Václav Jeřábek

O jistých cirkulárních křivkách stupně čtvrtého s dvojným bodem dotyčným

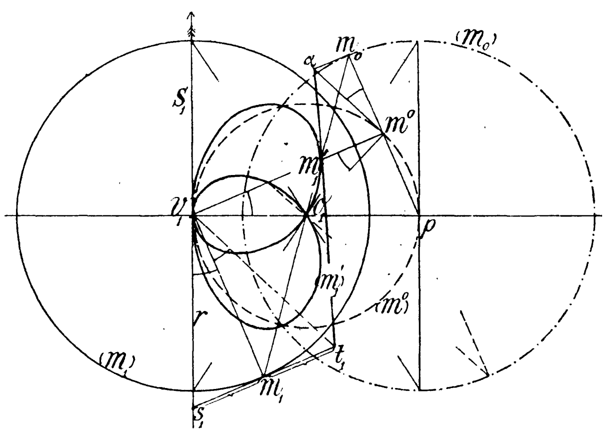
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 3, 233--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122591`

O jistých cirkulárních křivkách stupně čtvrtého s dvojným bodem dotyčným.

Napsal **V. Jeřábek**, ředitel české státní reálky v Brně.

1. V rovině dané kružnice (m_1) středu v_1 a poloměru r (obr. 1.) jest dán pevný bod o_1 a na kružnici této kterýkoliv bod m_1. Kolmice postavená na $v_1 m_1$ v bodu v_1 seče spojnici



Obr. 1.

$m_1 o_1$ v bodu m'_1. Pohybuje-li se bod m_1 po kružnici (m_1), popíše bod m'_1 křivku Ponceletovu (m'_1). Křivka tato jest průmětem meze stínu vlastního uzavřené kosoúhlé plochy šroubové, jejíž osa promítá se orth. na rovinu kruhu (m_1) do jeho středu v_1 a jejíž přímky povrchové mají své průměty v poloměrech $v_1 m_1 \ldots$ kruhu zmíněného. Značí-li h redukovanou výšku závitu $(h = \frac{H}{2\pi}$, H znamená výšku závitu), α odchylku povrchových přímek šroubové plochy a β odchylku paprsků světelných od průmětny, v níž se kruh (m_1) nalézá, jest poloměr (parametr) $r = h \cot g\, \alpha$ a $o_1 v_1 = h \cot g\, \beta$. Průměty paprsků světelných stojí kolmo na $o_1 v_1$ a směr jejich jest S_1.

Tečna křivky Ponceletovy. Sestrojme kteroukoliv kružnici (m^0) [1]), která přímku $v_1 o_1$ v bodech v_1 a p pravoúhelně protíná, veďme bodem p tětivu pm^0 v kruhu (m^0) a budiž m_0 průsečík přímek $m_1 o_1$ a pm^0. Ježto poměr $\frac{m_1 o_1}{m_0 o_1}$ rovná se stálému poměru $\frac{v_1 o_1}{p\, o_1}$, jest geom. místem bodu m_0 kruh (m_0) sestrojený ze středu p poloměrem pm_0. Mějme na mysli ještě kteroukoliv druhou polohu $n_0 n^0 n'_1$ trojúhelníka $m_0 m^0 m'_1$. [2]) Ježto strany trojúhelníka proměnlivého $m_0 m^0 m'_1$ stále procházejí pevnými body p, v_1 a o_1, jsou trojúhelníky $m_0 m^0 m'_1$ a $n_0 n^0 n'_1$ v centrálné kollineaci, jejíž osou jest $po_1 v_1$, pročež se protínají spojnice $m_0 n_0$, $m^0 n^0$, $m'_1 n'_1$ v témž bodu c, který jest středem kollineace řečených trojúhelníků. Máme-li na mysli, že vrcholy trojúhelníka $n_0 n^0 n'_1$ po křivkách (m_0), (m^0) a (m'_1) přibližují se stále k vrcholům trojúhelníka $m_0 m^0 m'_1$, který jest tedy mezní polohou trojúhelníka $n_0 n^0 n'_1$, jsou tečny křivek (m_0), (m^0), (m'_1) v bodech m_0, m^0, m'_1 mezními polohami přímek $m_0 n_0$, $m^0 n^0$ a $m'_1 n'_1$ a proto protínají se řečené tečny v témž bodu α, který jest mezní polohou středu kollineace c.

Nyní jest patrno, že spojnice bodu m'_1 s bodem α, v němž se sekou tečny kruhů (m_0) a (m^0) sestrojené v bodech m_0, m^0, jest tečnou křivky (m'_1) v bodu m'_1.

Jiné sestrojení tečny. Sestrojme tečnu $v_1 s_1$ kruhu (m^0) v bodu v_1 a tečnu $m_1 s_1$ kruhu (m_1) v bodu m_1 a budiž s_1 společný bod těchto tečen. Je-li t_1 průsekem tečen $\alpha m'_1$ a $s_1 m_1$, jest patrno, že úhel $s_1 v_1 m_1 = o_1 v_1 m^0 = m_0 m^0 \alpha = m_1 v_1 t_1$. Ježto výška $v_1 m_1$ trojúhelníka $s_1 t_1 v_1$ půlí jeho úhel $s_1 v_1 t_1$, jest trojúhelník uvedený rovnoramenný a v něm $m_1 t_1 = s_1 m_1$. Tím přicházíme cestou zcela elementární k známé konstrukci tečny křivky Ponceletovy v kterémkoliv jejím bodu.

---

[1]) V obrazci zvolen střed kružnice (m^0) v bodu o_1.

[2]) Trojúhelník $n_0 n^0 n'_1$ v obrazci vyznačen není.

Splyne-li bod m'_1 s bodem dvojným o_1, jest

$$m_1 t_1 = s_1 m_1 = 0,$$

pročež procházejí tečny křivky v bodu dvojném koncovými body průměru kruhu (m_1), který na $v_1 o_1$ stojí kolmo.

Křivka Ponceletova jakožto průmět křivky proniku dvou ploch kuželových [3]. Postavme v bodu v_1 na rovinu kruhu (m_1), kterou za průmětnu orthogonálného promítání pokládati budeme, kolmici a v ní zvolme v jakékoliv výšce, na př. $v_1 v = v_1 p$, bod v a budiž o_1 průmětem bodu o přímky vp. Mějme na mysli dva kužele, z nichž prvý $v\,(m^0)$ jest orhogonálný a má svůj vrchol v bodu v a podstavu v kruhu (m^0) a druhý $o\,(m_0)$, jehož vrchol jest o a podstava (m_0). Druhý kužel $o\,(m_0)$ protíná rovina jdoucí vrcholem v prvého rovnoběžně s průmětnou v kruhu (m), jenž má svůj průmět v kruhu (m_1).

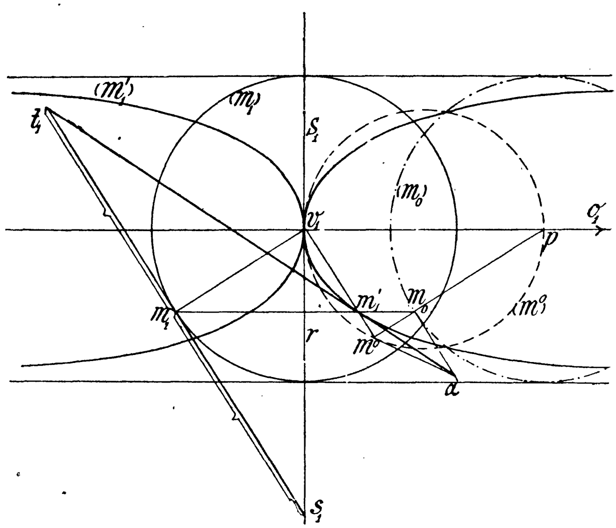
Rovina vpm^0m_0 protíná plochu kužele $v\,(m^0)$ v přímce vm^0 a kužele $o\,(m_0)$ v přímce om_0. Přímky tyto protínají se v bodu m', který jest bodem křivky (m'), v níž plochy $v\,(m^0)$ a $o\,(m_0)$ navzájem se protínají. Že však $v_1 m^0$ a $o_1 m_0$ zobrazují průměty přímek vm^0 a om_0, jest m'_1 obrazem průmětu bodu m'. Křivka (m'_1) zobrazuje tudíž průmět křivky (m') proniku řečených kuželů. Nyní vysvítá, že tečny am^0, am_0 jsou obrazy stop rovin tečných kuželů v bodu m' a že tedy spojnice am'_1 jest obrazem průmětu průsečnice uvedených rovin tečných a tedy tečnou křivky (m'_1) v bodu m'_1.

Předpokládáme-li, že paprsky světelné jsou s průmětnou rovnoběžny, jest o_1 bodem úběžným přímky $v_1 p$ (obr. 2.). Kužel $o_1\,(m_0)$ přejde ve válec položený kruhem (m) tak, že jeho povrchové přímky jsou rovnoběžny s přímkou vp. Stopa tohoto válce jest kruh (m_0) sestrojený ze středu p poloměrem r. Křivka (m'_1) jest průmětem křivky proniku (m') válce řečeného s kuželem $v\,(m^0)$ a prochází body, v nichž se stopy (m_0) a (m^0) dotčených ploch protínají. Ponceletova křivka (m'_1) v tomto případě sluje Kappa-křivka (la courbe cappa) dle řeckého písmene $\varkappa$. Bod v_1 jest dvojnásobným bodem dotyčným a mimořádným

[3]) O Ponceletově křivce jakožto průmětu křivky proniku rotačního kužele a orth. hyperboloidu pojednal p. prof. Bedř. Procházka v časopisu »Grunert-Hoppe, Archiv für Math. u. Physik«, r. 1885.

ohniskem křivky. Tečny (asymptoty) křivky v úběžném bodu dvojném jsou rovnoběžny s přímkou v_1p a dotýkají se kruhu (m_1).

Tečna Kappa-křivky v bodu m'_1 jest v obr. 2. sestrojena právě tak, jako tečna křivky Ponceletovy v obr. 1.



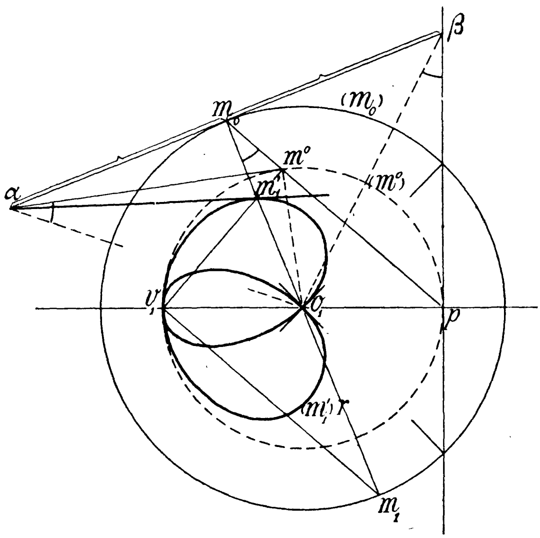
Obr. 2.

2. Budiž dán kruh (m_0) obr. 3. středem o_1 a poloměrem r a v jeho rovině pevný bod v_1. Spojme kterýkoliv bod m_1 kruhu (m_0) s bodem v_1, postavme na v_1m_1 v bodu v_1 kolmici a protněme ji spojnicí o_1m_1 v bodu m'_1. Geom. místem bodu m'_1 jest cirkulární křivka stupně čtvrtého, mající v bodu v_1 svůj dvojnásobný bod dotyčný a v bodu o_1 dvojnásobný bod s různými tečnami [4]).

Tečna křivky. Sestrojme ze středu o_1 poloměrem o_1v_1 kružnici (m^0) a budiž p druhým bodem společným přímky v_1o_1 a kruhů (m^0). Přímka $v_1m'_1$ nechť seče kruh (m^0) v bodu m^0, tětiva pm^0 kruhu (m^0), stojíc kolmo na v_1m^0, jest rovnoběžna s v_1m_1. Je-li tedy m_0 průsečíkem přímek $m_1m'_1$ a pm^0, jest $o_1m_0 = o_1m_1$, neboť $o_1p = o_1v_1$. Bod m_0 leží tudíž na kružnici (m_0). Považu-

4) Mathesis 1885, Question 314 (Jeřábek), řešení str. 110—113. (Boubals, J. Gillet). Poznámky str. 113—116 (Dewulfe, J. Neuberg), Loria-Schütte, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven str. 186.

jeme-li trojúhelník $m^0 m_0 m'_1$ jako v odst. 1. za mezní polohu trojúhelníka $n^0 n_0 n'_1$ [5]), jehož strany $n^0 n_0$, $n_0 n'_1$ a $n'_1 n^0$ procházejí resp. pevnými body p, o_1, v_1 a jehož vrcholy n^0, n_0 a n'_1 náležejí křivkám (m^0), (m_0) a (m'_1), snadno nahlédneme, že tečna křivky (m'_1) v bodu (m'_1) prochází bodem α, v němž se tečny kruhů (m^0) a (m_0) protínají, a který jest mezní polohou středu kollineace trojúhelníků $m^0 m_0 m'_1$, $n^0 n_0 n'_1$.



Obr. 3.

Jiné sestrojení tečny. Sestrojme v bodu p tečnu $p\beta$ ke kruhu (m^0) a spojme bod β, v němž αm_0 a $p\beta$ se protínají s bodem o_1. V kruhových čtyřúhelnících $o_1 m^0 m_0 \alpha$, $o_1 p \beta m_0$ jest úhel $o_1 \alpha m^0 = o_1 m_0 p = o_1 \beta p$, pročež jest $\triangle o_1 m^0 \alpha \cong \triangle o_1 p \beta$, tedy $o_1 \alpha = o_1 \beta$ a že $o_1 m_0$ jest výškou rovnoramenného trojúhelníka $\alpha \beta o_1$, jest $\alpha m_0 = m_0 \beta$. Z uvedeného plyne snadná konstrukce tečny křivky (m'_1) v bodu m'_1. Tečny v bodu dvojném o_1 procházejí body, v nichž tečna $p\beta$ kruh (m_0) protíná.

Křivka (m'_1) jakožto průmět křivky proniku dvou ploch kuželových. Zvolme na kolmici, postavené v bodu v_1 na rovinu

[5]) Trojúhelník $n^0 n_0 n'$ v obrazci vyznačen není.

kruhu (m_1), bod v v jakékoliv výšce, na př. $v_1 v = v_1 p$, a v přímce vp bod o, jenž má svůj průmět ve středu o_1. Plochy kuželů $v\,(m^0)$ a $o\,(m_0)$ protínají se navzájem v křivce stupně čtvrtého, jejíž kterýkoliv bod m' určen jest vzájemným průsekem přímek vm^0 a om^0 ležících v téže rovině $vopm^0m_0$, jejíž stopou jest pm^0m_0. Ježto bod m'_1 jest průmětem bodu m', jest (m'_1) průmětem křivky (m'). Křivka uvažovaná (m'_1) jest tudíž stupně čtvrtého a má s kruhovými stopami (m^0) a (m_0) v nekonečnu společné body imaginárné i jejich isotropické tečny, jejichž reálným průsečíkem jest o_1. Bod tento jest tudíž mimořádným ohniskem křivky (m'_1).

Stopy rovin tečných kuželů $v\,(m^0)$ a $o\,(m_0)$ v bodu m' dotýkají se jejich kruhových podstav resp. v bodech m^0 a m_0, z čehož opět vysvítá, že průsečík α řečených tečen jest druhým bodem tečny $m'_1\alpha$.

Poznámka. Je-li dána kuželosečka K a v její rovině pevný bod o_1, přísluší kterémukoliv bodu m_1 na paprsku o_1m_1 pol m'_1 vzhledem ke kuželosečce K. Tím přetvoří se v rovině kuželosečky body m_1 v body m'_1 a naopak. Transformace tato, jak známo, jest kvadratická a involuční. Je-li však kuželosečka dána dvěma isotropickými [6]) přímkami, jejichž společný bod v_1 jest reálný, čili máme-li na mysli kruh středu v_1 o nekonečně malém poloměru, obdržíme na paprsku om_1 příslušný pól vzhledem ku přímkám isotropickým, když v bodu v_1 sestrojíme kolmici ku v_1m_1 a touto kolmicí protneme přímku o_1m_1 v bodu m'_1. I tato transformace jest kvadratická a involuční. Poznáváme, že křivky, o nichž článek tento jedná, jsou z kruhu (m_1) odvozené kvadratickou transformací. Tato zvláštní kvadratická transformace sluje též transformace reciproká.

Vytvoří-li bod m_1 křivku stupně n-tého, vytvoří jeho obraz m'_1 křivku stupně $2n$-tého. Prochází-li křivka (m'_1) některým z bodů v_1 nebo o_1, sníží se stupeň jejího obrazu (m'_1) o jednotku. Jde-li tedy kružnice (v_1, r) bodem o_1, jest jejím obrazem (m'_1) cirkulárná křivka stupně třetího, která sluje strofoida. Případ tento při rovnoběžném osvětlení kosoúhlé plochy šroubové na-

[6]) Imaginárné přímky procházející bodem v_1 a imaginárními body kruhovými v nekonečnu, nazývají se přímkami isotropickými.

stane, rovná-li se odchylka β paprsků světelných odchylce α povrchových přímek šroubové plochy od roviny kruhu (m_1).

Kružnice jdoucí buďto bodem v_1 nebo o_1 přetvoří se v cirkulárnou křivku stupně třetího, která jest cissoidálou a zároveň strofoidálou [7], což lze i geometricky dokázati. O důkazu tom míním pojednati v článku zvláštním a uvedu jen některé druhy cissoidál:

a) Dotýká-li se kruh (m_1) přímky o_1v_1 v bodu v_1 a je-li o_1 bodem úběžným přímky v_1p, jest (m'_1) *cissoidou Diocles-ovou.*

b) Prochází-li kruh (m_1) bodem v_1 a má-li m_1 svůj střed ω na kruhu (o_1v_1) [8], jest (m'_1) *trisektorií Maclaurin-ovou.*

c) Má-li kruh (m_1) některou tětivu kruhu (o_1v_1) za průměr, jest (m'_1) *ophiuridou*, neboť jedna tečna této cissoidály stojí kolmo na její asymptotě.

V BRNĚ dne 12. ledna 1906.

O jisté vlastnosti čar algebraických a s tím souvisící větě algebraické.

Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

Protneme-li algebraickou čáru K_1 libovolnou přímkou A a v průsečících vedeme tečny ke křivce a protneme-li dále touž křivku přímkou B s přímkou A rovnoběžnou, tu střed průsečíků této čáry s přímkou B shoduje se se středem průsečíků tečen s přímkou B.

Věta tato plyne přímo ze známého theoremu Newtonova o asymptotách algebraických čar.

---

[7]) Je-li dán kruh K, přímka P a v ní bod o, protne kterákoliv tečna kruhu K přímku P v bodu ω; učiní-li se na této tečně $m_1\omega_1 = n_1\omega = o\omega$, obdrží se pro body m_1 a n_1 dvě geom. místa, která jsou cirkulárními křivkami stupně třetího o společném bodu dvojném o. Přejde-li však kruh K v bod, splynou křivky (m_1) a (n_1) v křivku jedinou, která se nazývá strofoidou. Lze tedy v obecném případě křivky (m_1) a (n_1) nazvati *strofoidálami*.

[8]) (o_1v_1) značí kruh o průměru $\overline{o_1v_1}$.