Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 3, 251--271

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122596`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1907

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

$$f\binom{m\ \ n\ \ p}{x,\ y,\ z} = \Sigma \frac{(yx)^\lambda}{\lambda!} \frac{(zx)^\mu}{\mu!} A_{\lambda,\mu} + \Sigma (yx)^\lambda (zx)^\mu (zy)^\varrho B_{\lambda,\mu,\varrho},$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots n,$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots p,$$
$$\varrho = 1, 2, 3, \ldots;$$

zároveň pak jest v prvém součtu $\lambda + \mu \leq m$, v druhém pak součtu $\lambda + \mu = m$, $\lambda + \varrho \leqq n$, $\mu + \varrho \leqq p$.

Koefficienty $A_{\lambda,\mu}$ jsou stanoveny týmž vztahem (15) jako $A_{\lambda,\mu,\nu}$ v (6′) (stačí klásti $q = 0$, $\nu = 0$ a $A_{\lambda,\mu} = A_{\lambda,\mu,0}$); k určení forem $B_{\lambda,\mu,\varrho}$ by bylo třeba podniknouti zvláštní vyšetřování.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Když jsme takto stanovili některé výrazy pro úplný differenciální poměr vektoru **v** dle **r**, chceme znázorniti jej geometricky; k tomu hodí se vektor, který obdržíme, násobíme-li úplný differenciální poměr jednotkovým vektorem $\mathbf{s}_1$, při čemž vektor ten může býti postfaktorem anebo praefaktorem. Jako jsme v poli skalárním poznali součin $\frac{dv}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$, rovnající se dle (37) skaláru $\frac{dv}{ds}$, tak jest důležitý v poli vektorovém součin $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ anebo $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, který jest dle (21ᵃ) vektorem.

Srovnajíce rovnici (59ᵃ), totiž

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \frac{d\mathbf{v}}{ds} \mathbf{s}_1,$$

s rovnicí (62ᶜ)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}_s} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1\right) \mathbf{s}_1,$$

obdržíme

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{ds}. \tag{70}$$

Tudíž dle (57) vektor

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{dv_x}{ds}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{ds}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{ds}\mathbf{k} \tag{71^a}$$

a dle (58) týž vektor

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{dx}{ds}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}. \tag{71^b}$$

V této rovnici značí $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ po řadě cosiny úhlů, jež tvoří běh jednotkového vektoru $\mathbf{s}_1$ s osami souřadnými; týž význam mají součinitele s_x, s_y, s_z v rovnici

$$\mathbf{s}_1 = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}.$$

Pročež platí vzorec:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = s_x\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + s_y\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + s_z\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}, \tag{71^c}$$

na jehož levé straně může také státi $(\nabla\,\mathbf{v}) \,.\, \mathbf{s}_1$; dle výše uvedené věty, že skalární součin mnohočlenu dyadického (jako praefaktoru) a vektoru rovná se součinu téhož vektoru a sdruženého mnohočlenu dyadického (jako postfaktoru), lze místo tohoto součinu psáti $\mathbf{s}_1 \,.\, (\nabla_C\,\mathbf{v})$ čili vzhledem ke vzorci (20^b) $(\mathbf{s}_1 \,.\, \nabla_C)\,\mathbf{v}$. Tím dospějeme k novému symbolickému operátoru

$$(\mathbf{s}_1 \,.\, \nabla_C) = s_x\frac{\partial}{\partial x} + s_y\frac{\partial}{\partial y} + s_z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{72}$$

se kterým se shledáváme u Wilsona, Föppla, Bucherera a j.*) Mohli bychom jej nazvati dle těchto autorů *operátorem* ∇ *v určitém směru* $\mathbf{s}_1$; operátor ten může se vztahovati i ke skalárům i k vektorům. Význam jeho pro vektory dán jest rovnicí (70); pro skaláry platí obdobně

$$(\mathbf{s}_1 \,.\, \nabla)v = \mathbf{s}_1 \,.\, (\nabla v) = s_x\frac{\partial v}{\partial x} + s_y\frac{\partial v}{\partial y} + s_z\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dv}{ds} \tag{73}$$

vzhledem k rovnici (25).

---

*) Tito spisovatelé píší však $(\mathbf{s}_1 \,.\, \nabla)$ nebo kratčeji $(\mathbf{s}_1\nabla)$, jelikož operator ∇, u nich užívaný, shoduje se s naším ∇_C. Jaumann (ve svém spise: »Die Grundlagen der Bewegungslehre«, pag. 243. a i jinde) vyslovuje se proti zavádění nových operátorů, jež nemají reálného podkladu; ostatně lze se bez nich docela dobře obejíti.

Rovnici (71^c) lze ještě přetvořiti; pišme v ní dle (57)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k},$$

a podobné výrazy za $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$ a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$. Touto substitucí vychází po náležitém uspořádání

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = &\left(s_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + s_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + s_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\ &+ \left(s_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + s_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + s_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(s_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + s_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + s_z \frac{\partial v^z}{\partial z}\right)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{71^d}$$

Obdobné tři vzorce ke vzorcům (71^a), (71^b), (71^d) vyšetříme pro sdružený součin $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, který se též rovná $\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_c \cdot \mathbf{s}_1$; položme totiž jednou dle (65)

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_c = \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z},$$

po druhé dle (67^c)

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_c = \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}\mathbf{k}.$$

V případě prvém obdržíme

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{dx}\right) \cdot \mathbf{s}_1 + \left(\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{s}_1 + \left(\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{s}_1.$$

Jest však dle (20^a)

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \mathbf{s}_1\right);$$

jestliže pokládáme při differenciaci dle x jednotkový vektor $\mathbf{s}_1$ za stálý, můžeme psáti

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_1)}{\partial x}$$

a

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{i}\frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_1)}{\partial x}.$$

Ale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_1$ jest dle (3) velikostí průmětu vektoru $\mathbf{v}$ na směr vektoru $\mathbf{s}_1$, kterou krátce označíme v_s; i bude

$$\left(\mathbf{i}\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial v_s}{\partial x}.$$

Podobně vyjádříme ostatní dva členy na pravé straně poslední rovnice pro $\mathbf{s}_1 \cdot \dfrac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, čímž nabýváme vzorce

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial v_s}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial v_s}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial v_s}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{74a}$$

Dle (36) pravá strana této rovnice rovná se $\dfrac{dv_s}{d\mathbf{r}}$, pročež

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{dv_s}{d\mathbf{r}}, \tag{75}$$

což jest obdobná rovnice ku (70).

Po druhé (klademe-li totiž za $\left(\dfrac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C$ hodnotu ze vzorce (67c)) nabýváme

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{dv_x}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{i}\right) \cdot \mathbf{s}_1 + \left(\frac{dv_y}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{s}_1 + \left(\frac{dv_z}{d\mathbf{r}}\,\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{s}_1$$
$$= \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{s}_1) + \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{s}_1) + \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_1),$$

při čemž jsme opět užili rovnice (20a); avšak dle (4)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{dx}{ds}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{dy}{ds}, \quad \mathbf{k}\;\mathbf{s}_1 = \frac{dz}{ds},$$

tudíž

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{dx}{ds}\frac{dv_x}{d\mathbf{r}} + \frac{dy}{ds}\frac{dv_y}{d\mathbf{r}} + \frac{dz}{ds}\frac{dv_z}{d\mathbf{r}}. \tag{74b}$$

Konečně výpočtem zcela obdobným výpočtu, kterým jsme si zjednali vzorec (71c), nabudeme rovnice

$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \left(s_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + s_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + s_z \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$
$$+ \left(s_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + s_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + s_z \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$
$$= \left(s_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + s_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + s_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \tag{74c}$$

Dáme-li splynouti jednotkovému vektoru $\mathbf{s}_1$ s vektorem $\mathbf{i}$, majícím směr osy x-ové, změní se vzorec (71^b) ve

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \tag{76^a}$$

a vzorec (74^b) ve

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}; \tag{76^b}$$

obdobné výrazy obdržíme, sjednotí-li se běh vektoru $\mathbf{s}_1$ s během osy y-ové a s během osy z-ové.

Podobnost rovnic jednak (71^a) a (74^a), jednak (71^b) a (74^b) jest zřejmá; tak pravá strana rovnice (71^b) liší se od pravé strany rovnice (74^b) tím, že v ní $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$ jsou po řadě nahrazeny poměry $\frac{dv_x}{d\mathbf{r}}$, $\frac{dv_y}{d\mathbf{r}}$, $\frac{dv_z}{d\mathbf{r}}$.

Nazveme-li α, β, γ úhly, jež tvoří běh vektoru $\mathbf{s}_1$ s osami souřadnými, jest patrně $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$; tudíž

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cos\gamma$$

a sdružená hodnota

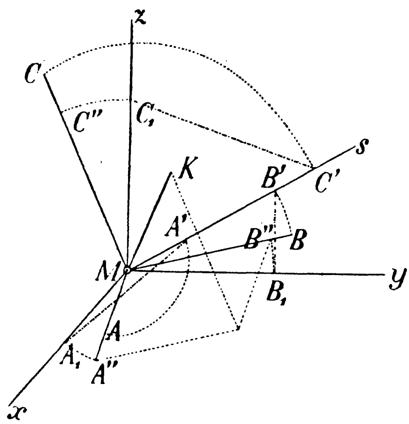
$$\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}\cos\alpha + \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}\cos\beta + \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}\cos\gamma.$$

Rovnic těch můžeme nyní použíti, abychom oba tyto vektory sestrojili. Buďtež nejprve dány vektory $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \overline{MA}$ (obr. 15.), $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \overline{MB}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \overline{MC}$; mimo to dán jest přímkou s běh vektoru $\mathbf{s}_1$. Vnesme na tuto přímku velikosti daných vektorů, tedy učiňme délku $MA' = MA$, délku $MB' = MB$, délku $MC' = MC$; pak promítněme bod A' na osu x-ovou, bod B' na osu y-ovou a bod C' na osu z-ovou. I bude $MA_1 = MA' \cos\alpha$, $MB_1 = MB' \cos\beta$, $MC_1 = MC' \cos\gamma$, značí-li jako výše α, β, γ úhly, jež tvoří přímka s po řadě s osami souřadnými. Dále přenesme délku MA_1 na běh $\overline{MA}$, délku MB_1 na běh $\overline{MB}$ a délku MC_1 na běh $\overline{MC}$ a sečtěme (geometricky) takto obdržené vektory $\overline{MA''}$,

$\overline{MB''}$ a $\overline{MC''}$. Vektor $\overline{MK}$, tímto sečtením vzniklý, jest hledaný vektor $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$. Neboť patrně

$$\overline{MA''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cos\alpha, \quad \overline{MB''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cos\beta, \quad \overline{MC''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cos\gamma$$

a
$$\overline{MK} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cos\gamma.$$



Obr. 15.

Týmž způsobem sestrojil by se vektor $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, kdyby místo $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ dány byly jiné tři vektory

$$\overline{MD} = \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}, \quad \overline{ME} = \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}, \quad \overline{MF} = \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}.$$

Zavedeme-li soustavu souřadnic, jejímiž osami jsou přímky ve směrech $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ a $\overline{MC}$ a nazveme-li v této soustavě souřadnice bodu K: ξ, η, ζ, bude

$$\xi = \overline{MA''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cos\alpha, \quad \eta = \overline{MB''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cos\beta,$$
$$\zeta = \overline{MC''} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cos\gamma.$$

Vložíme-li hodnoty $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, z těchto rovnic plynoucí, do podmínečné rovnice

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

obdržíme rovnici plochy, která jest geometrickým místem bodů K (předpokládáme-li ovšem, že differenciální poměry vektoru $\mathbf{v}$ ve všech směrech jsou jednoznačné a mění se spojitě); plocha ta jest patrně ellipsoidem, jehož třemi sdruženými poloměry jsou $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$.

Otáčíme-li soustavu os souřadných (neměníce počátek) do všech poloh v prostoru, obdržíme všechny možné polohy trojin sdružených poloměrů ellipsoidu; kterékoli této trojině přísluší určitá poloha os souřadných a naopak. Pro libovolný směr $\mathbf{s}_1$ můžeme pak uvedenou konstrukcí stanoviti vektor $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$, jímž dán jest také úplný differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$.

Jsme tudíž oprávněni říci: Úplný differenciální poměr $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ představen jest v každém bodě pole ellipsoidem; neboť každou trojinou jeho sdružených poloměrů dány jsou $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$ a příslušejícími osami souřadnými jednotkové vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, tudíž všechny veličiny na pravé straně rovnice (63^b):

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\,\mathbf{k}\,,$$

jsou určeny.

Mezi všemi trojinami sdružených poloměrů vyskytuje se jedna, jejíž poloměry stojí na sobě vzájemně kolmo; jsou to hlavní poloosy ellipsoidu. Sluší podotknouti, že této zvláštní trojině příslušející soustava os souřadných zaujímá obecně jinou polohu v prostoru než poloosy.

Vedle tohoto ellipsoidu vyskytuje se v bodě M ještě druhý, jehož třemi sdruženými poloměry jsou $\frac{dv_x}{d\mathbf{r}}, \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}, \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}$; i tímto ellipsoidem stanoven jest úplný differenciální poměr $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ právě tak jako prvým. Kterékoli tři jeho sdružené poloměry stanoví $\frac{dv_x}{d\mathbf{r}}, \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}, \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}$, jim příslušející osy souřadné určují pak běh vektorů jednotkových $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, tudíž dán jest výraz

$$\mathbf{i}\frac{dv_x}{d\mathbf{r}}+\mathbf{j}\frac{dv_y}{d\mathbf{r}}+\mathbf{k}\frac{dv_z}{d\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}. \tag{67a}$$

Pro libovolný směr $\mathbf{s}_1$ sestrojíme opět vytčeným způsobem vektor $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, jehož lze též použíti k určení poměru $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$.

Z této úvahy jde, že úplný differenciální poměr vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, který jest toliko funkcí bodu M, představují dva ellipsoidy, z nichž jeden trojinami svých sdružených poloměrů stanoví částečné differenciální poměry vektoru $\mathbf{v}$ ve směrech os souřadných a druhý svými sdruženými poloměry úplné differenciální poměry skalárních částí jeho složek dle průvodiče. Jest tedy $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ (jako každý mnohočlen dyadový) dvojznačný, což se jeví tím, že vektory $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ jsou obecně různé.

Přihlédneme-li ještě ke sdružené hodnotě úplného differenciálního poměru vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$, obdržíme dle rovnic

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{s}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_C = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1$$

pro tuto hodnotu tytéž dva ellipsoidy, kterými byl vyjádřen differenciální poměr $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$; jenom sled jejich jest převrácený.

Úplnému differenciálnímu poměru $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ přísluší jako každému mnohočlenu dyadovému část skalární $\frac{d \cdot \mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ a část vektoriální $\frac{d \times \mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$; části ty, mající ve vektorové analysi velkou důležitost, byly zvlášť pojmenovány. I zoveme skalár $\frac{d \cdot \mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ čili $\nabla \cdot \mathbf{v}$ dle Clifforda *divergencí* vektoru a značíme jej *div* $\mathbf{v}$; vektoru $\frac{d \times \mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ čili $\nabla \times \mathbf{v}$ dáno Maxwellem jméno *curl* (*vír*, též *rotace*) vektoru a značí se *curl* $\mathbf{v}$ (někdy *rot* $\mathbf{v}$). Píšeme tedy

$$\begin{aligned} div\,\mathbf{v} &= \frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \nabla\,.\,\mathbf{v}, \\ curl\,\mathbf{v} &= \frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \nabla\times\mathbf{v}\ ^{*}). \end{aligned} \tag{77}$$

Z různých výrazů pro $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ obdržíme snadno příslušné vzorce pro $div\,\mathbf{v}$ a $curl\,\mathbf{v}$; tak na př. plyne ze vzorce (63^b)

$$div\,\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\,.\,\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\,.\,\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\,.\,\mathbf{k}. \tag{78^a}$$

Nahradíme-li ve vzorci (69^a) základní dyady **ii**, **ij**, **ik**, atd. skalárními součiny $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{k}$, atd. a přihlížíme-li ke vzorcům (5), obdržíme

$$div\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \tag{78^b}$$

podobně z téhož vzorce (69^a) vyplývá

$$curl\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\mathbf{k}, \tag{79^a}$$

jestliže v něm položíme $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}$, atd. za **ii**, **ij**, **ik**, atd. a máme-li zření k rovnicím (10) **). Poslední rovnici lze též psáti ve formě

---

*) Zaváděti symboly $\nabla\,\mathbf{v}$, $div\,\mathbf{v}$ a $curl\,\mathbf{v}$ místo $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, $\frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, $\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$, jest vlastně zbytečno; podržujeme-li tyto symboly, činíme tak z důvodů, že jednak dbáme historického rozvoje vědy, z něhož poznáváme, že byly zavedeny dříve, než byl vyšetřen význam jejich jako úplného differenciálního poměru vektoru $\mathbf{v}$ dle $\mathbf{r}$ a skalární a vektoriální části jeho (V. Fischerem), jednak setkáváme se s nimi ve spisech o vektorové analysi skoro výhradně.

**) Píše-li se, jak bývá někdy obvyklo, $\nabla\,\mathbf{v}$ místo našeho $\nabla_c\mathbf{v}$, bude hodnota divergence nezměněna, neboť členy činící příčku ve výraze (69) pro $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ a v podobném výraze pro $\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)_c$ jsou navzájem stejny. Jest tedy

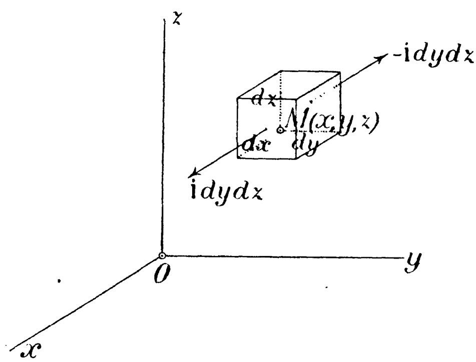
Gibbsova
$$div\,\mathbf{v} = \nabla_c\,.\,\mathbf{v} = \nabla\,.\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{78'}$$

kdežto Gibbsův

$$\begin{aligned} curl\,\mathbf{v} = \nabla_c\times\mathbf{v} = -\nabla\times\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{79'}$$

$$curl\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (79^b)$$

Abychom objasnili význam obou symbolů *div* a *curl*, použijme známého hydrodynamického znázornění pole vektorového. Vytkněme si za úkol ustanoviti výtok vektorový povrchem elementární krychle, jejíž hrany buďtež rovnoběžny s osami souřadnic (obr. 16.). Bodu M (x, y, z), který jest jedním vrcholem této



Obr. 16.

krychle, přísluší v poli vektorovém vektor $\mathbf{v}$; délky hran krychle buďtež dx, dy, dz. Stěnu, jejímž jedním vrcholem jest bod M a jejíž hrany jsou dy a dz, představuje vektor $-\mathbf{i}\,dy\,dz$ (kladný směr vektoru určujícího plochu jest totiž namířen z vnitřku na venek, což jest směr protivný ke kladnému směru osy x-ové); tudíž vektorový tok touto plochou dán jest skalárním součinem $\mathbf{v}.(-\mathbf{i}\,dy\,dz) = -\mathbf{v}.\mathbf{i}\,dy\,dz$.

Přejdeme-li k protější (o dx vzdálené) stěně elementární krychle, která jest dána vektorem $\mathbf{i}\,dy\,dz$, změní se vektor $\mathbf{v}$ dle řady Taylorovy (přestaneme-li na prvních dvou členech jejích) ve $\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,dx$; pročež vektorový tok touto stěnou dán jest součinem $\left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,dx\right).\mathbf{i}\,dy\,dz$.

Celkem protéká tedy oběma vytčenými stěnami za jednotku časovou množství myšlené tekutiny

$$-\mathbf{v}\,.\,\mathbf{i}\,dy\,dz + \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,dx\right).\,\mathbf{i}\,dy\,dz = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,.\,\mathbf{i}\,dx\,dy\,dz.$$

Podobně stěnami rovnoběžnými s rovinou os z-ové a x-ové protéká tekutiny

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\,.\,\mathbf{j}\,dx\,dy\,dz$$

a stěnami rovnoběžnými s rovinou os x-ové a y-ové

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\,.\,\mathbf{k}\,dx\,dy\,dz;$$

výtok celým povrchem elementární krychle jest pak dán výrazem

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,.\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\,.\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\,.\,\mathbf{k}\right) dx\,dy\,dz.$$

Jest však $dx\,dy\,dz$ obsah dS, elementární krychle

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\,.\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\,.\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\,.\,\mathbf{k}$$

pak dle (78^a) rovná se $div\,\mathbf{v}$; tudíž obdržíme pro hledaný vektorový výtok součin

$$div\,\mathbf{v}\,dS.$$

O tuto veličinu zvětší nebo zmenší se výtokem množství myšlené tekutiny vně elementární krychle oproti množství jejímu uvnitř tohoto tělesa; přepočítáme-li toto zvětšení nebo zmenšení na jednotku objemu, obdržíme $div\,\mathbf{v}$ jakožto změnu (přírůstek neb úbytek) spec. váhy tekutiny, která nastává tím, že tekutina, již pokládáme za stlačitelnou a roztažitelnou, se rozbíhá (diverguje) z prostorového prvku na všechny strany*). Máme-li za to, že fiktivní tekutina naplňující pole vektorové jest nestlačitelná, značí $div\,\mathbf{v}$ vydatnost zdroje nebo zániku tekutiny (na jednotku objemovou), který si myslíme uvnitř krychle.

---

*) Maxwell přihlížel ku změně spec. váhy tekutiny, sbíhá-li se (konverguje-li) do vnitřku elementární krychle; změnu tu označil slovem *konvergence* vektoru. Konvergence ta rovná se patrně divergenci vektoru s protivným znaménkem vzaté.

Má-li býti pole solenoidální, musí býti patrně vyhověno podmínce

$$div\,\mathbf{v} = 0 \tag{80ᵃ}$$

čili vzhledem k (78^b)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{80ᵇ}$$

neboť jen pak v libovolné trubici vektorové každým průřezem protéká stejné množství myšlené tekutiny. Takové pole znázorňujeme pohybem tekutiny, která má známé vlastnosti kapalin; jest nestlačitelná a množství hmoty její zůstane nezměněné (není v ní ani zdrojů ani zániků). Rovnice (80) zove se také *rovnicí hydrodynamickou.*

Obecně s každým polem vektorovým spojeno jest pole skalární, jež tvoří hodnoty divergencí, příslušející všem bodům pole; pole toto můžeme nazvati *polem divergencí.*

Budiž tuto ještě připomenuto, že divergence polárního vektoru jest obyčejným skalárem či skalárem stupně prvního; divergence axiálního vektoru jest však pseudoskalárem či skalárem stupně druhého. Neboť přechodem od soustavy souřadnic v pravo točivé k soustavě v levo točivé mění differenciální symboly $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ svá znaménka; tudíž divergence polárního vektoru podržuje při inversi souřadnic svoje znaménko, kdežto znaménko divergence axiálního vektoru proměňuje se v protivné.

Ne tak snadno jako pojem divergence vysvětliti lze pojem druhého ze zavedených symbolů, který jsme nazvali *curl.*

Představme si opět, že myšlená tekutina pohybuje se tak, aby rychlost v každém bodě jejím dána byla určitým vektorem $\mathbf{v}$. Neskonale malá koule, kterou si v tekutině vytkneme, vykonává při tom v nekonečně krátké době pohyb, jejž si můžeme mysliti obecně složený z translace v jistém směru, z rotace kolem jakési osy a z deformace, jíž tvar koule se mění. S druhým z těchto základních pohybů souvisí pak *curl* $\mathbf{v}$ jednoduchým způsobem; abychom souvislost tu snadněji poznali, nepřihlížejme zatím k deformaci koule a mysleme si, že toto těleso se pohybuje jako útvar neproměnný. Pohyb ten jest aequivalentní pohybu šroubovému; rychlost $\mathbf{v}$ libovolného bodu M koule, jehož poloha dána jest průvodičem $\mathbf{r}$, stanoví vzorec (9):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{o} \times \mathbf{r},$$

kde značí $\mathbf{v}_0$ složku translační, společnou všem bodům, a $\mathbf{o}$ vektor, který určuje svým během osu složky rotační a svou velikostí úhlovou rychlost její.

Vyhledejme v tomto případě hodnotu pro *curl* $\mathbf{v}$ čili pro vektoriální součin

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{o} \times \mathbf{r});$$

především $\nabla \times \mathbf{v}_0$ rovná se nulle, neboť je-li vektor $\mathbf{v}_0$ stálý, jest $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ atd.; zbývá tudíž

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times [\mathbf{o} \times \mathbf{r}].$$

Dle vzorce (16^b) lze součin na pravé straně této rovnice rozvésti v rozdíl dvou vektorů; i bude

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\nabla \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{o} - (\nabla \cdot \mathbf{o})\, \mathbf{r}. \qquad (\varkappa)$$

Jest však průvodič

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

tedy dle (63^a)

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

čili, poněvadž

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k},$$

též

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}, \qquad (81^a)$$

kde na pravé straně jest dyadový trojčlen, idemfaktorem zvaný.

Dále jest dle (77) a (78^b) skalární část idemfaktoru

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = div\, \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \qquad (81^b)$$

z čehož plyne

$$(\nabla \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{o} = 3\mathbf{o}.$$

Pišme v posledním součinu na pravé straně rovnice ($\varkappa$) za $(\nabla \cdot \mathbf{o})\, \mathbf{r}$ nejprve $(\mathbf{o} \cdot \nabla)\, \mathbf{r}$ a pak podle (20^b) $\mathbf{o} \cdot (\nabla \mathbf{r})$, což se dle předcházejícího rovná $\mathbf{o} \cdot \mathbf{I}$.

Idemfaktor má však vlastnost, že, násobíme-li jím (jako postfaktorem nebo praefaktorem) libovolný vektor, na př. $\mathbf{o} = o_x\mathbf{i} + o_y\mathbf{j} + o_z\mathbf{k}$, vychází týž vektor $\mathbf{o}$. Důkaz jest snadný; jestiť

$$\mathbf{o} \cdot \mathbf{I} = (o_x\mathbf{i} + o_y\mathbf{j} + o_z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{I} = o_x\mathbf{i} \cdot \mathbf{I} + o_y\mathbf{j} \cdot \mathbf{I} + o_z\mathbf{k} \cdot \mathbf{I}.$$

Ale
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}\mathbf{i}) + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{j}\mathbf{j}) + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{k}\mathbf{k}),$$

čili dle (20^b)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{I} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{k};$$

přihlédajíce k rovnicím (5), totiž $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ obdržíme

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{i},$$

a podobně

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{k},$$

pročež

$$\mathbf{o} \cdot \mathbf{I} = o_x\mathbf{i} + o_y\mathbf{j} + o_z\mathbf{k} = \mathbf{o}. \tag{82^a}$$

Týmž způsobem dokáže se rovnice

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}. \tag{82^b}$$

Užijeme-li vztahu (82^a), nabudeme

$$(\nabla \cdot \mathbf{o})\,\mathbf{r} = \mathbf{o} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{o}$$

a
$$\nabla \times \mathbf{v} = 3\mathbf{o} - \mathbf{o} = 2\mathbf{o},$$

čili
$$\mathit{curl}\ \mathbf{v} \doteq 2\mathbf{o}, \tag{83}$$

t. j. *curl* rychlostního vektoru v libovolném bodu vytčeného zvláštního pole jest vektorem, jehož běh jest dán okamžitou osou rotační složky v tomto bodě a jehož velikost určena jest dvojnásobnou rychlostí úhlovou.

Lze pak vzorec (9) psáti také ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \tfrac{1}{2}\,\mathit{curl}\ \mathbf{v} \times \mathbf{r}. \tag{84}$$

Vyšetříme níže obecnější vzorec pro rychlostní vektor $\mathbf{v}$, při čemž přihlíženo bude také k deformaci neskonale malé koule, tekutinou vyplněné; i má *curl* $\mathbf{v}$, vyskytující se v tomto obecnějším vzorci, týž význam.

Vektor, který představuje úhlovou rychlost otáčející se soustavy hmotné, jest axiální; tudíž *curl* polárního vektoru $\mathbf{v}$ jest vektorem axiálním, jak lze také přímo dokázati. Je-li $\mathbf{v}$ vektorem axiálním, jest jeho *curl* vektorem polárním (vzhledem k tomu, že differenciální symboly $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ mění svá znaménka, přejdeme-li od soustavy souřadnic v pravo točivé k soustavě v levo točivé).

Každému poli, jehož od bodu k bodu proměnlivý vektor jest $\mathbf{v}$, přísluší jiné pole vektorové, *pole curlů*, utvořené všemi vektory, jež určují v každém bodě *curl* $\mathbf{v}$.

Zvláštním druhem polí vektorových jest pole, jež vyhovuje podmínce

$$curl\ \mathbf{v} = 0, \tag{85^a}$$

čili

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\mathbf{k} = 0; \tag{85^b}$$

takové pole zove se *polem irrotationálním* či *polem bez víru.*

Pro vektor $\mathbf{v}$ irrotationálního pole platí vzhledem k (85^b)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}; \tag{86^a}$$

poněvadž dle (57)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathbf{k},$$

a dle (36)

$$\frac{dv_x}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{k},$$

bude na základě podmínek (86^a)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{dv_x}{d\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{dv_y}{d\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{dv_z}{d\mathbf{r}}. \tag{86^b}$$

Z toho plyne dále, máme-li zření k rovnicím (71^b) a (74^b), že v tomto případě

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}; \tag{86^c}$$

pročež oba ellipsoidy, příslušející součinům na levé i na pravé straně této rovnice, v každém bodě pole se sjednocují. Pole irrotationální jest *polem samosdruženým*, což také vyplývá z toho, že trojčlen dyadový $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ má v něm tvar

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial z}, & \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{matrix}$$

jak poznáváme z rovnice (69^b), v níž dosadíme podmínky (86^a).

Sluší ještě podotknouti, že hlavní osy jediného ellipsoidu v každém bodě pole irrotationálního spadají po řadě do os souřadných soustavy, která přísluší oné trojině sdružených poloměrů; u obecného pole vektorového jsou, jak bylo výše pověděno, hlavní osy každého z obou ellipsoidů vzhledem k příslušné soustavě os souřadných pootočeny.

Může se též vyskytnouti pole vektorové, pro něž i

$$div\, \mathbf{v} = 0 \text{ i } curl\, \mathbf{v} = 0; \tag{87}$$

jest to pole *beze zdrojů* a *bez vírů.*

V lineárním poli vektorovém mají i *div* $\mathbf{v}$ i *curl* $\mathbf{v}$ pro každý vektor hodnotu stálou; jestiť vzhledem k rovnicím (56^b)

$$\begin{aligned} div\, \mathbf{v} &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad (88) \\ curl\, \mathbf{v} &= (a_{23} - a_{32})\, \mathbf{i} + (a_{31} - a_{13})\, \mathbf{j} + (a_{12} - a_{21})\, \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Jiný zvláštní druh polí vektorových vznikne takto: Mysleme si soustavu ploch, danou obecně rovnicí $w = konst$, při čemž každé hodnotě konstanty přísluší jediná plocha. Vztyčíme-li ve všech bodech těchto ploch normály, může běh každé z nich býti během vektoru, jehož velikost jest jinak libovolná; soubor takových vektorů tvoří pole, zvané dle W. Thomsona *polem komplex-lamellárním.*

Aby běh vektoru $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ byl kolmým ke ploše $w = konst$, musí, jak známo, cosiny úhlů, jež tvoří s osami souřadnými, býti úměrny po řadě $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$; jest tudíž

$$v_x = \lambda \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_y = \lambda \frac{\partial w}{\partial y}, \quad v_z = \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

a

$$\lambda\, \mathbf{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

čili vzhledem k (36)

$$\mathbf{v} = \lambda \nabla w,$$

což jest také bezprostředně zřejmo, vzpomeneme-li, jaký význam má gradient ∇w. Činitel λ mění se od bodu k bodu; vektor $\mathbf{v}$ závisí na dvou skalárech λ a w.

Jest však

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

aneb

$$\lambda\, dw = v_x dx + v_y dy + v_z dz; \tag{89a}$$

aby byl výraz $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ úplným differenciálem, musí býti vyhověno podmínce *)

$$v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + v_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

a $$curl\ \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \mathbf{k},$$

můžeme tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$\mathbf{v} \,.\, curl\ \mathbf{v} = 0, \tag{90}$$

majíce totiž zření k rovnici (6).

Jest tedy podmínkou, aby pole vektorové bylo komplex-lamellárním, že musí vektor $\mathbf{v}$ v každém bodě pole býti kolmo na svém curlu.

Známé nám pole gradientů, jehož vektory na příslušných hladinách kolmo stojí, jest zvláštním případem ($\lambda = 1$) pole komplex-lamellárního.

Po těchto vývodech a definicích přejdeme k složitým funkcím vektorovým. Takovou jest nejprve součet několika funkcí $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ atd., tedy výraz $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \ldots$ Není třeba zvláště dokazovati, že platí o tomto součtu rovnice

$$\frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \ldots)}{d\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \ldots \tag{91a}$$

*) Viz Studnička: »Základové vyšší mathematiky«, díl třetí, p. 210.

Poněvadž skalární části obou stran té rovnice se musí sobě rovnati, plyne z ní vztah

$$\frac{d\,.\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots)}{d\mathbf{r}}=\frac{d\,.\,\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}+\frac{d\,.\,\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}+\ldots$$

čili $$div\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots)=div\,\mathbf{u}+div\,\mathbf{v}+\ldots; \qquad (91^b)$$

podobně bude

$$\frac{d\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots)}{d\mathbf{r}}=\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}+\frac{d\times\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}+\ldots$$

čili $$curl\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots)=curl\,\mathbf{u}+curl\,\mathbf{v}+\ldots \qquad (91^c)$$

Jiným příkladem jest funkce $m\mathbf{u}$, kde značí m libovolný skalár. *) Vzhledem k (63^b) jest

$$\frac{d\,(m\mathbf{u})}{d\mathbf{r}}=\frac{\partial\,(m\mathbf{u})}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\,(m\mathbf{u})}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\,(m\mathbf{u})}{\partial z}\,\mathbf{k};$$

differencujíce na pravé straně po řadě dle x, y, z obdržíme

$$\frac{d\,(m\mathbf{u})}{d\mathbf{r}}=\left(\frac{\partial m}{\partial x}\,\mathbf{u}+m\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial m}{\partial y}\,\mathbf{u}+m\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$
$$+\left(\frac{\partial m}{\partial z}\,\mathbf{u}+m\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$
$$=\mathbf{u}\left(\frac{\partial m}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial m}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial m}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)+m\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)$$

čili dle vzorců (36) a (63^b)

$$\frac{d\,(m\mathbf{u})}{d\mathbf{r}}=\mathbf{u}\,\frac{dm}{d\mathbf{r}}+m\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}. \qquad (92^a)$$

Z této rovnice vyplývá

$$div\,(m\mathbf{u})=\mathbf{u}\,.\,\nabla m+m\;div\,\mathbf{u} \qquad (92^b)$$

a $$curl\,(m\mathbf{u})=\mathbf{u}\times\nabla m+m\;curl\,\mathbf{u}, \qquad (92^c)$$

jak lze také přímo dokázati.

---

*) Jaumann ve spise »Die Grundlagen der Bewegungslehre« nazývá vektor $m\mathbf{v}$ *fluktorem* vektoru $\mathbf{v}$ (pag. 247.). Takovým fluktorem jest vektor $\lambda\nabla w$ pole complex-lamellárního.

Pole, v němž každému bodu přísluší určitý skalár m a určitý vektor $\mathbf{v}$, při čemž i m i $\mathbf{v}$ se mění nepřetržitě od bodu k bodu, můžeme dle toho nazvati *polem fluktorovým*.

Dalšími složitými funkcemi buďtež součiny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Položíme-li

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

jest dle (6)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z,$$

a dle (11)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\mathbf{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\mathbf{k}.$$

Za differenciální poměry $\dfrac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{d\mathbf{r}}$ a $\dfrac{d[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]}{d\mathbf{r}}$ pišme $\dfrac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{dr}\,\mathbf{r}_1$ a $\dfrac{d[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]}{dr}\,\mathbf{r}_1$ hledíce k tomu, že $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ a $\dfrac{1}{\mathbf{r}_1} = \mathbf{r}_1$. Pak bude nejprve

$$\frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{d(u_x v_x)}{dr} + \frac{d(u_y v_y)}{dr} + \frac{d(u_z v_z)}{dr}\right)\mathbf{r}_1;$$

differencujíce na pravé straně obdržíme

$$\frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{d\mathbf{r}} = \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \left(u_x \frac{dv_x}{dr} + u_y \frac{dv_y}{dr} + u_z \frac{dv_z}{dr} + v_x \frac{du_x}{dr}\right.$$
$$\left. + v_y \frac{du_y}{dr} + v_z \frac{du_z}{dr}\right)\mathbf{r}_1. \qquad (\lambda)$$

Jelikož

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}, \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dr} = \frac{dv_x}{dr}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dr}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dr}\mathbf{k}$$

(dle (57)), jest vzhledem k (6)

$$u_x \frac{dv_x}{dr} + u_y \frac{dv_y}{dr} + u_z \frac{dv_z}{dr} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dr}$$

a podobně

$$v_x \frac{du_x}{dr} + v_y \frac{du_y}{dr} + v_z \frac{du_z}{dr} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dr};$$

pročež

$$\frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{d\mathbf{r}} = \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dr} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dr}\right)\mathbf{r}_1 = \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)\mathbf{r}_1 + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dr}\right)\mathbf{r}_1$$

čili podle (20[b])

$$\frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{d\mathbf{r}} = \mathbf{u} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1\right) + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dr}\,\mathbf{r}_1\right).$$

Avšak

$$\frac{d\mathbf{v}}{dr}\,\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dr}\,\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}};$$

tudíž

$$\frac{d(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})}{d\mathbf{r}} = \mathbf{u}\,.\,\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \mathbf{v}\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \qquad (93^a)$$

čili

$$\nabla(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\,.\,\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\,.\,\nabla\mathbf{u}. \qquad (93^b)$$

Součinu $\mathbf{u}\,.\,\nabla\mathbf{v}$ můžeme dáti ještě jiný tvar, zavedeme-li totiž *částečné operatory delta*. Značí pak $\nabla_\mathbf{v}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})$, že derivacé ∇ vztahuje se k součinu $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}$, v němž toliko činitel $\mathbf{v}$ pokládáme za proměnlivý, kdežto činitel $\mathbf{u}$ jest stálý. Vyhovujíce této podmínce položíme v rovnici (93[b]) $\nabla\mathbf{u} = 0$, tudíž

$$\nabla_\mathbf{v}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\,.\,\nabla\mathbf{v} \qquad (94^a)$$

a podobně

$$\nabla_\mathbf{u}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,.\,\nabla\mathbf{u}; \qquad (94^b)$$

pročež píšeme rovnici (93[b]) též takto:

$$\nabla(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \nabla_\mathbf{v}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) + \nabla_\mathbf{u}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}). \qquad (93^c)$$

Analytický výraz pro $\nabla_\mathbf{v}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})$ obdržíme z rovnice (λ) kladouce v ní $\frac{du_x}{dr} = \frac{du_y}{dr} = \frac{du_z}{dr} = 0$; tím vychází

$$\nabla_\mathbf{v}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \left(u_x\frac{dv_x}{dr} + u_y\frac{dv_y}{dr} + u_z\frac{dv_z}{dr}\right)\mathbf{r}_1$$

$$= u_x\frac{dv_x}{d\mathbf{r}} + u_y\frac{dv_y}{d\mathbf{r}} + u_z\frac{dv_z}{d\mathbf{r}}. \qquad (95)$$

Je-li ve zvláštním případě proměnlivý vektor $\mathbf{v}$ průvodičem $\mathbf{r}$, jest $\nabla_\mathbf{r}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{r}) = \mathbf{u}\,.\,\nabla\mathbf{r}$ a poněvadž dle (81[a]) $\nabla\mathbf{r}$ rovná se idemfaktoru $\mathbf{I}$, jest též

$$\nabla_\mathbf{r}(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{r}) = \mathbf{u}\,.\,\mathbf{I} = \mathbf{u}. \qquad (96)$$

Užijeme-li těchto částečných operatorů, můžeme také vyvoditi vhodný vzorec pro součin $\mathbf{u}\times curl\,\mathbf{v} = \mathbf{u}\times[\nabla\times\mathbf{v}]$, jehož později použijeme. Dříve však uveden budiž obecný vztah mezi dvěma součiny vektoru a dyady, z nichž v jednom dyada jest praefaktorem a ve druhém postfaktorem; vztah ten založen jest na rovnici (16[b])

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}] = (\mathbf{a}\;\;\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Majíce zření ke vzorci (20^b) můžeme tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{cb}) - \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{bc})$$

čili

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{bc})_C - \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{bc}), \tag{97^a}$$

neboť sdružená hodnota dyady $(\mathbf{bc})_C = \mathbf{cb}$. Poněvadž však obdržíme týž součin, násobíme-li vektor dyadou (jako postfaktorem) anebo sdruženou dyadu (jako praefaktor) týmž vektorem, bude také

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = (\mathbf{bc}) \,.\, \mathbf{a} - \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{bc}) \tag{97^b}$$

a podobně

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \,.\, (\mathbf{ab}) - \mathbf{c} \,.\, (\mathbf{ba}), \tag{98}$$

což jsou obecné vztahy hledané. (Pokračování.)

O tlaku světelného záření.

Napsal prof. J. **Najman** v Rakovníku.

J. Kepler [1]) první vyslovil domněnku, že světelné záření působí tlakem. Nedovedl si totiž jinak vysvětliti vznik ohonů u komet odvrácených od slunce. Neboť jak praví, „je nemožno viděti paprsky v čistém etheru, jenž jest za kometami, leda by se vyskytovala za kometami nějaká látka, na niž by paprsky sluneční kometou procházející narážely“. Aby vysvětlil zakřivení ohonů komet, uvažuje, že „sluneční paprsky nemohou býti oblouky, ale přímky. Z toho plyne, že v ohonech komet přítomna jest látka od slunečních paprsků odpuzená a tím výronem látky za různých podmínek můžeme obdržeti zakřivení ohonu.“

I. Newton [2]) byl toho názoru, že chvosty u komet vznikají z kouře neustále z jader komet vystupujícího, podobně jako stoupá kouř v atmosféře, a opouští náhled Keplerův dle jeho vlastní emanační theorie dosti pravděpodobný.

---

[1]) J. Keppleri »De Cometis«. Lib. secundus 1619. Opera Omnia 7, 100 Edit. Frisch Frankfurt 1868.

[2]) Sir I. Newton, Mathematische Principien der Naturlehre. Herausgegeben von J. Ph. Wolfers 1872.