y = x^2 + ax + b. \tag{11}$$

Obraz tohoto analytického úkonu jest dle (5) parabola. Veličiny stálé a, b značí tu polohu té paraboly k osnově souřadnic a jest dle (4)

$$a = B = 2\xi, \quad b = C = \xi^2 - \eta.$$

Jedná se tedy při řešení kvadratických rovnic o to, ustanoviti, pro které zvláštní hodnoty proměnné x bude veličina $y = 0$. Zvláštním těmto hodnotám díme kořeny a nejsou tedy ničím jiným, než vzdálenostmi průsečných bodů osy úseček s parabolou od počátku osnovy souřadnic. Možnost takových průseků a tedy realnost kořenů rovnice druhého stupně bude se říditi jedině vzájemností stálých veličin a s b aneb poněvadž jiného významu nemají, vzájemností souřadnic vrchole paraboly danou rovnicí naznačené.

Úvahy dříve o rozličných polohách paraboly k osnově souřadnic pronešené dají se tedy přenésti i na rovnice kvadratické. Rovnice

$$x^2 \pm ax + b = 0 \qquad (12)$$

jest téhož významu jako rovnice (6), bude míti tedy vždy dva reální kořeny nerovné

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \mp \xi \pm \sqrt{\eta},$$

pokud $\frac{a^2}{4} > b$ a to oba buď záporné, buď kladné, dle toho, má-li v rovnici (12) člen ax znaménko $+$ aneb $-$; ješto v těchto případech počátek souřadnic nad vrcholem paraboly a zevně této křivky se nalezá, tak že při $+ax$ průseky paraboly s osou x na negativní straně, při $-ax$ na positivní objeviti se musí.

Jestli pak $\frac{a^2}{4} = b$, bude míti rovnice (12) opět dva reální kořeny, avšak rovné, udávající vzdálenost vrchole paraboly, který nyní na ose úseček se nalezá, od počátku souřadnic.

Kdyby bylo $\frac{a^2}{4} < b$, jest vrchol paraboly rovnicí (12) naznačené nad osou úseček a tedy průsek s ní nemožný.

Oba kořeny té rovnice objeví se v podobě imaginární, neztrácejí však při tom svého významu předešlého. Neboť jako dříve, znamená i zde veličina pod kořenitkem $\left(\frac{a^2}{4} - b = \eta\right)$ vzdálenost vrchole paraboly od osy úseček; ješto pak nyní η je zápornou veličinou, stanoví se tím, že osa úseček pod vrcholem paraboly se nalezá a tedy požadavku, aby parabola s ní se protínala, vyhověti nelze nikterak.

Rovnice

$$x^2 \pm ax - b = 0$$

jest významem totožná s rovnicí (7) a musí tedy míti vždy dva znamením i hodnotou nerovné reálné kořeny, ješto zde vždy dva rozličné průseky paraboly s osou úseček nastati musí.

Rovnice

$$x^2 \pm b = 0,$$

která souhlasí s rovnicí (8) a na kterou formu se vyloučením členu s prvou mocností neznámé položením $x = x' - \frac{a}{2}$ každá rovnice druhého stupně převésti dá, má ten zvláštní význam, že oba kořeny $x = \pm \sqrt{\mp b} = \pm \sqrt{\pm \eta}$ jsou vždy rovné a znamením protivné. Počátek souřadnic je zde v ose paraboly a tedy průseky s osou X, které při $\sqrt{-b}$ či $\sqrt{+\eta}$ vždy nastati musí, budou pro souměrnost té křivky po obou stranách osy v téže vzdálenosti. Vylučování členu $(\pm ax)$ s neznámou v první mocnosti při rovnicích kvadratických znamená tedy rovnoběžné pošinutí osnovy souřadnic o $\mp \frac{a}{2} = \mp \xi$ po ose úseček, tak aby počátek souřadnic a osa pořadnic octly se v ose paraboly. V nové tím nabyté rovnici znamená pak stálá veličina vzdálenost vrchole paraboly od osy úseček a dle jejího znamení ihned možnost průseků a kořenů posouditi lze. Význam kořenů pomyslných $\pm \sqrt{b} = \pm \sqrt{-\eta}$ sám sebou se tu podává.

Má-li konečně kvadratická rovnice tvar

$$x^2 \pm ax = 0 \text{ čili } x[x \pm a] = 0,$$

kde tedy $b = 0$, shoduje se s rovnicí (9) a musí vždy oba kořeny míti reálné, z nichž jeden vždy rovná se nulle, druhý pak $\mp a = \mp 2\xi$, ješto zde osa úseček s parabolou vždy dva body má společné.

Má-li kdo geometrický obraz kterékoliv rovnice kvadratické živě na mysli, pozná zajisté mnohem snáze jakost a význam kořenů, co úkonů veličin stálých v ní přicházejících a s hbitostí pochopí i rozličné jiné poměry, v kterých kvadratické rovnice aneb paraboly jimi vyjádřené býti mohou, na př. kdy a kde se protinají a jaký jest význam výrazů při tom nabytých, mnohdy na zdání si odporujících. Zajisté dosti vděčné látky k tříbení prvotního názoru mathematického.