

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky

Vojtěch Tuček

Staré a nové o středoškolské geometrii vůbec a o geometrii trojúhelníku zvlášť

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 63 (1934), No. 2, D1--D17

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122628>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1934

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ČÁST DIDAKTICKO-METODICKÁ

VOJTĚCH TUČEK (Mor. Budějovice):

Staré a nové o středoškolské geometrii vůbec a o geometrii trojúhelníku zvlášť.

I.

Učebné osnovy pro středoškolské vyučování geometrii lze charakterisovati třemi znaky:

1. Planimetrická a trigonometrická látka od IV. do VI. třídy jest soustředěna k nauce o trojúhelníku. Ke konfiguračním a metrickým vlastnostem trojúhelníku se sbíhá, od nich se rozvětvuje k vlastnostem jiných útvarů.

2. Při vyučování jest sledována v podstatě cesta historického vývoje geometrie přirozené, která, vylučujíc prvky imaginární a nekonečné, buduje na nauce o shodnosti a podobnosti ve smyslu Euklidovy systematiky a vyšetřuje vlastnosti geometrických útvarů převážnou měrou synteticky, synteticky ve starším smyslu slova.

3. Rozlišujeme-li vztahy konfigurační a metrické, shledáme, že středoškolská geometrie dává přednost metrice; sestrojuje a počítá délky, plošné obsahy, úhly a jiné veličiny z daných prvků. A tu zase shledáme, že konstrukce i výpočty postrádají téměř docela soustavnosti, ujednocenosti a uspořádanosti netoliko s hlediska praktických potřeb, ale i po stránce metodické a teoretické, kde jde o odvození základních metrických vztahů, jež pak slouží k oněm konstrukcím a výpočtům.

Z uvedených znaků plyne zřejmě řada nedostatků a chyb středoškolské geometrie vůbec a geometrie trojúhelníku zvlášť. Nejdůležitější z nich jsou dány okolností, že jest středoškolská geometrie trojúhelníku v zásadním a hlubokém rozporu s *moderním chápáním geometrie jako exaktní vědy a s chápáním významu a vztahu jmenovaného speciálního oboru k celku této vědy.*

Sledujeme-li rozvoj geometrie, shledáme, že přirozená geometrie trojúhelníku je v podstatě uzavřena v první polovině 19. století. *K. W. Feuerbach*: „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreieckes und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren“, 1822; *C. F. Jacobi*: „De trianguli rectilinei proprietatibus“, 1825; *Ch. G. Nagel*: „Untersuchungen über die

wichtigsten zum Dreiecke gehörenden Kreise“, 1836; *J. B. Feaux*: „Úplná teorie rovinného trojúhelníku“, 1846 a *C. Adams*: „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreieckes“, 1846 rozvedli pouze objevy, které učinili *G. Ceva*: „De lineis rectis se invicem secantibus“, 1698; *L. Euler*: „Solutio facilis“, 1765; *O. Fagnano*: „Problemae quaedam“, 1775 a *A. L. Crelle*: „Über einige Eigenschaften des geradlinigen Dreieckes“, 1816. Poslední souborná díla z druhé polovice 19. století napsali *G. Reuschle*: „Über die Punkte, Transversalen und Kreise des Dreieckes“, 1853; *G. B. Marsano*: „Considerazioni sul triangolo rettilineo“, 1863; *E. Uhlich*: „Altes und neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten“, 1886 a *J. S. Mackay* — četné práce z posledního desítiletí stol. 19. Vše ostatní jsou kratší i delší pojednání různých autorů, jichž počet jde podle M. Simona do půl třetího sta jen v druhé polovici minulého století, uveřejněná v rozličných časopisech periodických pro matematiku a geometrii.

Převážné většině jmenovaných prací jest společné, že:

1. Po stránce vlastností konfiguračních vyšetřují polohové vztahy t. zv. pozoruhodných bodů, t. j. průsečíků os stran, os úhlů, výšek a jiných transversál, které v triplech poskytují určité průsečíky, jako mimo uvedené bod *Grebe-Lemoinův*, *Fermatův*, *Torricelliův*, body *Nagelovy*, *Brocardovy* a j.; dále vyšetřují polohové vztahy určitých kružnic, jdoucích více než třemi body, na př. *Feuerbachovy*, *Lemoinovy*, *Brocardovy*, *Tuckerových* a j., a to tak, že vznik každého takového útvaru jest samostatnou, od ostatních izolovanou otázkou.

2. Po stránce metrické vyšetřují a počítají z podobnosti nebo trigonometricky vzdálenosti oněch bodů, délky úseků na stranách a transversálách, poloměry uvedených kružnic, plošné obsahy zvláštních obrazců, aritmetické vztahy mezi nimi a různými jednoduchými prvky základního trojúhelníku, odvozují z výsledných výrazů, interpretující je geometricky, různé vlastnosti konfigurační. Přitom není ani zde žádného jednotícího hlediska, usoustavňujícího principu.

Tak se jeví přirozená geometrie trojúhelníku jako pouhá snůška přechetných polohových a metrických vztahů, nikoliv jako soustava poznatků navzájem spjatých a logicky učených podle určitých myšlenek, které plynou z povahy samé základní konfigurace tří bodů a tří přímek v prostoru.

Bral-li se vývoj přirozené geometrie do polovice 19. století cestou, která vedla k vyličené roztržitosti a nevědeckosti, je to pochopitelné. Nechápeme však, proč ustrnula na střední škole a proč se tam dosud udržuje, když její vývoj se nezastavil a šel dále od padesátých let minulého století až po naše dny. Ovšemže

nepřišel náhle; byl již dříve připravován objevy a výzkumy předcházejících staletí. Přípravu třeba jest viděti ve třech skupinách vět; první

1. ve větě *Menelaově* z 1. st. po Kr. o transversálách v trojúhelníku a

2. ve větě *Cevově* o průsečíku tří libovolných transversál vrcholových, z r. 1698; jest to duální obměna věty *Menelaovy*.

Proč procházejí na př. všechny těžnice trojúhelníku A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3 týmž bodem?*) Proto, poněvadž prochází týmž bodem každá trojice vrcholových transversál, sekoucích strany trojúhelníku $A_1A_2A_3$ v bodech P_1, P_2, P_3 , je-li splněna Cevova metrická podmínka

$$\frac{A_1P_3 \cdot A_2P_1 \cdot A_3P_2}{P_2A_1 \cdot P_3A_2 \cdot P_1A_3} = 1.$$

Poněvadž platí o těžnicích vztah

$$\frac{A_1T_3 \cdot A_2T_1 \cdot A_3T_2}{T_2A_1 \cdot T_3A_2 \cdot T_1A_3} = \frac{\frac{1}{2}a_3 \cdot \frac{1}{2}a_1 \cdot \frac{1}{2}a_2}{\frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{1}{2}a_3 \cdot \frac{1}{2}a_1} = 1,$$

o výškách A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3 vztah

$$\frac{A_1V_3 \cdot A_2V_1 \cdot A_3V_2}{V_2A_1 \cdot V_3A_2 \cdot V_1A_3} = \frac{a_2 \cos \alpha_1 \cdot a_3 \cos \alpha_2 \cdot a_1 \cos \alpha_3}{a_3 \cos \alpha_1 \cdot a_1 \cos \alpha_2 \cdot a_2 \cos \alpha_3} = 1,$$

o spojnicích vrcholů A_1, A_2, A_3 s dotykovými body D_1, D_2, D_3 kružnice vepsané na stranách vztah

$$\frac{A_1D_3 \cdot A_2D_1 \cdot A_3D_2}{D_2A_1 \cdot D_3A_2 \cdot D_1A_3} = \frac{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)}{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)} = 1,$$

atd., proto prochází každá z uvedených trojic transversál týmž bodem, těžištěm, ortocentrem atd.

Nebo jiná známá věta: Proč leží průsečíky stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$ s příslušnými stranami trojúhelníku výškových pat V_1, V_2, V_3 na téže přímce? Proto, poněvadž lze dokázati, že jmenované průsečíky S_1, S_2, S_3 vyhovují *Menelaovu* metrickému vztahu

$$\frac{A_1S_3 \cdot A_2S_1 \cdot A_3S_2}{S_2A_1 \cdot S_3A_2 \cdot S_1A_3} = -1,$$

který platí pro každou trojici bodů B_1, B_2, B_3 na stranách A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trojúhelníku $A_1A_2A_3$, leží-li body na téže přímce, tedy

*) Příslušné obrazce, o nichž bude uvažováno, nechť si čtenář narysuje sám. Jsouť zcela jednoduché a s dostatečnou podrobností popsány. — Z technických důvodů jsou vynechány značky úseček nad písmenami; značí tedy A_1P_3 úsečku A_1P_3 atd.

vztah

$$\frac{A_1 B_3 \cdot A_2 B_1 \cdot A_3 B_2}{B_2 A_1 \cdot B_3 A_2 \cdot B_1 A_3} = -1.$$

Důkaz provedeme takto:

V $\triangle A_1 A_2 A_3$ jsou paty výšek V_1 proti vrcholu A_1 , V_2 proti A_2 , V_3 proti A_3 . Spojnice $V_2 V_3$ protíná stranu $A_2 A_3$ v bodě S_1 , $V_3 V_1$ stranu $A_3 A_1$ v bodě S_2 , $V_1 V_2$ stranu $A_1 A_2$ v bodě S_3 . Poněvadž je $V_2 V_3 S_1$ transversála v $\triangle A_1 A_2 A_3$, jest podle Menelaovy věty

$$A_1 V_3 \cdot A_2 S_1 \cdot A_3 V_2 = -V_2 A_1 \cdot V_3 A_2 \cdot S_1 A_3.$$

a podle Cevy

$$A_1 V_3 \cdot A_2 V_1 \cdot A_3 V_2 = V_2 A_1 \cdot V_3 A_2 \cdot V_1 A_3;$$

dělením obou rovnic a odstraněním zlomků obdržíme

$$A_2 S_1 \cdot V_1 A_3 = -S_1 A_3 \cdot A_2 V_1;$$

podobně jest

$$A_3 S_2 \cdot V_2 A_1 = -S_2 A_1 \cdot A_3 V_2,$$

$$A_1 S_3 \cdot V_3 A_2 = -S_3 A_2 \cdot A_1 V_3.$$

Násobením všech rovnic obdržíme

$$A_1 S_3 \cdot A_2 S_1 \cdot A_3 S_2 \cdot (V_1 A_3 \cdot V_2 A_1 \cdot V_3 A_2) = -S_2 A_1 \cdot S_3 A_2 \cdot S_1 A_3 \cdot (A_1 V_3 \cdot A_2 V_1 \cdot A_3 V_2).$$

Součiny v závorkách mají podle Cevovy podmínky stejnou hodnotu, a po krácení obdržíme Menelaovu podmínku

$$\frac{A_1 S_3 \cdot A_2 S_1 \cdot A_3 S_2}{S_2 A_1 \cdot S_3 A_2 \cdot S_1 A_3} = -1,$$

což bylo třeba dokázati; body S_1, S_2, S_3 leží na téže přímce.

Není tudíž s hlediska Cevovy a Menelaovy poučky žádných „pozoruhodných“ bodů a transversál. Všechny takové útvary jsou stejně pozoruhodné, je-li jen vyhověno oběma metrickým vztahům. Všechny speciální příbuzné konfigurační vlastnosti jsou oněmi metrickými vztahy vázány; všechny speciální metrické vztahy toho druhu plynou nutně z oněch konfigurací a zase naopak. *Zde jest jednotlicí princip, který mění snůšku izolovaných vztahů v uspořádanou soustavu.*

Druhá skupina vět, které připravovaly vývoj moderní syntetické geometrie, jest

1. věta *Desarguesova* z r. 1630, že průsečíky sobě odpovídajících stran dvou trojúhelníků v takové poloze, že spojnice sobě odpovídajících vrcholů jdou týmž bodem, leží na jedné přímce, a

2. vlastnosti *úplného čtyřrohu*, jímž jest definován číre konfiguračně metrický vztah harmonické čtveřiny bodů.

Jimi jest vyjádřena podstata druhého jednotlicího principu, v němž jsou obsaženy přechetné konfigurační vlastnosti bodů a transversál.

Jako příklad uvedu známou větu *van Swindenovu*, že paty kolmic, spuštěných s paty libovolné výšky v trojúhelníku na druhé dvě výšky a druhé dvě strany trojúhelníku, leží na jedné přímce, rovnoběžné k protilehlé straně trojúhelníku výškových pat. Důkaz lze provést takto:

V_1, V_2, V_3 jsou paty výšek A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3 v $\triangle A_1A_2A_3$.
Vedme

$$\begin{aligned} V_1K_2 &\perp A_3A_1, \text{ tedy } \parallel A_2V_2, \\ V_1K_3 &\perp A_2A_1, \text{ tedy } \parallel A_3V_3, \\ V_1S_3 &\perp A_3V_3, \text{ tedy } \parallel A_2A_1, \\ V_1S_2 &\perp A_2V_2, \text{ tedy } \parallel A_3A_1; \end{aligned}$$

V jest průsečík výšek; v konfiguraci bodů $V_1S_3VV_3A_1$ jest

$$V_1A_1 : V_1V = S_3V_3 : S_3V,$$

a podobně $V_1A_1 : V_1V = S_2V_2 : S_2V$

v konfiguraci bodů $V_1S_2VV_2A_1$; jest tudíž i

$$S_3V_3 : S_3V = S_2V_2 : S_2V,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$S_3S_2 \parallel V_2V_3.$$

Dále jest v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3S_3V_3$

$$A_2V_1 : V_1A_3 = V_3S_3 : S_3A_3,$$

a podobně $A_2V_1 : V_1A_3 = V_2K_2 : K_2A_3$

v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3K_2V_2$; jest tudíž i

$$V_3S_3 : S_3A_3 = V_2K_2 : K_2A_3,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$S_3K_2 \parallel V_3V_2.$$

Konečně jest v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3V_2S_2$

$$A_2V_1 : V_1A_3 = A_2S_2 : S_2V_2,$$

a podobně $A_2V_1 : V_1A_3 = A_2K_3 : K_3V_3$

v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3V_3K_3$; jest tudíž i

$$A_2S_2 : S_2V_2 = A_2K_3 : K_3V_3,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$K_3S_2 \parallel V_3V_2.$$

Musí tudíž úseky K_3S_2, S_2S_3 a S_3K_2 ležeti na jedné přímce, na spojnici bodů $K_3S_2S_3K_2$, rovnoběžné ke straně V_3V_2 , což bylo dokázati.

Na první pohled se zdá, že věta van Swindenova nemá nic společného s úplným čtyřrohem. Všimneme-li si však konfigurace bodů $A_1V_3VV_2A_2A_3$, vidíme ihned, že určují úplný čtyřroh s úhlopříčkami V_2V_3 , A_1V a A_2A_3 . A skutečně; věta van Swindenova jest jen zvláštní případ konfigurační vlastnosti v každém úplném čtyřrohu:

Vedeme-li v libovolném úplném čtyřrohu $ABCDEF$ průsečíkem úhlopříček AC a BD , bodem O , přímky:

$OG \parallel DC$ až k průsečíku G na straně AB ,

$OH \parallel AB$ až k průsečíku H na straně DC ,

$OI \parallel AD$ až k průsečíku I na straně BC ,

$OK \parallel BC$ až k průsečíku K na straně AD , leží body $GHIK$

na jedné rovnoběžce k úhlopříčce EF .

Rozdíl mezi trojúhelníkem a úplným čtyřrohem jest pouze ten, že jest trojúhelník nesčíslněkrátě bohatší specialisacemi téže všeobecné konfigurace v úplném čtyřrohu, poněvadž jest trojúhelník spojením tří úplných čtyřrohů netoliko se svými výškami, tedy čtyřrohů $A_1V_3VV_2A_2A_3$, $A_2V_1VV_3A_3A_1$, $A_3V_2VV_1A_1A_2$, nýbrž triplem úplných čtyřrohů s každým triplem vrcholových transversál, které jdou týmž bodem O_n , tedy čtyřrohů $A_1S_{n-1}O_nS_{n+1}A_2A_3$, $A_2S_nO_nS_{n-1}A_3A_1$, $A_3S_{n+1}O_nS_nA_1A_2$, označíme-li S_n průsečík transversály A_1O_n na straně A_2A_3 , S_{n+1} průsečík transversály A_2O_n na straně A_3A_1 , S_{n-1} průsečík transversály A_3O_n na straně A_1A_2 .

Třetí jednotící princip, v němž jsou rovněž zahrnuty četné konfigurační vlastnosti trojúhelníku, jest princip projektivity. Projektivní geometrie, vybudovaná analyticky *Möbiusem*, 1827 a *Plückerem*, 1829, synteticky *Steinerem*, 1832 a v. *Staudtem*, 1847, uvažuje kuželosečky jako výtvořiny projektivních svazků paprsků. Lze tudíž i geometrii trojúhelníku, především pokud máme na mysli „pozoruhodné“ kružnice a kuželosečky vůbec ve spojení s trojúhelníkem, vybudovati projektivně. Ale nejen to, i geometrii trojúhelníku samotného. Ukáží to na jednom příkladě.

Jak je známo, vytvořuje svazek kuželoseček na libovolné transversále páry průsečíků, které jsou v involuci. Obě mohou degenerovati ve dva páry přímek a obdržíme úplný čtyřroh. Je-li označen $ABCDEF$, jest dvojice stran ABE a DCE jedna, dvojice ADF a BCF druhá degenerovaná kuželosečka. Každá transversála protíná tedy konfiguraci stran a úhlopříček v šesti bodech, které musí býti v involuci, což dokázal již v r. 1843 *C. Adams* ve spise „Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie“. To však máme zase trojúhelníkovou konfiguraci AEF a tři transversály bodem C . Anebo ještě jinak. $ABCD$ může být i čtyřúhelník tětivový, jemuž lze opsati kružnici; v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ se všemi třemi výškami jest to zřejmě čtyřúhelník $A_1V_3VV_2$.

Zůstanou-li body A_1VV_2 pevné, a šine-li se pata V_3 po kružnici, opsané čtyřúhelníku $A_1V_3VV_2$ směrem k vrcholu A_1 , splyne s ním konečně, a obdržíme konfiguraci specialisovanou: trojúhelník A_1VV_2 , $V_3 \equiv A_1$, $V_3A_3 \equiv VA_1$ a strana V_3A_1 přejde v tečnu v bodě A_1 ke kružnici opsané. Každá transversála musí opět poskytnouti na stranách trojúhelníku, na kružnici a tečně šest bodů v involuci. I to dokázal již *Adams* ve jmenovaném díle.

Uvedeným příkladem jest dokázána příbuznost geometrie projektivní s geometrií úplného čtyřrohu, takže se dosud uvažované jednotící principy redukují na dva: *na princip projektivity a na princip, vyjádřený větou Menelaovou a její duální obměnou, větou Cevovou*. V nich jest podstata jednotícího hlediska, jimi stmeluje moderní geometrie všechny konfigurační a metrické vztahy a vlastnosti trojúhelníku v ucelený systém, jenž nepřipouští hledati a viděti v jednotlivých vlastnostech úkoly a problémy izolované. Přibereme-li ještě jiné přínosy vývoje moderní geometrie, uvážíme-li ještě význam imaginárních prvků v geometrii, obdržíme exaktní definici geometrie trojúhelníku, kterou podal *Felix Klein* ve své „Elementargeometrie vom höheren Standpunkte“:

Geometrie trojúhelníku není než projektivní teorie invariant pěti bodů; tří reálných a obou absolutních bodů kruhových $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$. A hned dodává: „*Erst sie verleiht der Geometrie des Dreieckes den Charakter eines systematischen, durchsichtigen Lehrgebäudes, den man bisher an ihr so sehr vermisste.*“

Chceme-li tedy přestovati středoškolskou geometrii v duchu moderní exaktní vědy, musíme ji v naznačeném smyslu reformovati. Tím však netoliko překonáme zásadní a hluboký rozpor středoškolské, přirozené geometrie s moderní geometrií syntetickou, nýbrž odstraníme i druhou základní chybu, již se ona dopouští:

Odstraníme disproporci mezi upřílišněnou péčí o metrické vztahy a mnohdy o příliš mechanické používání těchto vztahů k výpočtům čirě formalistickým a poměrně malou péčí o vztahy konfigurační.

Slovo „geometrie“ znamená sice měřictví. Vývoj dal však této vědě jiný smysl. Měřictví ve starém toho slova významu nikterak neproniká až k podstatě vlastností prostorových útvarů; naopak, ono ji zastírá. *Podstata moderní geometrie záleží však v pronikání lidského ducha do struktury prostorových konfiguraací, kde jest metrika pouhou aritmetickou ilustrací vlastností konfiguračních. Jest tudíž i po této stránce reforma nutna.*

II.

Než však bude moci býti provedena žádoucí reforma, uplynou možná desetiletí. Jest třeba věc důkladně promyslití a provésti výběr příslušné látky velmi pečlivě. To nemůže býti dílem jediného

člověka; práce musí být vykonána společným úsilím kolektivu středoškolských a vysokoškolských profesorů geometrie. Organizačním střediskem a dirigentem může být **Jednota čsl. matematiků a fyziků.**

Co však možno učiniti v době přechodné? Jest možno odstraniti roztržiténost při vyučování geometrii na půdě geometrie přirozené? Roztržiténost záleží podle mého mínění hlavně v tom, že odvozujeme základní konfigurační a metrické vztahy izolovaně, každý z jiného základu. To má ten neblahý následek, že je

1. v hlavách žáků v nejlepším případě snůška přechetných formulí, pro něž však není žádné jednotné opory pro zapamatování, jak byly odvozeny,

2. že při převaze metriky a výpočtů nad konfiguračními vztahy a vlastnostmi unikají žákům přechetné zajímavé a důležité vlastnosti konfigurační.

Příčina tohoto nežádoucího stavu nespočívá ovšem pouze ve středoškolských osnovách. Jest také v tom, že se na vysokých školách věnuje středoškolské geometrii nepatrná pozornost. Tím se stane, že mladý absolvent university neovládá důkladně ani svůj vlastní obor, jemuž bude na střední škole vyučovati. Ze středoškolské geometrie nepoznal na universitě nic nového a učí pak v praxi zase jenom tomu, čemu se naučil před maturitou. Tak se potom nutně neustále točíme na témž místě.

Chci však ukázati, že jest východisko aspoň z roztržiténosti na půdě staré geometrie středoškolské. Jest velmi jednoduchý konstruktivní předpis pro východiskovou konfiguraci, která umožňuje vycházeti při odvozování základních vztahů vždy z téhož základu jak na středním, tak na vyšším stupni.

Jest ostroúhlý trojúhelník $A_1A_2A_3$; jeho strany mají délku a_1, a_2, a_3 tak, že jest $a_1 > a_3 > a_2$, a úhly $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$.

Úhel α_2 přeneseme kružítkem k vrcholu A_1 od strany (ramene) A_1A_3 směrem dovnitř trojúhelníku. Jeho druhé rameno protne pak stranu A_2A_3 v bodě B_1 . Podobně přeneseme α_3 k vrcholu A_1 od strany A_1A_2 směrem dovnitř trojúhelníku a obdržíme na straně A_2A_3 průsečík C_1 . Ze vztahu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$ plyne, že jest

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \alpha_1.$$

$\triangle A_1B_1C_1$ jest rovnoramenný a

$$\triangle B_1A_1A_3 \simeq \triangle C_1A_2A_1 \simeq \triangle A_1A_2A_3.$$

Stejně lze přenést α_3 k vrcholu A_2 od strany A_2A_1 , α_1 k vrcholu A_2 od strany A_2A_3 ; α_1 k vrcholu A_3 od strany A_3A_2 , α_2 k vrcholu A_3 od strany A_3A_1 , vždy směrem dovnitř $\triangle A_1A_2A_3$. Druhá ramena přenesených úhlů poskytnou postupně průsečíky B_2 a C_2 na straně A_3A_1 , průsečíky B_3 a C_3 na straně A_1A_2 . Opět jest

$$\sphericalangle A_2B_2C_2 = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \alpha_2, \quad \sphericalangle A_3B_3C_3 = \sphericalangle A_3C_3B_3 = \alpha_3,$$

a trojúhelníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ jsou *rovnoramenné*, trojúhelníky $A_1B_2A_2$, $A_2C_2A_3$, $A_3A_2B_3$, $A_1A_3C_3$, $A_1A_2A_3$ jsou podobné.

První význam popsané konstrukce jest, že lze jí použití k poučení žáků o podstatě funkcionálního myšlení v geometrii. Uvažujeme, co se mění v konfiguraci vrcholových transversál A_nB_n a A_nC_n , zmenšuje nebo zvětšuje-li se úhel α_1 tím, že se šine vrchol A_1 „přímo“ vzhůru nebo „přímo“ dolů. Vzdaluje-li se vrchol A_1 od základny $A_2A_3 \equiv a_1$, zmenšuje se α_1 , α_2 a α_3 se zvětšují; proto se body B_1 a C_1 od sebe vzdalují a blíží se k vrcholům A_2 , případně A_3 . B_1 splyne s A_2 , C_1 s A_3 , uběhne-li A_1 do nekonečna, kdy jest $\alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$. Naproti tomu se body B_2 a C_2 k sobě přibližují; podobně i body B_3 a C_3 . Blíží-li se však vrchol A_1 k základně a_1 , zvětšuje se α_1 , α_2 a α_3 se menší; body B_1 a C_1 se vzdalují od vrcholů A_2 , A_3 a blíží se k sobě. Body B_2 a C_2 , B_3 a C_3 se však od sebe vzdalují. V okamžiku, kdy je úhel α_1 pravý, jest $\triangle A_1A_2A_3$ při A_1 pravoúhlý, body B_1 a C_1 splynou, a ramena rovnoramenného trojúhelníka A_1B_1 , A_1C_1 utvoří výšku A_1P_1 ($P_1 \equiv B_1 \equiv C_1$), kolmici vrcholem A_1 na stranu A_2A_3 . Vrátime-li se k původní konfiguraci, kdy jest trojúhelník ostroúhlý, zůstane kolmice A_1P_1 výškou jak v $\triangle A_1A_2A_3$, tak v $\triangle A_1B_1C_1$, půlíc základnu B_1C_1 i úhel při vrcholu $B_1A_1C_1$. Poněvadž jest v každém trojúhelníku $A_3B_3 \parallel A_1C_1$, $A_2C_2 \parallel A_1B_1$, $A_3C_3 \parallel A_2B_2$, jest v pravoúhlém $A_3B_3 \perp A_2A_3$, $A_2C_2 \perp A_2A_3$; tu je A_3A_1 výškou v $\triangle B_3A_3C_3$, A_2A_1 výškou v $\triangle B_2A_2C_2$. Vrchol A_1 jest pak společnou patou výšek A_3A_1 a A_2A_1 v pravoúhlém trojúhelníku, $P_2 \equiv P_3 \equiv A_1$.

Přejde-li konečně trojúhelník $A_1A_2A_3$ v tupoúhlý při A_1 , přejde B_1 , jež bylo dříve mezi A_2 a P_1 , napravo mezi P_1 a A_3 , a C_1 , jež bylo před tím mezi P_1 a A_3 , přejde nalevo mezi A_2 a P_1 . Úhly při základně $A_1B_1C_1$ jsou teď $180^\circ - \alpha_1$. Až později dokážeme žákům, že se výšky A_nP_n protínají v témž bodě, v ortocentru V , upozorníme, že v trojúhelníku ostroúhlém leží paty všech výšek mezi vrcholy trojúhelníku bodů A_n , ortocentr pak uvnitř jeho plochy; v tupoúhlém při A_1 však leží pouze P_1 mezi A_2 a A_3 , avšak P_2 a P_3 vně úseček A_3A_1 a A_2A_1 za vrcholem A_1 na prodloužených stranách a_2 případně a_3 ; ortocentr V je vně plochy trojúhelníku.

Považují toto a vůbec každé zkoumání funkční stránky konfiguračních vztahů, zde mezi body $B_nC_nP_n$ a V a příslušnými úsečkami A_nB_n , A_nC_n , A_nP_n , B_nC_n za velmi důležité prohlubování spojitosti mezi názorem a logickým myšlením. Ostatně může jenom touto cestou vniknouti žák do podstaty specialisace konfiguračních i metrických vztahů — všeobecně platných — na případech „zvláštních“ poloh a forem geometrických útvarů.

Druhý význam popsané konfigurace záleží v tom, že můžeme obrátit pozornost žáků k nezbytnosti zavedení pojmu kladných a záporných úseček do geometrie. Jest to důležité netoliko vzhledem k rozmanitým konfiguračním a metrickým vztahům, jejichž základem jest věta Menelaova a Cevova, ale i pro všechny metrické relace, mají-li býti upraveny tak, aby měly všeobecnou platnost pro všechny druhy a zvláštní případy trojúhelníků.

Jest ovšem třeba jednou provždy stanoviti způsob označování různých úseček, které se vždy vyskytují v triplu, aby bylo možno pouhou cyklickou záměnou značek odvoditi bez počítání celý tripl příslušné relace. Toho dosáhneme nejjednodušším způsobem, označíme-li prvky téhož konfiguračního druhu týmž písmenem s ukazovateli 1, 2, 3. Dále definujeme úsečky $A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2; A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2; A_1C_3, A_2C_1, A_3C_2; B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3; B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2; C_1A_3, C_2A_1, C_3A_2; P_1A_3, P_2A_1, P_3A_2; P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$ jako kladné, souhlasí-li — při tomto sledu písmen při jejich koncových bodech — jejich směr se smyslem oběhu na obvodě trojúhelníku $A_1A_2A_3$, případně $P_1P_2P_3$ proti pohybu hodinových ručiček; souhlasí-li za týchž podmínek s oběhem ručiček, jsou jmenované úsečky záporné.

Jest tedy na základě této úmluvy na př. úsečka B_1C_1 kladná v trojúhelníku ostroúhlém, záporná v tupoúhlém a má délku nula v pravoúhlém.

Třetí význam vrcholových transversál A_nB_n a A_nC_n záleží v tom, že skýtají velmi plodnou příležitost k nacvičení vět o úměrnosti úseček v podobných trojúhelnících. Avšak všimněme si napřed ortického trojúhelníku výškových pat $P_1P_2P_3$. Obdržíme jej nejkratší konstruktivní cestou, opíšeme-li nad stranami (průměry) A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 kružnice; jejich průsečíky na stranách trojúhelníku jsou paty výšek, body P_1, P_2, P_3 . Nyní jest $\sphericalangle A_1P_1P_2 = \sphericalangle A_1A_2P_2 = 90^\circ - \alpha_1 = \sphericalangle P_3A_3A_1 = \sphericalangle P_3P_1A_1$ (úhly obvodové), z čehož plyne

$$\begin{aligned} & \sphericalangle P_2P_1A_3 = \sphericalangle A_2P_1P_3 = \alpha_1 \\ \text{a podobně} \quad & \sphericalangle P_3P_2A_1 = \sphericalangle A_3P_2P_1 = \alpha_2 \\ & \sphericalangle P_1P_3A_2 = \sphericalangle A_1P_3P_2 = \alpha_3; \end{aligned}$$

jsou tudíž strany ortického trojúhelníku rovnoběžné k odpovídajícím transversálám A_nB_n a A_nC_n :

$$\begin{aligned} A_1B_1 \parallel A_2C_2 \parallel P_1P_2, \quad A_1C_1 \parallel A_3B_3 \parallel P_1P_3, \\ A_3C_3 \parallel A_2B_2 \parallel P_2P_3. \end{aligned}$$

Proto uvedené transversály nazývám *p-transversály*.

Máme tedy v celku 10 podobných trojúhelníků:

$$A_1A_2A_3, B_1A_1A_3, A_1B_2A_2, A_3A_2B_3, C_1A_2A_1, A_2C_2A_3, A_1A_3C_3, A_1P_2P_3, P_1A_2P_3, P_1P_2A_3;$$

poskytnou $2 \cdot \binom{1^0}{2} = 90$ na sobě nezávislých úměr a tudíž 90 relací mezi prvky:

$$A_1A_2 \equiv a_3, P_1P_2 \equiv p_3, A_1B_1 = A_1C_1 \equiv g_1, B_1A_3 \equiv b_1, A_2C_1 \equiv c_1, \\ A_2A_3 \equiv a_1, P_2P_3 \equiv p_1, A_2B_2 = A_2C_2 \equiv g_2, B_2A_1 \equiv b_2, A_3C_2 \equiv c_2, \\ A_3A_1 \equiv a_2, P_3P_1 \equiv p_2, A_3B_3 = A_3C_3 \equiv g_3, B_3A_2 \equiv b_3, A_1C_3 \equiv c_3,$$

$$\begin{array}{l} \text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_2 : A_3P_2 \equiv a_{1,2} \\ \phantom{\text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_2} a_2 a_3 : A_1P_3 \equiv a_{2,3} \\ \phantom{\text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_2} a_3 a_1 : A_2P_1 \equiv a_{3,1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_3 : P_3A_2 \equiv a_{1,3} \\ \phantom{\text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_3} a_2 a_1 : P_1A_3 \equiv a_{2,1} \\ \phantom{\text{průmět strany } a_1 \text{ na stranu } a_3} a_3 a_2 : P_2A_1 \equiv a_{3,2}. \end{array}$$

K rychlému odvození úměr použijeme tabulky, v níž jsou napsány pod sebou stejnohlé strany podobných trojúhelníků:

Proti úhlu

	v \triangle	a_1	a_2	a_3
I.	$A_1A_2A_3$	a_1	a_2	a_3
II.	$B_1A_1A_3$	a_2	b_1	g_1
III.	$A_1B_2A_2$	g_2	a_3	b_2
IV.	$A_3A_2B_3$	b_3	g_3	a_1
V.	$C_1A_2A_1$	a_3	g_1	c_1
VI.	$A_2C_2A_3$	c_2	a_1	g_2
VII.	$A_1A_3C_3$	g_3	c_3	a_2
VIII.	$A_1P_2P_3$	p_1	$a_{2,3}$	$a_{3,2}$
IX.	$P_1A_2P_3$	$a_{1,3}$	p_2	$a_{3,1}$
X.	$P_1P_2A_3$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	p_3
	sloupec	1	2	3

Tak poskytně na př. součin III. 1 krát VII. 3 a III. 3 krát VII. 1 rovnicí $g_2a_2 = b_2g_3$ atd. Obdržíme pak 90 párů rovnoplochých obdélníků nebo čtverečů. Pro další rozbor jsou tyto nejdůležitější:

$$I. I. 1, II. 3 = II. 1, I. 3:$$

$$a_1g_1 = a_2a_3,$$

a podobně

$$a_2g_2 = a_3a_1,$$

$$a_3g_3 = a_1a_2,$$

t. j. obdélník z kterékoliv strany a k ní příslušné p-transversály má stejný obsah jako obdélník z druhých dvou stran trojúhelníku.

Jest tedy rovnici

$$g_n = \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n} \quad (\text{I})$$

vyjádřena délka p -transversály jako funkce stran trojúhelníku původního.

2. IV. 3, VI. 2 = IV. 2, VI. 3:

$$a_1^2 = g_2g_3,$$

a podobně

$$a_2^2 = g_3g_1,$$

$$a_3^2 = g_1g_2,$$

t. j. čtverec z kterékoliv strany trojúhelníku má stejný obsah jako obdélník z obou p -transversál, které přísluší k druhým dvěma stranám.

Obecně platí

$$a_n^2 = g_{n+1}g_{n-1} \quad (\text{II})$$

3. II. 2, V. 3 = II. 3, V. 2:

$$g_1^2 = b_1c_1,$$

a podobně

$$g_2^2 = b_2c_2,$$

$$g_3^2 = b_3c_3,$$

t. j. čtverec z kterékoliv p -transversály má stejný obsah jako obdélník z obou úseků b, c , které vytvoří ona p -transversála na příslušné straně trojúhelníku.

Obecně platí

$$g_n^2 = b_nc_n \quad (\text{III})$$

4. I. 1, II. 2 = I. 2, II. 1:

$$a_2^2 = a_1b_1,$$

a podobně

$$a_3^2 = a_2b_2,$$

$$a_1^2 = a_3b_3;$$

I. 3, V. 1 = I. 1, V. 3:

$$a_3^2 = a_1c_1,$$

a podobně

$$a_1^2 = a_2c_2,$$

$$a_2^2 = a_3c_3,$$

t. j. čtverec z kterékoliv strany trojúhelníku má stejný obsah jako obdélník z kterékoliv ze zhývajících stran a z přilehlého b - nebo c -úseku na této straně.

Obecně napíšeme

$$a_{n+1}^2 = a_nb_n, \quad a_{n-1}^2 = a_nc_n,$$

a vyjádříme úseky jako funkce stran relacemi

$$b_n = \frac{a_{n+1}^2}{a_n}, \quad c_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_n}. \quad (\text{IV})$$

5. I. 2, VIII. 3 = I. 3, VIII. 2:

$$a_2 a_{3,2} = a_3 a_{2,3},$$

a podobně

$$a_3 a_{1,3} = a_1 a_{3,1},$$

obecně jest

$$a_1 a_{2,1} = a_2 a_{1,2};$$

$$a_{n+1} a_{n-1, n+1} = a_{n-1} a_{n+1, n-1}. \quad (\text{V})$$

Oba součiny vyjadřují zřejmě *mocnost vrcholu* A_n *vzhledem ke kružnici nad stranou* $A_{n+1}A_{n-1}$, která poskytuje na zbývajících stranách trojúhelníku paty výšek P_{n+1} a P_{n-1} .

6. Utvoříme-li součiny rovnic každého z triplů I. a IV., obdržíme zajímavý vztah

$$g_1 g_2 g_3 = b_1 b_2 b_3 = c_1 c_2 c_3 = a_1 a_2 a_3, \quad (\text{VI})$$

který lze interpretovati jako čtyři kvádry stejného objemu, jenž má, užijeme-li známé relace $\nabla = a_1 a_2 a_3 / 4R$, kde ∇ značí plošný obsah trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$ a R poloměr kružnice jemu opsané, hodnotu $4R\nabla$, t. j. též objem jako přímý hranol o základně $\triangle A_1 A_2 A_3$ a o výšce dvojnásobného průměru opsané kružnice.

III.

Zkoumejme nyní jednak, co poskytnou relace (III) a (IV), je-li $\triangle A_n$ při vrcholu A_1 pravoúhlý, jednak rozšířme úvahu obdobně i na trojúhelník kosouhlý.

Poněvadž v uvedeném trojúhelníku pravoúhlém je g_1 výška na přeponu a_1 , $B_1 \equiv C_1 \equiv P_1$ jest její pata na přeponě, b_1 a c_1 jsou úseky patou výšky na přeponě vytvořené, a a_2 , a_3 jsou obě odvěsny, praví relace $g_1^2 = b_1 c_1$, že výška na přeponě jest střední měřická úměrná k úsekům na přeponě; relace $a_2^2 = a_1 b_1$, $a_3^2 = a_1 c_1$ praví, že jest každá z odvěsen střední měřická úměrná k přeponě a k přilehlému úseku na této. To jsou však zřejmě *známé Euklidovy věty, které jsou tudíž pouze zvláštní případy pro trojúhelník pravoúhlý, zvláštní případy vět (III) a (IV), platných v libovolném trojúhelníku*. Avšak právě z Euklidových relací lze pouhým počtem odvoditi větu Pythagorovu; sečteme-li $a_2^2 = a_1 b_1$ a $a_3^2 = a_1 c_1$, obdržíme $a_2^2 + a_3^2 = a_1 (b_1 + c_1)$, a jelikož jest v pravoúhlém trojúhelníku $b_1 + c_1 = a_1$, vyjde *Pythagorova poučka*

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2.$$

Přirozeně vybaví se nyní otázka, jaký vztah obdržíme z relací obecných, sečteme-li $a_2^2 = a_1 b_1$ a $a_3^2 = a_1 c_1$ v trojúhelníku kosoúhlém?

Dostaneme:

$$a_2^2 + a_3^2 = a_1 (b_1 + c_1) = a_1 \underbrace{(B_1 C_1 + C_1 A_3 + A_2 B_1 + B_1 C_1)}_{a_1},$$

a označíme-li v rovnoramenném trojúhelníku $A_1 B_1 C_1$ základnu $B_1 C_1 \equiv z_1$:

$$a_2^2 + a_3^2 = a_1 (a_1 + z_1), \quad a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_1 z_1,$$

a konečně $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - a_1 z_1$.

Kvadratické členy jsou zřejmě totožné s kvadratickými členy věty *Carnotovy* a věty *kosinusové*; musí tudíž být

$$a_1 z_1 = 2a_2 a_3 \cos \alpha_1 = 2a_2 a_{3,2} = 2a_3 a_{2,3}.$$

Že jest $a_{3,2} = a_3 \cos \alpha_1$, $a_{2,3} = a_2 \cos \alpha_1$, plyne bezprostředně z pravoúhlých trojúhelníků $A_1 A_2 P_2$ a $A_1 P_3 A_3$. Ostatní plyne z podobných trojúhelníků

$$A_1 A_2 P_2 \sim B_1 A_1 P_1 \sim A_1 A_3 P_3,$$

z nichž obdržíme úměry $\frac{1}{2} z_1 : g_1 = a_{3,2} : a_3 = a_{2,3} : a_2$,

$$\frac{1}{2} z_1 : a_2 a_3 / a_1 = a_{3,2} : a_3 = a_{2,3} : a_2$$

a po úpravě

$$a_1 z_1 = 2a_2 a_{3,2} = 2a_3 a_{2,3},$$

anebo bezprostředně z $\triangle A_1 B_1 P_1$, kde je

$$\frac{1}{2} z_1 = g_1 \cos \alpha_1 = (a_2 a_3 / a_1) \cos \alpha_1,$$

čili

$$a_1 z_1 = 2a_2 a_3 \cos \alpha_1.$$

Obdržíme tudíž uvažovaný vztah ve třech tvarech:

Carnotův vztah:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_{3,2} = a_2^2 + a_3^2 - 2a_3 a_{2,3},$$

kosinusová věta

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos \alpha_1$$

a

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - a_1 z_1.$$

Všechny přejdou v trojúhelníku pravoúhlém při A_1 v *Pythagorovu* větu

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2,$$

neboť jest pak

$$a_{3,2} = a_{2,3} = 0, \quad \cos \alpha_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Označíme-li výraz

$$a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 \equiv Z_1^2,$$

obecně
jest

$$a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2 = Z_n^2,$$

$$a_{n+1, n-1} = \frac{Z_n^2}{2a_{n-1}}, \quad a_{n-1, n+1} = \frac{Z_n^2}{2a_{n+1}}, \quad (\text{VII})$$

$$\cos a_n = \frac{Z_n^2}{2a_{n+1}a_{n-1}}, \quad (\text{VIII})$$

$$z_n = \frac{Z_n^2}{a_n}. \quad (\text{IX})$$

Nyní můžeme vyjádřit i strany *ortického* trojúhelníku pomocí úměry (viz tabulka) I. 1, VIII. 2 — I. 2, VIII. 1:

$$p_1 a_2 = a_1 a_{2,3};$$

dosadíme-li (VII), obdržíme

$$p_1 = \frac{a_1 Z_1^2}{2a_2 a_3} = a_1 \cos a_1.$$

a obecně

$$p_n = \frac{a_n Z_n^2}{2a_{n+1} a_{n-1}} = a_n \cos a_n. \quad (\text{X})$$

Násobením všech rovnic každého z triplů VII., VIII., IX. a X. obdržíme druhou součinnou poučku (viz VI.):

$$\Pi a_{n+1, n-1} = \Pi a_{n-1, n+1} = \Pi p_n = \Pi \frac{1}{2} z_n = \Pi a_n \cos a_n, \quad (\text{XI})$$

jejíž první část vyplývá již z věty Cevovy.

Výšku $A_1 P_1 \equiv v_1$ v $\triangle A_n$ dostaneme z $\triangle A_1 B_1 P_1$:

$$v_1^2 = g_1^2 - \frac{1}{4} z_1^2 = a_2^2 a_3^2 / a_1^2 - (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)^2 / 4a_1^2,$$

což provedeno a upraveno dá obecně

$$v_n = \frac{1}{2a_n} \sqrt{2 \Sigma a_{n+1}^2 a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4}. \quad (\text{XII})$$

Výraz pod odmocninou jest pro všechny hodnoty ukazovatele n invariantní, a jeho odmocnina jest zřejmě čtyřnásobek plošného obsahu trojúhelníka A_n :

$$\nabla = \frac{1}{4} \sqrt{2 \Sigma a_{n+1}^2 a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4}. \quad (\text{XIIa})$$

V $\triangle A_1 B_1 P_1$ jest

$$\sin a_1 = \frac{v_1}{g_1} = \frac{1}{2a_2 a_3} \sqrt{2 \Sigma a_{n+1}^2 a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4},$$

obecně

$$\sin a_n = \frac{2 \nabla}{a_{n+1} a_{n-1}}, \quad (\text{XIII})$$

z čehož plyne $\nabla = \frac{1}{2}a_{n+1}a_{n-1} \sin \alpha_n$. (XIIIa)

Poměr rovnic triplu (XIII) dá

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 = 2\nabla/a_2a_3 : 2\nabla/a_3a_1 : 2\nabla/a_1a_2,$$

a po úpravě větu *sinusovou*

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 = a_1 : a_2 : a_3. \quad (\text{XIV})$$

Sestrojíme-li střed S_1 strany A_2A_3 a střed V' kružnice opsané poloměrem R , jest v $\triangle A_2S_1V'$ při V' úhel α_1 a platí vztahy $\frac{1}{2}a_1 = R \sin \alpha_1$, $R = a_n/2 \sin \alpha_n$, $\sin \alpha_n = a_n/2R$, což dosazeno do (XIIIa) dá

$$\nabla = \frac{\Pi a_n}{4R}. \quad (\text{XV})$$

Násobíme-li ještě všechny rovnice triplu (XIIIa), obdržíme

$$\nabla^3 = \frac{1}{8}\Pi a_n^2 \Pi \sin \alpha_n.$$

a s ohledem na (XV), kde je $\Pi a_n^2 = 16\nabla^2 R^2$, známý vzorec

$$\nabla = 2R^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3. \quad (\text{XVa})$$

Délku těžnic $A_nS_n \equiv t_n$ lze určit dvojím způsobem; buďto z trojúhelníku $A_nS_nP_n$ větou Pythagorovou: $t_1^2 = v_1^2 + (\frac{1}{2}a_1 - a_{2,1})^2$, anebo rychleji z uvážení, že výraz $t_1^2 - (\frac{1}{2}a_1)^2$ udává *mocnost* vrcholů A_1 vzhledem ke kružnici nad stranou A_2A_3 o středu S_1 a poloměru $\frac{1}{2}a_1$. Táž mocnost má však podle V. hodnotu $a_2a_{3,2}$, a podle (VII) hodnotu $\frac{1}{2}Z_1^2$. Jest tedy $t_1^2 - (\frac{1}{2}a_1)^2 = \frac{1}{2}(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)$, z čehož obdržíme obecně

$$t_n = \frac{1}{2}\sqrt{2(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2) - a_n^2}. \quad (\text{XVI})$$

I úseky na výškách A_nP_n , dolní $P_nV \equiv d_n$, horní $VA_n \equiv h_n$, lze snadno určit; z podobných trojúhelníků VP_1A_3 a $A_2P_1A_1$ dostaneme jednak $d_1 : a_{2,1} = a_{3,1} : v_1$, jednak $h_3 : a_{2,1} = a_3 : v_1$, a po dosazení ze (VII), (XII) a úpravě obecně

$$d_n = \frac{Z_{n+1}^2 Z_{n-1}^2}{8a_n \nabla}, \quad (\text{XVIIa})$$

$$h_n = \frac{a_n Z_n^2}{4\nabla}. \quad (\text{XVIIb})$$

Týž výsledek obdržíme trigonometricky z pravoúhlých trojúhelníků VP_1A_3 a VP_3A_1 , kde je při vrcholu V úhel α_2 :

$$d_1 = a_{2,1} \cotg \alpha_2 \quad (\text{VII, VIII, XIII}), \quad h_1 = \frac{a_{2,3}}{\cos \alpha_2} \quad (\text{VII, VIII}).$$

Všechny úsečky, jejichž délka jest určena výrazem obsahujícím tvar Z_n^2 , mohou nabýti hodnoty 0, je-li $a_2^2 + a_3^2 = a_1^2$,

tedy v trojúhelníku pravouhlém při vrcholu A_1 . Jsou to úsečky $a_{2,3}$, $a_{3,2}$, z_1 , p_1 , h_1 , d_2 a d_3 . To souvisí, jak bylo ukázáno, s polohou bodů B_1 , C_1 , P_2 , P_3 a V . Poněvadž jest v ostroúhlém trojúhelníku, v němž jest splněna podmínka $a_1 > a_3 > a_2$, výraz $a_2^2 + a_3^2 > a_1^2$, jsou jmenované úseky vesměs kladné. V trojúhelníku tupoúhlém jest však $a_2^2 + a_3^2 < a_1^2$, a jmenované úsečky jsou vesměs záporné.

K prvkům kružnice vepsané a kružnic připsaných můžeme přejíti dvojím způsobem:

a) Určíme $\sin \alpha_1$ z $\cos \alpha_1$ známým způsobem:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_1 &= 1 - \cos^2 \alpha_1 = 1 - \frac{(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)^2}{4a_2^2 a_3^2} = \\ &= \frac{(4a_2^2 a_3^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)(4a_2^2 a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_1^2)}{4a_2^2 a_3^2}, \end{aligned}$$

což dá obecně

$$\sin \alpha_n = \frac{2}{a_{n+1} a_{n-1}} \sqrt{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)},$$

a ve spojení s (XIII) Heronův vzorec

$$\nabla = \sqrt{s \Pi (s - a_n)}.$$

Narýsujeme-li jmenované kružnice o poloměrech r , r_1 , r_2 , r_3 , obdržíme obvyklým způsobem všechny užívané vztahy.

b) Nemusíme však provéstí žádnou novou konstrukci, uvážíme-li, že výšky $A_n P_n$ jsou *osy vnitřních úhlů* $180^\circ - 2\alpha_n$ v ortickém trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$, strany $A_{n+1} A_{n-1}$ pak *osy jeho vnějších úhlů* $2\alpha_n$, neboť jsme dokázali, že $\sphericalangle A_n P_n P_{n+1} = \sphericalangle P_{n-1} P_n A_n = 90^\circ - \alpha_n$, a poněvadž jest $A_n P_n \perp A_{n+1} A_{n-1}$. Jest tudíž ortocentr V středem kružnice vepsané (ρ její poloměr), vrcholy A_n středy kružnic připsaných (ρ_n jejich poloměry) v ortickém trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$. Stačí tedy považovati tento trojúhelník za základní a trojúhelník daný $A_1 A_2 A_3$ za trojúhelník středů S_n kružnic připsaných.

Tím jsem ukázal, že jest možno odvoditi všechny relace středoškolské geometrie trojúhelníku i na půdě geometrie přirozené z téhož základu — z konstrukce p-transversál.)*

*) Předneseno ve schůzi odboru JČMF v Brně 4. V. 1933. O námětech bude diskutováno tamtéž v zimním období. Proto prosím středoškolské kolegy, aby laskavě zájali stanovisko a sdělili je stručně písemně Jednotě čsl. matematiků a fysiků v Praze II., Vodňčková 20, nejpozději do jednoho měsíce.