Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 10--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122583

$$\varphi_1(1+i) = 6 + 10i = A_1 + B_1(1+i),$$

z níž vyplývá

$$A_1 = -4, \quad B_1 = 10;$$

a převedeme-li částečný zlomek tyto koefficienty obsahující na stranu levou a zkrátíme-li opět týmže trinomem, zbude

$$\frac{x+4}{x^2-2x+2} = \frac{A_2+B_2x}{x^2-2x+2},$$

kdež netřeba dalších výpočtů. Jestiť tedy výsledek našeho takto provedeného rozkladu

$$\frac{x^5+2x^3+x}{(x^2-2x+2)^3}$$

$$= \frac{x-8}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{10x-4}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{x+4}{x^2-2x+4},$$

což bychom i pomocí poučky o neurčitých součinitelích obdrželi, avšak řešením *šesti* rovnic linearních, arci valně zjednodušených, jakož si laskavý čtenář sám doloží.

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu.

Napsal

Jan Sobotka,

professor české vysoké školy technické v Brně.

1. Kdežto způsoby grafického integrování doznaly značného zdokonalení a rozsáhlého užití jmenovitě ve vědách inženýrských přičiněním odborníků, mezi nimiž sluší p. professora *Josefa Šolína* v prvé řadě jmenovati,*) bylo dosud o grafickém integrování differencialních rovnic velmi málo psáno. Důvod toho

---

*) Na doklad toho poukazuji k literarním poznámkám činěným ve známém díle „*Abdank-Abakanowicz*: Die Integraphen", deutsch von E. Bitterli, Leipzig 1889 na str. 141. a 142.

leží částečně v podstatě věci samé; neboť lze rovnice differencialní jen v nejjednodušších případech vůbec graficky vystihnouti.

Úlohou naší bude, o některých takových případech blíže pojednati.

Tu sluší učiniti nejprve zmínku o díle obšírném „Mémoire sur l' intégration graphique et ses applications", jež v r. 1885 vydal inženýr *J. Massau* a v němž pojednává na str. 697. a n. o grafické integraci differencialních rovnic prvého řádu, majících tedy při obvyklém označení tvar

$$F(x, y, y') = 0.$$

Řešení děje se tu způsobem nomografickým tak, že za y' se kladou různé hodnoty α v dostatečně blízkých intervallech, čímž se obdrží soustava křivek tak zvaných *stejnoklonných*

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

ode všech křivek integralných rovnice dané v stejných směrech protnutých.

Vycházíme-li z některého bodu B_0 jedné takové křivky

$$F(x, y, \alpha_0) = 0$$

a vedeme jím přímku, jejíž poloha k ose x dána jest směrnicí α_0, až sousední křivku

$$F(x, y, \alpha_1) = 0$$

dostihne v bodě B_1; pokračujeme-li pak od bodu B_1 ve směru daném hodnotou α_1 k další křivce

$$F(x, y, \alpha_2) = 0,$$

již dostihneme v bodě B_2 atd., obdržíme mnohoúhelník $B_0 B_1 B_2 \ldots$, který tím více se blíží určité křivce, čím menšími se uvedené intervally stávají.

Křivka taková jest pak jednou křivkou integrální dané rovnice

$$F(x, y, y') = 0.$$

Přímky $(B_0 B_1)$, $(B_1 B_2), \ldots$ přejdou pak v tečny křivky této; délky B_0B_1, B_1B_2,... stávají se nekonečně malými a slují pak *prvky přímkové* dané rovnice differencialní.*)

2. Pro *linearné* differencialní rovnice prvého řádu podal pan professor E. Czuber jednodušší přibližné řešení grafické ve 44. svazku (r. 1899) Schlömilchem založeného „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ na str. 41. a n. na základě jedné vlastnosti, ku které i zde blíže hleděti budeme.

Značí-li P a Q jednoznačné funkce proměnné x, pak lze každou linearní rovnici differencialní řádu prvého psáti ve tvaru

$$Y' + PY = Q. \tag{1}$$

Zmíněná vlastnost, kterou Czuber odvodil, praví:

Prvky přímkové rovnice (1) pro body ležící na libovolné přímce rovnoběžné s osou y směřují vesměs k jedinému bodu.

Důkaz proveden jest tím způsobem, že stanoveny rovnice přímek, na nichž dva takové prvky leží, a pak z těchto souřadnice bodu průsečného.

Kratčeji možno postupovati následovně.

Rovnice přímky procházející prvkem přímkovým bodu (x, Y) zní

$$\eta - Y = Y'(\xi - x).$$

Dosadíme-li do rovnice této za Y hodnotu z (1) plynoucí, obdržíme po krátké úpravě

$$\eta - \frac{Q}{P} = Y'\left(\xi - x - \frac{1}{P}\right).$$

Jak z rovnice této patrno, prochází přímka naše bodem N, jehož souřadnice jsou

$$\xi = x + \frac{1}{P}, \quad \eta = \frac{Q}{P}. \tag{2}$$

Vidíme, že poloha bodu N jest závislá toliko na souřadnici x, a proto k němu směřují veškeré prvky přímkové bodů nacházejících se na téže přímce m stejnosměrné s osou y.

---

*) Cf. též na př. *E. Czuber:* „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung“, Leipzig 1898, II. Bd. str. 269. aneb *K. Heun:* „Neue Methode zur approximativen Integration“ v 45. svazku „Zeitschrift f. Math. u. Physik von Schlömilch-Mehmke“ 1900.

Pohybuje-li se přímka m zůstávajíc stejnosměrná ku ose y, vytvořuje bod N jistou křivku n, jejíž rovnice plyne vyloučením proměnné x z rovnic (2).

Bodů křivky n používá Czuber ku přibližnému sestrojení křivek integralních rovnice (1).

3. Právě uvedenou vlastnost prvků přímkových rovnice

$$Y' + PY = Q \tag{1}$$

lze též bezprostředně z rovnice té vyčísti.

Každému prvku přímkovému přísluší nekonečně vzdálený bod přímky jím položené. Pro libovolnou určitou hodnotu x udává (1) vztah jednoznačný mezi Y a Y', čímž vznikají na přímce m mající vytknutou vzdálenost x od osy y a na nekonečně vzdálené přímce roviny souřadné dvě řady bodové promětné. Poněvadž pro $Y = \infty$ jest též $Y' = \infty$, odpovídá společný bod obou řad sám sobě; řady ty jsou proto perspektivnými a následkem toho protínají se přímky prvků zmíněných v jediném bodě N.

Souřadnice tohoto bodu obdržíme i zde velmi snadno. Z (1) plyne totiž pro $Y' = 0$

$$Y = \eta = \frac{Q}{P}$$

a pro $Y' = 1$

$$Y = \frac{Q}{P} - \frac{1}{P},$$

z čehož plyne

$$x - \xi = y - \eta = -\frac{1}{P}$$

a tedy

$$\xi = x + \frac{1}{P}$$

jako v předcházejícím.

4. Dle uvedeného lze prvky přímkové přehledně uspořádati též pro rovnici

$$(Ly + M)\,y' + Py = Q, \tag{1}$$

v níž značí L, M, P, Q jednoznačné funkce proměnné x.

Zde obdržíme též dvě řady bodové promětné na přímce m a na nekonečně vzdálené přímce. Paprsky proložené prvky přímkovými bodů na m ležících obalují tudíž parabolu p dotýkající se přímky m.

Pro

$$y' = 0, \qquad \infty, \qquad -\frac{P}{L}, \qquad \frac{Q}{M}$$

jest

$$y = \frac{Q}{P}, \qquad -\frac{M}{L}, \qquad \infty, \qquad 0.$$

Z těchto hodnot soudíme, že bod A přímky m, v němž tečna paraboly p je stejnosměrná s osou x, má pořadnici $\frac{Q}{P}$ a náleží přímce řídící paraboly této. Přímka m dotýká se jí v bodě B, jehož pořadnice jest $-\frac{M}{L}$, a směrnice osy paraboly jest rovna $-\frac{P}{L}$.

Vedeme-li proto bodem B přímku o směrnici rovné $+\frac{P}{L}$, jejíž rovnice jest

$$\eta + \frac{M}{L} = \frac{P}{L}(\xi - x),$$

bude se na ní nalézati ohnisko N paraboly p, a sice v patě kolmice z bodu A na ni spuštěné.

Rovnice této kolmice jest

$$\eta - \frac{Q}{P} = -\frac{L}{P}(\xi - x).$$

Z obou těchto rovnic obdržíme souřadnice ξ, η ohniska N, totiž

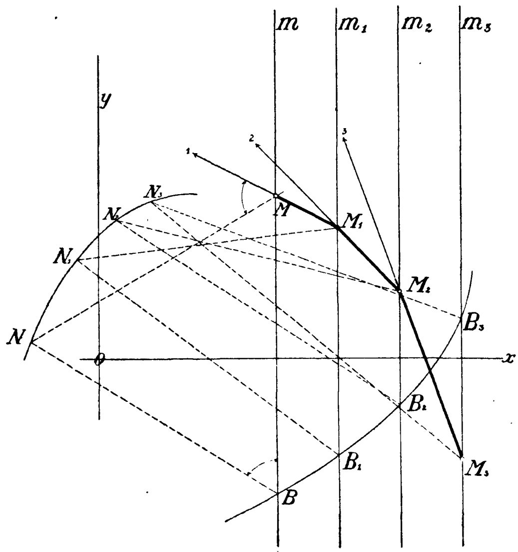
$$\xi = x + \frac{PM + LQ}{P^2 + L^2}, \tag{2}$$

$$\eta = \frac{QP - ML}{P^2 + L^2}. \tag{3}$$

Poněvadž m jest též tečnou paraboly p, proto jest úhel, jehož jedno rameno splývá s libovolnou tečnou její, jehož vrchol leží na m a jehož druhé rameno prochází ohniskem N nepromënný a rovná se úhlu ABN.

Pohybuje-li se přímka m zůstávajíc stejnosměrná s y, opisuje bod N křivku n, pomocí které lze libovolnou křivku integralní F rovnice (1) přibližně vystihnouti způsobem obdobným, jaký udal Czuber pro linearné rovnice 1. řádu.

K tomu cíli zvolme v dostatečně blízkých vzdálenostech (obr. 1.) po sobě jdoucí přímky m, m_1, m_2, ... rovnoběžné s osou



Obr. 1.

y a určme dle (2) a (3) korrespondující body N, N_1, N_2, ... křivky n a body B, B_1, B_2, ... křivky mající rovnici

$$y = -\frac{M}{L}.$$

Spojme dále libovolný bod M přímky m s bodem N, učiňme i co do smyslu úhel NM_1 rovný úhlu NBM a prodlužme jeho rameno M_1 až protne m_1 v bodě M_1; takto nabytý bod M_1 spojme s N_1, ustanovme rovněž i co do smyslu

$$\sphericalangle N_1 M_1 2 = \sphericalangle N_1 B_1 M_1,$$

na to protněme přímku $(M_1 2)$ přímkou m_2 v bodě M_2, atd.

Mnohoúhelník $M M_1 M_2 \ldots$ udává tím přesněji průběh křivky F, čím blíže jsou po sobě jdoucí přímky v řadě $m, m_1, m_2, \ldots$

5. Vraťme se zase k rovnici

$$Y' + PY = Q \tag{1}$$

zpět, a ustanovme nyní tečnu příslušné křivky n v bodě N, což se stane, když určíme hodnotu $\frac{d\eta}{d\xi}$ pro tento bod.

Mezi křivkami integralními rovnice (1) bude se patrně nalézati též jedna, procházející bodem M_0 na m, jehož prvek přímkový bude ležeti na přímce tečné ku n v bodě N sestrojené; pak bude míti tato křivka v bodě M_0 patrně bod obratu, a proto bude pro bod ten

$$Y' = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad Y'' = 0.$$

Differencujeme-li (1) dle x a klademe pak $Y'' = 0$, obdržíme

$$PY' + P'Y = Q'.$$

Vyloučíme-li z této rovnice a z rovnice (1) poprvé Y, podruhé Y', obdržíme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{PQ' - QP'}{P^2 - P'}, \tag{2}$$

$$Y = \frac{PQ - Q'}{P^2 - P'}. \tag{3}$$

Rovnice (3) značí křivku spojující body obratu všech křivek integralních rovnice (1), kdežto křivka n jest křivkou obalení tečen inflekčních pro veškeré křivky integralní rovnice této.

6. *O křivosti křivek*

$$Y' + PY = Q. \tag{1}$$

Vyloučíme-li z rovnice

$$Y'' + PY' + P'Y = Q'$$

vzniklé differencováním rovnice (1) dle x a z rovnice (1) samé proměnnou Y, obdržíme rovnici

$$PY'' + P^2 Y' - P'Y' = PQ' - P'Q,$$

které můžeme dáti tvar

$$\frac{P}{P^2 - P'} Y'' = \frac{PQ' - P'Q}{P^2 - P'} - Y',$$

z něhož vychází se zřetelem na rovnici (2) odstavce předcházejícího

$$\frac{P}{P^2 - P'} Y'' = \eta' - Y' \tag{2}$$

čili

$$(\xi - x) Y'' = (\eta' - Y') \frac{d\xi}{dx}. \tag{3}$$

Pata kolmice z bodu N na přímku m vedené budiž N_0; M budiž zase bod libovolné křivky integralní na m a M_0 průsek tečny v N ku n s přímkou m; pak jest

$$\eta' = \frac{\overline{N_0 M_0}}{\overline{NN_0}}, \quad Y' = \frac{\overline{N_0 M}}{\overline{NN_0}};$$

dosazením hodnot těch do (2) obdržíme

$$Y'' = \frac{P^2 - P'}{P} \cdot \frac{\overline{MM_0}}{\overline{NN_0}}.$$

Pro poloměr křivosti ϱ křivky integralní F v bodě M obdržíme ze vzorce

$$\varrho = \frac{(1 + Y'^2)^{\frac{3}{2}}}{Y''},$$

klademe-li do něho právě vypočítanou hodnotu pro Y'', dále

$$\overline{NM} = t, \qquad 1 + Y'^2 = \frac{t^2}{\overline{NN_0}^2},$$

vzorec následující:

$$\varrho = \frac{t^3}{\overline{NN_0}^2 \cdot \frac{P^2 - P'}{P} \cdot \overline{MM_0}}.$$

Jelikož dále, jak víme, $\overline{NN_0} = -\frac{1}{P}$, bude konečně

$$(4) \qquad \varrho = \frac{P^3 t^3}{(P^2 - P') \, . \, \overline{MM_0}} \, .$$

Pro některou jinou křivku integralní F_1 procházející bodem M_1 na m platí v tomto bodě pro poloměr křivosti ϱ_1 a pro $\overline{NM_1} = t_1$ hodnota obdobná. Srovnáním obou hodnot plyne relace

$$(5) \qquad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{t^3}{t_1^3} : \frac{\overline{MM_0}}{\overline{M_1 M_0}} \, .$$

Výsledek ten bylo očekávati, jelikož křivky F, F_1 lze v soumeznostech bodů M, M_1 považovati za příbuzně položené pro y co směr a (NM_0) co osu příbuznosti.*)

Pro křivku integralní F_ω procházející bodem N_0 jest $Y' = 0$ a tedy $\varrho = \frac{1}{Y''}$; proto plyne vzhledem k rovnici (3)

$$(6) \qquad \varrho_0 = \frac{\xi - x}{\frac{d\eta}{dx}} \, .$$

Mysleme si nyní křivku f, jejíž rovnice zní

$$\mathfrak{Y} = \frac{Q}{P} \, ,$$

pak jest

$$\varrho_0 = \frac{\xi - x}{\mathfrak{Y}'}$$

anebo

$$(7) \qquad \varrho_0 = \frac{1}{P \mathfrak{Y}'} \, .$$

Vzorec (6) dává následující konstrukci pro střed křivosti S_0 křivky F_ω v bodě N_0:

---

*) Cf. na př. *Rohn-Papperitz:* Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I. Bd. str. 304. a n.

Sestrojme tečnu ku křivce f v bodě N_0 a spusťme k ní kolmici z bodu N, která již protíná přímku m v žádaném bodě.

Ze vzorců (4) a (6) plyne konečně

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{t^3 P^2 \eta'}{\overline{MM_0}}.$$

7. Analytické řešení rovnice

$$Y' + PY = Q \tag{1}$$

jest ovšem známo; provádí se buď použitím násobitele integračního aneb tím způsobem, že se klade $Y = uv$, kdež u a v značí funkce proměnné x.

Způsoby ty dají se geometricky lehce objasniti a tím i oprávněnost jejich odůvodniti. K tomu budou následující úvahy směřovati.

Mějme na zřeteli nejprve rovnici

$$y' + ay = 0, \tag{2}$$

kde a značí hodnotu stálou. Z rovnice této plyne

$$\frac{y}{y'} = -\frac{1}{a}.$$

Křivky integralní rovnice (2) mají tedy tu vlastnost, že subtangenta jejich má pro všechny body hodnotu stálou $-\frac{1}{a}$. Vlastnost ta přísluší jedině křivkám exponencialním, jak lze snadno též elementarně odvoditi.*) Jest tudíž, značí-li C konstantu,

$$y = Ce^{-ax}.$$

Máme-li obecněji rovnici

$$y = Ce^{f(x)},$$

pak jest

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{f'(x)}.$$

*) Cf. *Fr. Machovec*: „Zobrazování tečen a středů křivosti“ str. 45. a n.

Z toho následuje naopak, že křivky, jejichž subtangenty jsou funkcí proměnné x, tedy

$$\frac{y}{y'} = F(x),$$

vyjádřeny jsou rovnicí

$$y = Ce^{\int \frac{1}{F(x)} dx}.$$

Křivku takovou lze považovati za obálku křivek exponencialních, jichž velikost mění se v přímém poměru funkce $F(x)$.

Podle toho zní řešení rovnice homogenní

$$y' + Py = 0, \tag{3}$$

kde P značí funkci proměnné x, jelikož tu jest $\frac{y}{y'} = -\frac{1}{P}$,

$$y = Ce^{-\int P dx}. \tag{4}$$

Libovolné dvě křivky integralní rovnice (3) *jsou v poloze affinní pro x jakožto osu a y jakožto směr affinity.*

Neboť z rovnic

$$y_1 = C_1 e^{-\int P dx}, \qquad y_2 = C_2 e^{-\int P dx}$$

plyne, že

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Má tudíž poměr $y_1 : y_2$ hodnotu stálou.

To plyne ostatně z uvážení, když y vyhovuje rovnici (3), že pro totéž x jí vyhovuje též hodnota $y_1 = Ky$, značí-li K konstantu.

Přihlížejme dále k rovnici původně v úvahu vzaté

$$Y' + PY = Q \tag{5}$$

a srovnávejme ji s rovnicí (3). Pro subtangentu každé křivky integralní rovnice (5) obdržíme z rovnice této nejprve hodnotu

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{Y}{Q - PY} = -\frac{1}{P - \frac{Q}{Y}}.$$

Následkem toho bude obdobně případu předešlému

$$Y = Ce^{-\int [P - \frac{Q}{Y}] dx} = Ce^{-\int P dx} \cdot e^{\int \frac{Q}{Y} dx}.$$

Za $e^{\int \frac{Q}{Y} dx}$ klaďme zkrátka f, tak že f jest určitá funkce proměnných x a Y.

Dále vztahujme křivky rovnicemi (3) a (5) vyznačené tak k sobě, že si odpovídají vždy pořadnice y, Y příslušných bodů majících tutéž úsečku x.

Porovnáme-li pak poslední rovnici s rovnicí (4), dojdeme výsledku

$$Y = yf. \tag{6}$$

Derivujeme-li nyní tuto rovnici (6) dle x, vyjde rovnice

$$Y' = y'f + yD_x \cdot f,$$

do které dosadíme za Y' a y' hodnoty z (5) a (3) plynoucí bude pak

$$Q - PY = -Pyf + yD_x \cdot f$$

čili se zřetelem na (6)

$$\frac{Q}{y} = D_x \cdot f.$$

Jelikož Q jest funkcí x a y se dá dle (4) vyjádřiti jakožto funkce x, proto lze f považovati za funkci toliko jediné proměnné x; jest dle toho

$$f' = \frac{Q}{y}$$

a

$$f = \int \frac{Q}{y} dx + D,$$

značí-li D integrační stálou.

Dosadíme-li tuto hodnotu pro f do rovnice (6), kladouce zároveň za y hodnotu (4) a za součin CD krátce E, obdržíme konečně známý vzorec

$$Y = e^{-\int P dx}(E + \int Qe^{\int P dx}). \tag{7}$$

Libovolná křivka integralní rovnice (5) souvisí tu s libovolnou křivkou integralní rovnice příslušné (3) relací

$$Y = y\int \frac{Q}{y}\,dx + Dy. \tag{8}$$

8. Sledujme dále vztah křivek

$$Y' + PY = Q, \tag{1}$$

$$y' + Py = 0. \tag{2}$$

Především jest patrno, vyhovuje-li hodnota Y_1 rovnici (1), že jí vyhovuje též hodnota Y daná relací

$$Y = Y_1 + ky, \tag{3}$$

kde k značí hodnotu stálou. Jest pak také

$$Y' = Y_1' + ky'. \tag{4}$$

Takový jest tedy vztah mezi pořadnicemi křivek vyznačených příslušnými téže úsečce.

Pro jinou přímku rovnoběžnou s y označíme příslušné pořadnice $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{y}$, tak že jest též

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 + k\mathfrak{y}$$

a následkem toho

$$\frac{Y - Y_1}{\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_1} = \frac{y}{\mathfrak{y}}. \tag{5}$$

Z toho vyplývá věta:

Křivky integralní rovnice (1) protínají přímky stejnosměrné s osou y v podobných řadách bodových.

Spojnice příslušných bodů těchto řad na dvou takových přímkách protínají se tudíž v jediném bodě U.

Mysleme si, že tyto dvě řady bodové jsou soumeznými, tu obdržíme větu dřívější, prof. Czuberem odvozenou a též rovnicí (4) vyjádřenou.

Rovnice (3) podává přesnou konstrukci libovolné z křivek F rovnice (1), známe-li jednu z nich F_1 a mimo to jednu křivku integralní F^* rovnice (2).

Křivka F jest totiž konchoidalní křivkou křivky F^* vzhledem ku křivce F_1 jakožto křivce základní.*)

Význam hodnoty k jest patrný z následujícího.

Integral rovnice (2) obsahuje konstantu C, integral rovnice (1) konstantu E dle označení v článku předcházejícím. Pro různé hodnoty konstant těchto obdržíme různé křivky. Mějme na zřeteli zvláště křivku F_0, pro niž $E = 0$ a označme příslušnou pořadnici a hodnotu k znaky Y_0, k_0, tak že rovnice (3) tu zní

$$Y = Y_0 + k_0 y$$

aneb, když za y dosadíme hodnotu (4) v odstavci předcházejícím odvozenou,

$$Y = Y_0 + k_0 C e^{-\int P dx}.$$

Z rovnice této vyplývá, srovnáme-li s rovnicí (7) odst. 7., že integrační konstanta E křivek F má hodnotu

$$E = k_0 C.$$

Klademe-li obdobně

$$Y_1 = Y_0 + k_1 y,$$

pak jest

$$E_1 = k_1 C,$$

a dále

$$k = \frac{Y - Y_1}{y} = \frac{Y - Y_0}{y} - \frac{Y_1 - Y_0}{y};$$

tedy

$$k = k_0 - k_1.$$

Z toho vychází

$$k = \frac{E - E_1}{C}. \tag{6}$$

Následkem toho rovná se k poměru rozdílu konstant integračních křivky F a křivky základní ku konstantě křivky F^*.

(Pokračování.)

*) Cf. Zprávy zasedací kr. české společnosti nauk v Praze r. 1898 math.-přírod. třída XXVI.