Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský
Theorie maxim a minim. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 36 (1907), No. 3, 297--315

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122585

**Terms of use:**

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1907

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

# Theorie maxim a minim.

Úvod k počtu differenciálnému píše dr. **B. Bydžovský.**

(Dokončení.)

Je jasno, že věta zůstane správnou, jestliže některá (nebo i všechna) znaménka se změní v opačná; lze tedy říci, že derivace algebraického součtu funkcí obdržíme, differencujeme-li každou funkci o sobě a výsledky sloučíme.

Jako zvláštní případ budiž uvedeno, že při differencování výrazu

$$y = f(x) + a, \text{ kde } a \text{ je } konst.$$

tato konstanta vypadne; tedy

$$y' = f'(x).$$

11. $$y = af(x), \text{ kde } a \text{ je } konst.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{af(x + \Delta x) - af(x)}{\Delta x} = a\,\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a tedy

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{df}{dx},$$

t. j. *konstanta i po differencování zůstává činitelem*

12. Shrnutím dosavadních výsledků nabýváme možnosti, differencovati libovolný mnohočlen, i takový, který obsahuje *sinus* a *cosinus*, nebo druhou a třetí odmocninu proměnné $x$.

Příklady:

*a)* $y = 3x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{2}\,.\,x^3 + 0{\cdot}01x^2 - 2ax + 125$

$y' = 15x^4 - 2x^3 - 3\sqrt{2}\,.\,x^2 + 0{\cdot}02x - 2a$

$b)\quad y = a\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + bx$

$$y' = \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + b$$

$c)\quad y = a \sin x + b \cos x$

$$y' = a \cos x - b \sin x.$$

13. $$y = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) f_2(x + \Delta x) - f_1(x) f_2(x)}{\Delta x}.$$

Čitatel lze přičtením a odečtením výrazu

$$f_2(x) f_1(x + \Delta x)$$

uvésti na tvar

$$f_1(x + \Delta x) f_2(x + \Delta x) - f_1(x + \Delta x) f_2(x) + f_1(x + \Delta x) f_2(x) - f_1(x) f_2(x)$$

a psáti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x)\,[f_2(x + \Delta x) - f_2(x)]}{\Delta x} + \frac{f_2(x)\,[f_1(x + \Delta x) - f_1(x)]}{\Delta x}$$

čili

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x + \Delta x)\frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x)\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}$$

a tedy

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f'_2(x) + f_2(x) f'(x);$$

což se psává také:

je-li

$$y = u \,.\, v, \quad \text{kde } u, v \text{ jsou funkce } x,$$

je

$$y' = uv' + u'v.$$

14. $$y = \frac{u}{v}.$$

To lze psáti

$$yv = u.$$

Differenciálný kvocient obou stran musí býti stejný; pro levou stranu užijeme pravidla právě odvozeného:

$$yv' + vy' = u'.$$

Z toho

$$y' = \frac{u' - yv'}{v}.$$

Avšak za $y$ dosadíme; obdržíme

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

15. Stává se, že funkce neobsahuje proměnnou $x$ jednoduchou, nýbrž v nějakém výrazu algebraickém. Na př.

$$y = (x^2 - a^2)^3.$$

Differencování bychom mohli provésti tak, že bychom třemi skutečně umocnili a pak differencovali, tedy

$$y = x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - a^6$$
$$y' = 6x^5 - 12a^2x^3 + 6a^4x.$$

Lze však si počínati také tak: položme

$$x^2 - a^2 = z.$$

Pak

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

což je totožnost samozřejmá; obdrželi jsme pravou stranu z levé tím, že jsme dělili a zároveň násobili veličinou $\Delta z$. I je dále

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

t. j.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Avšak

$$y = z^3 \text{ a } \frac{dy}{dz} = 3z^2$$

$$z = x^2 - a^2 \text{ a } \frac{dz}{dx} = 2x,$$

tedy

$$\frac{dy}{dx} = 3z^2 \,.\, 2x = 3\,(x^2 - a^2)^2 \,.\, 2x.$$

V jiných případech nelze způsobu prvého vůbec užíti; na př.

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Ale užijeme zase substituce

$$z = 1 + x^2.$$

Opět bychom ukázali, že

$$\frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

t. j.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

V příkladu

$$y = sin\ 2x$$

lze buď psáti

$$y = 2\ sin\ x\ cos\ x,$$

a tedy

$$y' = -2\ sin\ x \,.\, sin\ x + 2\ cos\ x \,.\, cos\ x = -2\ sin^2 x + 2\ cos^2 x$$
$$= 2\ cos\ 2x,$$

aneb položiti $2x = z$; pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = cos\ z \,.\, 2 = 2\ cos\ 2x.$$

Pravidlo odtud odvozené je tedy: máme-li differencovati funkci, jež obsahuje $x$ ve funkci jiné, differencujeme funkci první, jako by funkce v ní obsažená byla proměnnou, a differenciálný kvocient tak vzniklý násobíme differenciálným kvocientem dle $x$ funkce druhé.

Píšeme

$$y = f(\varphi(x))$$
$$y' = f' \,.\, \varphi'.$$

Několika příklady nacvičíme pravidla uvedená.

1. $$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n},$$

kde $n$ je číslo celistvé kladné. Užijeme vzorce pro differencování podílu. Zde jest

$$u = 1, \quad v = x^n$$

$$u' = 0, \quad v' = nx^{n-1}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Avšak $-n$ je původní exponent, $-n-1$ je exponent snížený o 1; i je patrno, že pravidlo uvedené pro differencování mocniny na str. 193 platí pro $n$ kladné i záporné.

2. $$y = (a + bx)(c - dx^2).$$

Užijeme vzorce pro differencování součinu; klademe

$$u = a + bx, \quad v = c - dx^2$$

a tedy

$$u' = b \quad v' = -2dx$$

$$y' = -2dx(a + bx) + b(c - dx^2).$$

3. $$y = (x - 3)(x - 2)(x - 1).$$

Zde opět

$$u = x - 3, \quad v = (x - 2)(x - 1)$$

$$u' = 1, \quad v' = (x - 2) . 1 + (x - 1) . 1 = 2x - 3$$

$$y' = (2x - 3)(x - 3) + (x - 2)(x - 1).$$

4. $$y = \frac{a + bx}{c + dx}.$$

Dle vzorce pro differencování podílu:

$$u = a + bx \quad v = c + dx$$

$$u' = b \quad v' = d$$

$$y' = \frac{b(c + dx) - d(a + bx)}{(c + dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c + dx)^2}.$$

5. $$y = \left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^n.$$

**Pokládáme výraz v závorce za novou proměnnou a užijeme pravidla nahoře vysloveného:**

$$y' = n\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^{n-1} \cdot \frac{bc - ad}{(c + dx)^2}.$$

6.
$$y = \frac{a + bx^n}{x^m}$$

$$y' = \frac{x^m \cdot nbx^{n-1} - mx^{m-1}(a + bx^n)}{x^{2m}}$$

$$= \frac{(n-m)\,bx^{n+m-1} - amx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{(n-m)\,bx^n - am}{x^{m+1}}.$$

7.
$$y = \frac{a^2 + x^2}{(b^2 + x^2)\,(c^2 + x^2)}.$$

Differencujeme jako podíl, nezapomínajíce, že jmenovatel je součin

$$y' =$$
$$\frac{2x(b^2 + x^2)(c^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\,.\,[2x(c^2 + x^2) + 2x(b^2 + x^2)]}{(b^2 + x^2)^2\,(c^2 + x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2x(b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - 2a^2x^2 - x^4)}{(b^2 + x^2)^2\,(c^2 + x^2)^2}.$$

8.
$$y = x\sqrt{x}$$
$$y' = x\,.\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

9.
$$y = \sqrt{a + x^n}.$$

Pokládáme $(a + x^n)$ za proměnnou $z$ a užijeme pravidla o differencování funkce jiné funkce: Podrobně provedeno je

$$y = \sqrt{z}$$
$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,.\,\frac{dz}{dx}$$
$$z = a + x^n$$
$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$$

a tedy
$$y' = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{a + x^n}}.$$

Na př.
$$y = \sqrt{1 + x^2}$$
$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

10. $$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Differencujeme jako podíl:

$$u = 1, \quad v = \sqrt{x}$$

$$u' = 0, \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

11. $$y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Dle návodu předchozího příkladu ve spojení s výsledkem příkladu 8.:

$$y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}.$$

12. $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

13. $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$y' = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}.$$

14. $$y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$$

15. $$y = x^n \sin x$$

$$y' = nx^{n-1} \sin x + x^n \cos x = x^{n-1} (n \sin x + x \cos x).$$

16. $$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

17. $$y = \cos^2 x$$

$$y' = 2 \cos x \,.\, - \sin x = - \sin 2x.$$

18. $$y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \,.\, \cos x + \sin x \,.\, \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

19. $$y = cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

20. $$y = \frac{1}{\sin^n x}.$$

Pokládáme $\sin x$ za proměnnou a užijeme výsledků příkladu 1.

$$y' = -\frac{n}{\sin^{n+1} x} \,.\, \cos x.$$

Zcela podobně

$$y = \frac{1}{\cos^n x}, \quad y' = \frac{n}{\cos^{n+1} x} \sin x.$$

## V. Druhá derivace.

1. Můžeme nyní pokračovati ve výkladu o hodnotách maximálních a minimálních. Funkce

$$y = f(x)$$

(v. grafické znázornění, obr. 3.) nabývá některé hodnoty krajní pro takové $x$, pro něž

$$f'(x) = 0.$$

Kterak rozhodneme, zdali hodnota $y$ příslušná takovému $x$ je maximální nebo minimální? Označme příslušnou hodnotu $x_1$; i lze říci: $f(x_1)$ bude maximum, jestliže hodnota $f(x)$ pro $x$ menší i pro $x$ větší než $x_1$ bude menší, t. j. když

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$$

a také

$$f(x_1 - \Delta x) < f(x_1),$$

tak že $f(x_1)$ je hodnota větší než hodnoty sousední. Ježto tedy, když $x$ stoupá od $x_1 - \Delta x$ k $x_1$, hodnota funkce $f(x)$ stoupá, je patrno, že pro hodnotu $x = x_1 - \Delta x$ musí differenciálný kvocient

$$f'(x_1 - \Delta x)$$

býti kladný (v. str. 192). Když $x$ dále stoupá přes $x_1$, $f(x)$ klesá a je tedy differenciálný kvocient záporný (v. str. 192). I je podmínka pro to, aby pro hodnotu $x_1$ funkce nabyla hodnoty maximální, ta, aby

$$f(x_1 - \Delta x) > 0$$
$$f(x_1 + \Delta x) < 0,$$

je pak mimo to, jak víme, $f'(x_1) = 0$. Vidíme tedy, že, když $x$ stoupá od $x_1 - \Delta x$ přes $x_1$ ku $x_1 + \Delta x$, $f'(x)$ klesá od hodnoty kladné přes nullu k hodnotě záporné. Avšak $f'(x)$ je právě tak funkcí $x$ jako $f(x)$ (v. naše příklady, nahoře provedené); i platí tedy i zde pravidlo, že, když funkce klesá se stoupajícím $x$, její differenciálný kvocient je záporný; i je tedy differenciálný kvocient funkce $f'(x)$ záporný pro $x = x_1$.

Nazýváme *differenciálný kvocient differenciálného kvocientu druhým differenciálným kvocientem funkce původní* a značíme jej

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad y''.$$

Obdržíme jej, differencujeme-li $f'(x)$ ještě jednou dle pravidel nahoře uvedených.

Je tedy podmínka, aby pro $x_1$ původní funkce nabyla hodnoty maximální ta, aby její druhý differenciálný kvocient pro $x_1$ byl záporný.

Má-li naopak $f(x_2)$ býti hodnota minimální, musí

$$f(x_2 - \Delta x) > f(x_2)$$
$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2),$$

t. j., když $x$ stoupá k $x_2$, funkce klesá a tedy derivace

$$f'(x_2 - \Delta x) < 0$$

a když $x$ stoupá přes $x_2$, funkce stoupá a tedy

$$f'(x_2 + \Delta x) > 0,$$

t. j. když $x$ stoupá od $x_2 - \Delta x$ přes $x_2$ ku $x_2 + \Delta x$, stoupá $f'(x)$ od hodnoty záporné ku kladné, i je

$$f''(x_2) > 0.$$

I nabyli jsme k rozhodování otázky o maximu a minimu tohoto přesného návodu:

*Funkce*

$$y = f(x)$$

*nabývá krajních hodnot pro ty hodnoty $x$, jež vyhovují rovnici*

$$f'(x) = 0.$$

*Pro ty hodnoty $x$, hovící této rovnici, které činí výraz $f''(x)$ kladným, má $f(x)$ hodnotu minimální, pro ty pak, jež činí týž výraz záporným, má $f(x)$ hodnotu maximální.*

Ponechávám čtenáři, aby tuto úvahu si znázornil na obr. 3.

Druhé derivace obdržíme differencováním prvé derivace dle pravidel o differencování. Několik příkladů nám tu věc objasní.

1. $y = x^n \qquad y' = nx^{n-1} \qquad y'' = n(n-1)\,x^{n-2}$
2. $y = \sin x \qquad y' = \cos x \qquad y'' = -\sin x$
3. $y = \cos x \qquad y' = -\sin x \qquad y'' = -\cos x$
4. $$y = ax^2 + bx + c$$ $$y' = 2ax + b$$ $$y'' = 2a,$$

t. j. druhá derivace funkce kvadratické je konstanta.

5. $$y = (x-a)(x-b)(x-c)$$ $$y' = (x-b)(x-c) + (x-a)(2x-b-c)$$ $$y'' = x - b + x - c + (2x-b-c) + 2(x-a)$$ $$= 6x - 2a - 2b - 2c$$
6. $$y = tg\, x$$ $$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$ $$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

## VI. Příklady.

Zbývá nám provésti na základě předchozích úvah obecných několik příkladů, které nám ukáží, jak snadno lze užitím differenciálného počtu řešiti úlohy, jichž řešení by jinak bylo zpravidla obtížné, ne-li nemožné.

1. *Jest nalézti reálné číslo té vlastnosti, aby jeho druhá odmocnina a třetí odmocnina jeho převratné hodnoty dávaly součet minimální.*

Je-li hledané číslo $x$, je funkce, jež má býti minimální

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ptáti se po hodnotě maximální bylo by nemístné, ježto $y$ může nabýti hodnoty libovolně velké, volíme-li $x$ dostatečně veľké nebo dostatečně malé.

Počet je sestaven takto:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0$$

$$3\sqrt[3]{x^4} - 2\sqrt{x} = 0$$

$$3\sqrt[3]{x^4} = 2\sqrt{x}$$

$$3^6 . x^8 = 2^6 x^3$$

$$x^3 (3^6 . x^5 - 2^6) = 0 \qquad x_{123} = 0$$

$$x^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$x = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}.$$

Pátých odmocnin je pět, reálná jediná a o tu se nám jedná; označme ji $x_4$. Ke kořenům $x_{123}$ nepřihlížíme, ježto víme, že vedou k hodnotě $y$ nekonečně velké.

Abychom rozhodli, zdali pro $x_4$ je $y$ maximální nebo minimální, utvořme druhou derivaci:

$$y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{4}{9\sqrt[3]{x^7}}$$

$$y'' = \frac{16\sqrt{x^3} - 9\sqrt[3]{x^7}}{36\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^7}}.$$

Ježto jmenovatel je kladný, závisí znaménko $y$ na znaménku čitatele.

$$16\sqrt[3]{x^3} - 9\sqrt[6]{x^7} = 16\sqrt[6]{x^9} - 9\sqrt[6]{x^{14}}.$$

Sem dosadíme

$$x_4 = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^6};$$

obdržíme

$$16\sqrt[6]{x^9} - 9\sqrt[6]{x^{14}} = 16\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^9} - 9\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^{14}}$$

$$= \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^9}\left(16 - 9\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)$$

$$= \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^9}\left(16 - 9\cdot\frac{2}{3}\right) = 10\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^9} > 0.$$

I je patrno, že pro

$$x_4 = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$$

nabývá $y$ hodnoty minimální, ježto $y''$ je kladné pro tuto hodnotu. Ježto má $y$ jediné minimum, je zároveň patrno, že tato hodnota je absolutním minimem, t. j. pro každé jiné $x$ má $y$ hodnotu větší.

Tuto minimální hodnotu obdržíme dosazením $x_4$ do $y$; tedy

$$y_{min} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} + \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}.$$

2. *Ze všech pravoúhlých rovnoběžnostěnů se čtvercovou podstavou nalézti ten, jenž při daném povrchu $k$ má největší obsah.*

Nazveme hranu základny $x$, výšku $v$; pak povrch

$$k = 2x^2 + 4xv$$

a tedy

$$v = \frac{k - 2x^2}{4x}.$$

Obsah rovnoběžnostěnu je

$$x^2 v = \tfrac{1}{4} x (k - 2x^2).$$

Uvažujeme funkci

$$y = x (k - 2x^2)$$

rovnou čtyrnásobnému obsahu.

$$y' = k - 2x^2 - 4x^2 = 0$$
$$6x^2 = k$$
$$x = \sqrt{\frac{k}{6}}.$$

Pak

$$v = \frac{k - \frac{k}{3}}{4\sqrt{\frac{k}{6}}} = \sqrt{\frac{k}{6}},$$

t. j. hledaný rovnoběžnostěn je krychle. Že obsah její je maximální, ukazuje druhá derivace

$$y'' = -12x,$$

jež je pro kladné $x$ záporná.

Pro nalezené $x$ je

$$y = \frac{2}{3} k \sqrt{\frac{k}{6}}$$

a obsah

$$\frac{y}{4} = \frac{1}{6} k \sqrt{\frac{k}{6}} = \left(\sqrt{\frac{k}{6}}\right)^3.$$

3. *Do koule vepsati přímý kužel maximálního obsahu.*

**Budiž $r$ poloměr koule, $\alpha$ úhel při vrcholu kužele; pak je poloměr základny kužele $\varrho = r \sin \alpha$, výška $v = r(1 + \cos \alpha)$. Obsah kužele $= \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$. Ježto $\frac{1}{3}\pi r^3$ je konstanta, stačí uvažovati funkci**

$$y = \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$$

**a rozhodnouti, pro jaký úhel $\alpha$ nabývá hodnot krajních.**

$$y' = 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + \cos \alpha) - \sin^3 \alpha = 0$$
$$\sin \alpha = 0, \quad \alpha = 0.$$

Pro $\alpha = 0$ je obsah kužele roven 0, tedy minimální. Další řešení podává rovnice

$$2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

čili

$$3 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$\cos \alpha_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \cos \alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 = 180.$$

Úhlu $\alpha_2$ zase odpovídá hodnota obsahu nullová; i zbývá úhel $\alpha_1$.

Z $\cos \alpha_1 = \frac{1}{3}$ plyne $\sin \alpha_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$$y'' = 2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)$$
$$- 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$
$$y'' = 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha - 7 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

a po dosazení nalezených hodnot

$$y'' = -\tfrac{32}{9} < 0,$$

t. j. pro nalezený úhel hodnoty $y$ maximální. Je pak

$$y_{max} = \tfrac{32}{27}$$

a obsah nalezeného největšího kužele:

$$\tfrac{32}{81} \pi r^3.$$

4. *Jest ulíti z kovu dutý válec o tloušťce stěny $d$, jehož obsah by byl $k$, aby spotřeba kovu byla co nejmenší.*

Nazveme $x$ poloměr vnitřní základny válce; $x + d$ je poloměr vnější základny. Výška dutiny budiž $v$; výška válce tedy $v + d$. Spotřeba kovu co do objemu je

$$\pi (x + d)^2 (v + d) - \pi x^2 v = \pi (x^2 d + 2xvd + 2xd^2 + vd^2 + d^3)$$
$$= \pi d (x^2 + 2vx + 2xd + vd + d^2).$$

Jde tedy o minimální hodnotu funkce

$$y = x^2 + 2vx + 2xd + vd + d^2.$$

Má-li dutina míti daný obsah $k$,

je

$$\pi x^2 v = k, \qquad v = \frac{k}{\pi x^2},$$

$$y = x^2 + \frac{2k}{\pi x} + 2xd + \frac{kd}{\pi x^2} + d^2.$$

Utvoříme derivaci

$$y' = 2x - \frac{2k}{\pi x^2} + 2d - \frac{2kd}{\pi x^3}.$$

Podmínka maxima nebo minima zní

$$y' = 0,$$

t. j.

$$2x - \frac{2k}{\pi x^2} + 2d - \frac{2kd}{\pi x^3} = 0$$

$$\pi x^4 + d\pi x^3 - kx - kd = 0$$

$$\pi x^3 (x + d) - k (x + d) = 0$$

$$x_1 = - d.$$

Tento kořen nemá pro naši úlohu smyslu.

$$\pi x^3 - k = 0$$

$$x^3 = \frac{k}{\pi}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{k}{\pi}}.$$

Pro tuto hodnotu je

$$v = \sqrt[3]{\frac{k}{\pi}}.$$

Příslušná hodnota $y$ je minimální; je totiž

$$y'' = 2 + \frac{4k}{\pi x^3} + \frac{6kd}{\pi x^4}$$

veličina pro každé kladné $x$ kladná.

5. *Jest zhotoviti lepenkovou krabici objemu 80 $cm^3$, jejíž základna by byla čtverečná a víko mělo výšku 1 cm, tak aby se spotřebovalo lepenky co nejméně.*

Budiž $x$ rozměr čtverečné základny, $v$ výška krabice. Pak na krabici otevřenou je třeba lepenky $(x^2 + 4xv)\ cm^2$. Na víko je třeba lepenky $x^2 + 4x \,.\, 1$. Na celou krabici tedy

$$y = 2x^2 + 4x + 4xv.$$

Víme mimo to, že má býti

$$x^2 v = 80, \quad \text{t. j. } v = \frac{80}{x^2},$$

a tedy konečně

$$y = 2x^2 + 4x + \frac{320}{x}.$$

Tato funkce má nabýti hodnoty minimální:

$$y' = 4x + 4 - \frac{320}{x^2} = 0$$

$$4x^3 + 4x^2 - 320 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 80 = 0.$$

Snadno shledáme, že této rovnici hoví

$$x_1 = 4.$$

I lze trojčlen třetího stupně na levé straně rovnice rozložiti; máme

$$(x - 4)(x^2 + 5x + 20) = 0.$$

Druhé dva kořeny obdržíme řešením rovnice

$$x^2 + 5x + 20 = 0.$$

Avšak ty jsou, jak snadno lze se přesvědčiti, imaginární I máme jediný reálný kořen 4. Nastane pro tuto hodnotu maximum nebo minimum funkce $y$? Utvořme druhou derivaci:

$$y'' = 4 + \frac{640}{x^3}.$$

Pro $x = 4$

je $y'' = 164 > 0$,

tedy příslušná hodnota $y$ skutečně minimální. Určíme ji z rovnice prvé dosazením $x = 4$

$$y_{min} = 128\ cm^2.$$

Je tedy základna krabice čtverec o straně 4 *cm*, výška $v = \frac{80}{16} = 5\ cm$.

6. *Z ostrova, jehož vzdálenost od rovného břehu je 6 km, má se dosáhnouti místa na břehu vzdáleného od ostrova 15 km; je-li rychlost jízdy po vodě 4 km, rychlost chůze po břehu 6 km za hodinu, jakým směrem jest veslovati ku břehu, abychom dosáhli onoho místa co nejrychleji.*

Značí-li na obr. 4. $O$ ostrov, $\overline{AM}$ břeh, $M$ místo, k němuž spějeme, $\overline{OA}$ kolmici vedenou z ostrova ku břehu, je $OXM$ dráha proběhnutá, vesluje-li se ku břehu pod úhlem $\alpha$. Doba k proběhnutí této dráhy potřebná, vyjádřena v hodinách, je

$$\frac{\overline{OX}}{4} + \frac{\overline{XM}}{6} = t.$$

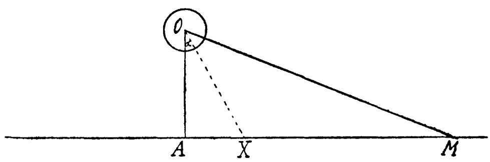
Jest však

$$\overline{OX} = \frac{6}{\cos\alpha},$$

$$\overline{XM} = d - \overline{AX} = d - 6\, tg\, \alpha,$$

kde

$$d = \sqrt{15^2 - 6^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21} = \overline{AM}.$$




Obr. 4.

Je tedy

$$t = \frac{6}{4\cos\alpha} + \frac{d - 6\, tg\, \alpha}{6},$$

a jest určiti $\alpha$ tak, aby $t$ bylo minimální. Píšeme

$$t = \frac{3}{2\cos\alpha} + \frac{d}{6} - tg\, \alpha.$$

Derivace prvého členu na pravo je $\frac{3\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}$, derivace druhého členu, jenž je konstantní, je 0, třetího je $-\frac{1}{\cos^2\alpha}$. I je

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0,$$

t. j.

$$3\sin\alpha - 2 = 0,$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3}.$$

Pro tento úhel $\alpha$ je $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $tg\, \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Utvořme druhou derivaci

$$\frac{d^2t}{d\alpha^2} = \frac{3\cos^3\alpha + 6\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos^4\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha},$$

což je veličina pro náš úhel kladná a tedy příslušná doba $t$ minimální. Je pak

$$t_{min} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{2} = 3{\cdot}409\ldots \text{ hodin.}$$

7. *Jak musí býti nakloněna rovina, aby síla, potřebná ku posunování břemene po ní vzhůru, měla hodnotu co největší nebo co nejmenší, je-li koefficient tření k.*

Je-li hmota břemene $m$, je jeho váha $mg$; síla, kterou je třeba posunovati po rovině vzhůru, je

$$k\,.\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha,$$

ježto vedle složky tíže zemské je nutno překonati také tření, které je úměrné kolmému tlaku

$$mg\cos\alpha.$$

Hledáme krajní hodnoty funkce

$$y = k\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha.$$

I jest

$$y' = -k\,mg\sin\alpha + mg\cos\alpha = 0,$$

t. j.

$$tg\,\alpha = \frac{1}{k}.$$

Ježto zpravidla $k < 1$, je $\alpha > 45^0$;
anebo $\alpha > 325^0$ atd.

Pro nás má význam jen úhel ostrý. Utvořme druhou derivaci

$$y'' = -k\,mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Pro úhel ostrý je pravá strana záporná; i jest pro

$$tg\,\alpha = \frac{1}{k},$$

$$y'' < 0,$$

t. j. příslušná hodnota $y$ je maximální. Tato hodnota je

$$y_{max} = mg\sqrt{1 + k^2},$$

jak lze snadno vypočísti dosazením $tg\,\alpha = \frac{1}{k}$ do rovnice pro $y$, kde $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ vyjádříme tangentou.

*Dodatek.* Provedených několik příkladů stačí zajisté úplně k poznání způsobu řešení; odporučuji čtenáři, aby sám se pokusil o sestavení a řešení některých úloh maximo-minimálních. Nechť uvažuje na př. rozmanitá tělesa (kužel, válec, jehlany a hranoly atd.) do koule vepsaná nebo kouli opsaná, jež mají největší (nejmenší) možný obsah nebo největší (nejmenší) možný povrch; rovněž jsou zajímavé otázky, týkající se trojúhelníku určeného dvěma částmi, jehož obvod nebo obsah nebo některá část má býti co možná největší; totéž pro čtyřúhelník určený čtyřmi částmi atd.

Předkládám čtenáři mimo to k řešení tyto tři poněkud složitější příklady, jichž správné a úplné řešení vyžaduje vedle znalosti pouček o differencování také trochu obratnosti a trpělivosti:

1. Z okna ležícího $v$ metrů nad ulicí pozoruji chodce výšky $l$ $m$, jenž kráčí ulicí ve vzdálenosti $d$ $m$ od domu (a s domem rovnoběžně). V kterém místě jeví se mi chodec v úhlu největším?

Upozorňuji, že dle volby čísel $v$, $l$, $d$ mohou nastati při řešení různé případy.

2. Bodem $m$ ležícím ve vodorovné rovině vedené středem koule o poloměru $r$ jest položiti rovinu, po níž by těleso, padajíc z bodu $m$, dospělo k povrchu koule v době co nejkratší (vzdálenost bodu $m$ od středu $d < r$). Jest provésti geometrickou konstrukci této roviny.

3. Do rovnoramenného trojúhelníku o dané základně a výšce jest vepsati ellipsu, jejíž jedna osa by ležela v ose trojúhelníku a jejíž obsah by byl maximální. Zvláštní případ: trojúhelník rovnostranný.

**Poznámka redakce.** Z usnesení výboru J. Č. M. vypisuje se na nejlepší řešení těchto tří úloh zvláštní cena: 1 výtisk Weyrova **Differenciálního počtu.**

---

# Tečny dvou kruhů.

(P. **Rajmund Fišer.**)

Obsahem pojednání tohoto jest jednak kriterium, kdy jsou souřadnice všech osmi styčných bodů společných tečen dvou kruhů vyjádřeny čísly racionálnými, jednak návod rovnici takových dvou kruhů sestaviti.