Antonín Libický
Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 24--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122580

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,

professor na Král. Vinohradech.

Ve článku „Sur quelques nouveaux théorèmes, relatifs au triangle" (Nouvelles Annales de Mathématiques, ročník 1900, pag. 75.—77.) F. Caspary uveřejňuje bez důkazu řadu vět o trojúhelníku, ve kterých ukazuje, že mnohé věty, vztahující se k bodu Lemoine-ovu, platí i tenkráte, nahradí-li se tento průsečík symedian jakýmkoli bodem v rovině trojúhelníka. Vzhledem k důležitosti, již tyto věty mají v geometrii trojúhelníka, myslím, že nebude neužitečno, podati zde jejich důkazy. Předesýlám-li též krátký úvod o souřadnicích barycentrických, činím tak proto, aby věty i důkazy se staly srozumitelnými i tomu, kdo není obeznámen s těmito celkem méně užívanými souřadnicemi. Že jsem použil též několik málo vět z geometrického počtu Grassmannova, nebude snad článku na závadu; týkajíť se toliko základů tohoto počtu a porozumění jejich nečiní žádných obtíží.*) Avšak nejednalo se mi v tomto pojednání jenom o důkazy vět Casparyho; některé věty jsem doplnil a rozšířil tím, že jsem k bodům, jež Caspary v řečeném článku uvádí, připojil body další, čímž docílena jest, jak myslím, náležitá souměrnost těchto pouček.

2. Polohu nějakého bodu na přímce stanovíme často poměrem vzdáleností toho bodu ode dvou pevných bodů. Jsou-li tyto základní body A_1 a A_2 (obr. 1.), jest poměr bodu X_3 vzhledem k těmto bodům $A_1X_3 : X_3A_2$. Každé hodnotě tohoto poměru přísluší jediný bod X_3 přímky vedené body A_1 a A_2; je-li tato hodnota kladná, leží bod X_3 mezi body základními, je-li záporná, leží bod ten mimo délku A_1A_2. Sestrojení bodu X_3, jehož poměr $A_1X_3 : X_3A_2 = \frac{a_2}{a_1}$ jest dán, jest známé, tak že netřeba ho tuto popisovati.**)

*) Viz ostatně můj článek: „Základové geometrického počtu Grassmannova" v XXV. ročníku tohoto časopisu.

**) Viz „Základové vyšší geometrie" od Emila a Eduarda Weyra, díl I., pag. 10 a 11.

Pokládejme nyní členy a_1 a a_2 poměru $\frac{a_2}{a_1}$ za jakési součinitele (hmoty), příslušející bodům A_1 a A_2; označme tedy tyto body (hmotné) a_1A_1, a_2A_2. Bod X_3 se součinitelem $(a_1 + a_2)$ můžeme pak vyjádřiti součtem $a_1A_1 + a_2A_2$ a psáti

$$(a_1 + a_2) X_3 = a_1A_1 + a_2A_2,$$

kteráž *rovnice bodu* X_3 nám jen jiným způsobem praví, že $A_1X_3 : X_3A_2 = a_2 : a_1$. Všimněme si, že vzdálenosti bodu X_3 od obou bodů základních A_1 a A_2 jsou nepřímo úměrny koefficientům, těmto bodům náležejícím. Leží tedy bod X_3 blíže tomu bodu základnímu, jehož koefficient jest větší. Ze zvláštních poloh bodu X_3 vytkněme tyto dvě: střed S délky A_1A_2 jest dán rovnicí

$$2S = A_1 + A_2,$$

a bod uběžný U přímky vedené body A_1 a A_2 rovnicí

$$0U = A_1 - A_2.$$

Dva body, jichž poměry se liší pouze znaménkem, jsou, jak známo, harmonickými vzhledem k bodům A_1 a A_2; takové body jsou $a_1A_1 + a_2A_2$ a $a_1A_1 - a_2A_2$.

Podobným způsobem stanovíme polohu kteréhokoli bodu v rovině, vyjádřujíce bod ten součtem tří bodů základních A_1, A_2 a A_3 s jistými koefficienty; o těchto bodech předpokládáme, že neleží v jedné přímce. I jest na př.

$$(1) \qquad (x_1 + x_2 + x_3) X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3.$$

Ukážeme snadno, že koefficienty x_1, x_2 a x_3 jest bod X určen (obr. 1.). Za tím účelem zvolíme na straně A_2A_3 trojúhelníka základního bod X_1, jehož rovnice jest

$$(x_2 + x_3) X_1 = x_2A_2 + x_3A_3;$$

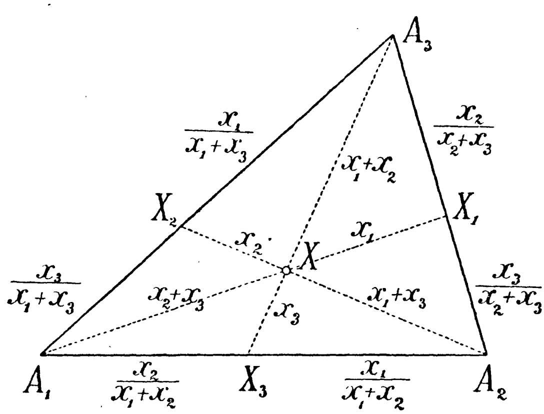
takový bod jest jediný. Rozdělme nyní příčku A_1X_1 bodem X na dva díly tak, aby $A_1X : XX_1 = (x_2 + x_3) : x_1$; jediný bod, který takto obdržíme, má rovnici

$$(x_1 + x_2 + x_3) X = x_1A_1 + (x_2 + x_3) X_1,$$

čili, přihlížíme-li k rovnici bodu X_1, též

$$(x_1 + x_2 + x_3) X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3.$$

Čísla x_1, x_2, x_3, jimiž stanovíme polohu bodu X, zovou se *barycentrickými souřadnicemi* toho bodu. Je zřejmo, že k určení bodu X stačí znáti poměr $x_1 : x_2 : x_3$ čili jinak řečeno, barycentrickými souřadnicemi toho bodu jsou kterékoli stejné násobky čísel x_1, x_2, x_3, tedy čísla tvaru kx_1, kx_2, kx_3. Často se volívá koefficient k tak, aby $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; jindy zase



Obr. 1.

k vůli stejnoměrnosti rovnice (1) podržuje se obecněji jiná hodnota toho součtu. Hodnotu tu označujeme obyčejně týmž malým písmenem, jímž znamenáme bod, na př. pro bod X píšeme $x = x_1 + x_2 + x_3$. Na levé straně rovnice bodu bývá vždy náležitě vytčeno, jakou hodnotu volíme za součet $x_1 + x_2 + x_3$, tak že se netřeba obávati nějakého nedorozumění. Je-li $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, jest bod X, jak snadno lze ukázati, bodem úběžným roviny.

Píšeme-li rovnici bodu X ve tvaru

$$(x_1 + x_2 + x_3) X = x_2 A_2 + (x_1 A_1 + x_3 A_3),$$

a zavedeme-li nějaký bod X_2, daný rovnicí

$$(x_3 + x_1)\, X_2 = x_1 A_1 + x_3 A_3,$$

obdržíme

$$(x_1 + x_2 + x_3)\, X = x_2 A_2 + (x_3 + x_1)\, X_2.$$

Tím odvozujeme bod X z bodu A_2 a zavedeného bodu X_2, který tedy s body X a A_2 leží na téže přímce. Avšak bod X_2 nalézá se dle své rovnice též na straně A_3A_1 trojúhelníka základního; jest tudíž průsečíkem příčky, body A_2 a X vedené, se stranou A_3A_1.

Podobně jest průsečík X_3 příčky, položené body A_3 a X, se stranou A_1A_2 určen rovnicí

$$(x_1 + x_2)\, X_3 = x_1 A_1 + x_2 A_2.$$

Z rovnic bodů X_1, X_2 a X_3 plynou pro poměry těchto bodů hodnoty:

$$
\begin{aligned}
A_2X_1 : X_1A_3 &= x_3 : x_2,\\
A_3X_2 : X_2A_1 &= x_1 : x_3,\\
A_1X_3 : X_3A_2 &= x_2 : x_1;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

položíme-li tedy

$$A_2A_3 = 1, \text{ jest } A_2X_1 = \frac{x_3}{x_2 + x_3}, \quad X_1A_3 = \frac{x_2}{x_2 + x_3};$$

učiníme-li

$$\text{(2a)} \quad A_3A_1 = 1, \text{ jest } A_3X_2 = \frac{x_1}{x_3 + x_1}, \quad X_2A_1 = \frac{x_3}{x_3 + x_1},$$

a je-li konečně

$$A_1A_2 = 1, \text{ jest } A_1X_3 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad X_3A_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

Z rovnice

$$(x_1 + x_2 + x_3)\, X = x_1 A_1 + (x_2 + x_3)\, X_1$$

jde dále, že

$$A_1X : XX_1 = (x_2 + x_3) : x_1 \tag{2b}$$

a odtud

$$A_1X : A_1X_1 = (x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 + x_3),$$

jakož i

$$(2c) \qquad XX_1 : A_1X_1 = x_1 : (x_1 + x_2 + x_3).$$

Položíme-li

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$, jest $A_1X = (x_2 + x_3)\, A_1X_1$, $XX_1 = x_1\, A_1X_1$;

podobně nalezneme, že

$$A_2X = (x_3 + x_1)\, A_2X_2, \quad XX_2 = x_2A_2X_2,$$
$$A_3X = (x_1 + x_2)\, A_3X_3, \quad XX_3 = x_3A_3X_3.$$

Všechny tyto hodnoty jsou v obr. 1. u příslušných úseček vyznačeny.

Na základě toho lze snadno sestrojiti bod X, dány-li jsou jeho barycentrické souřadnice x_1, x_2, x_3 vzhledem k trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Rozdělme na př. stranu A_1A_2 v poměru $x_2 : x_1$ a stranu A_2A_3 v poměru $x_3 : x_2$; tím sestrojíme body X_3 a X_1 a průsečík příček A_3X_3 a A_1X_1 jest bodem hledaným X. Nebo sestrojíme jen jeden z těchto bodů, na př. X_3, vedeme příčku A_3X_3 a rozdělíme ji v poměru $(x_1 + x_2) : x_3$.

Jsou-li všechny tři souřadnice bodu X kladné, nalézá se bod ten uvnitř trojúhelníka základního; je-li jedna nebo dvě souřadnice záporné, leží bod mimo trojúhelník $A_1A_2A_3$. Leží-li bod X ve zvláštním případě na některé straně tohoto trojúhelníka, jest jedna jeho souřadnice rovna nulle; na př. všechny body strany A_1A_2 mají $x_3 = 0$. Bod A_1 má souřadnice 1, 0, 0; bod A_2 souřadnice 0, 1, 0; bod A_3 souřadnice 0, 0, 1.

S bodem X souvisí některé body, jichž souřadnice jsou v určitém jednoduchém vztahu k souřadnicím bodu X; bodům těm, známým z geometrie trojúhelníka, dána byla zvláštní jména.*) Vytkněme z nich ty, jež se nám později vyskytnou. Bodu $X(x_1, x_2, x_3)$ přísluší:

dva body *isobarické prvního druhu,* jichž souřadnice jsou: x_2, x_3, x_1 a x_3, x_1, x_2;

tři body *isobarické druhého druhu* (zvané též *semirecipročně přidruženými*) o souřadnicích: x_1, x_3, x_2; x_2, x_1, x_3 a x_3, x_2, x_1;

---

*) Viz článek V. Jeřábka: „O některých bodech geometrických“ v XX. ročníku tohoto časopisu, pag. 141 a 237.

tři body *algebraicky přidružené* o souřadnicích: $-x_1, x_2, x_3$; $x_1, -x_2, x_3$ a $x_1, x_2, -x_3$;

bod *complementární* o souřadnicích: x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2;

bod *přidružený v nekonečnu* o souřadnicích: x_2-x_3, x_3-x_1, x_1-x_2;

bod *anticomplementární* o souřadnicích: $-x_1+x_2+x_3$, $x_1-x_2+x_3$, $x_1+x_2-x_3$;

bod *reciproký* (stupně nulltého) o souřadnicích:

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3};$$

dva body *brocardské* o souřadnicích:

$$\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_1} \text{ a } \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}.$$

Budiž zde ještě poznamenáno, že střed hmotný G trojúhelníka $A_1A_2A_3$ má rovnici

$$3G = A_1 + A_2 + A_3;$$

že střed kružnice tomuto trojúhelníku vnitř vepsané má barycentrické souřadnice:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3,$$

značí-li a_1, a_2, a_3 po řadě strany A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trojúhelníka základního; a že bod Lemoine-ův jest určen hodnotami:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1^2 : a_2^2 : a_3^2.$$

2. Nežli přikročíme k vlastnímu předmětu tohoto pojednání, rozřešme dřív úlohu, která se nám v dalším často vyskytne.

Dva body, z nichž jeden leží na některé straně trojúhelníka základního, druhý na straně jiné, dány jsou poměry vzhledem k příslušným dvěma (na téže straně ležícím) vrcholům tohoto trojúhelníka; jest určiti barycentrické souřadnice průsečíku dvou příček, jež obdržíme, spojíme-li každý z daných bodů s vrcholem protějším.

Buď nejprve jeden z daných bodů X_1 (obr. 1.), položený na straně A_2A_3, dán poměrem $A_2X_1 : X_1A_3 = p_2 : p_3$ a druhý

X_2, ležící na straně A_3A_1, poměrem $A_3X_2 : X_2A_1 = q_3 : q_1$; jest vyhledati barycentrické souřadnice x_1, x_2, x_3 průsečíku X příček A_1X_1 a A_2X_2.

Z obr. 1. jest zřejmo, že

$$A_2X_1 : X_1A_3 = x_3 : x_2,$$

jakož i, že

$$A_3X_2 : X_2A_1 = x_1 : x_3;$$

tudíž srovnáním vychází, že

$$x_3 : x_2 = p_2 : p_3$$

a

$$x_1 : x_3 = q_3 : q_1,$$

z kterýchž dvou úměr zase plyne

$$(3a) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = p_2q_3 : p_3q_1 : p_2q_1,$$

čímž úloha naše jest řešena.

Je-li jeden z daných bodů X_2 (na straně A_3A_1) dán poměrem

$$A_3X_2 : X_2A_1 = q_3 : q_1$$

a druhý X_3 (na straně A_1A_2) poměrem

$$A_1X_3 : X_3A_2 = r_1 : r_2,$$

obdržíme týmž způsobem

$$(3b) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = q_3r_2 : q_3r_1 : q_1r_2.$$

A je-li konečně poměr jednoho z daných bodů X_3 (na straně A_1A_2)

$$A_1X_3 : X_3A_2 = r_1 : r_2$$

a poměr druhého bodu X_1 (na straně A_2A_3)

$$A_2X_1 : X_1A_3 = p_2 : p_3,$$

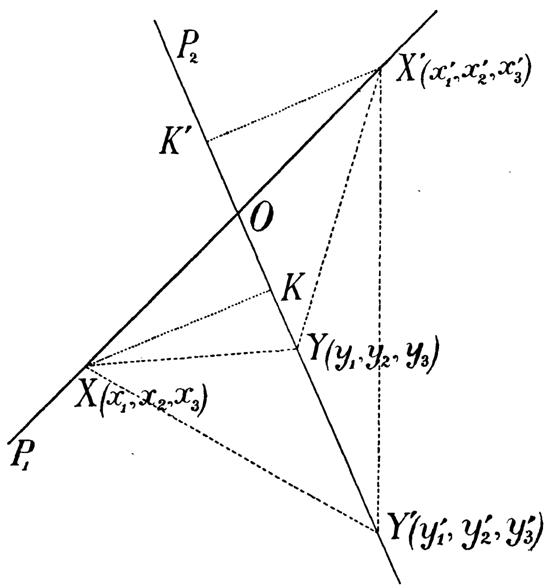
nabudeme

$$(3c) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = r_2p_3 : r_1p_3 : r_1p_2.$$

Obecnější jest úloha:

Ustanoviti rovnici průsečíku dvou přímek, z nichž každá jest dána dvěma body.

Buď dána přímka P_1 body $X(x_1, x_2, x_3)$ a $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ (obr. 2.) a přímka P_2 body $Y(y_1, y_2, y_3)$ a $Y'(y'_1, y'_2, y'_3)$.



Obraz 2.

Abychom nalezli rovnici průsečíku O obou těchto přímek, uvažujme takto: Spustíme-li s bodů X a X' kolmice XK a $X'K'$ na přímku P_2, platí úměra

$$OX : OX' = XK : X'K'.$$

Avšak XK jest výškou $\triangle XYY'$ a $X'K'$ výškou $\triangle X'YY'$, béřeme-li za společnou základnu jejich stranu YY'; tudíž

$$\triangle XYY' : \triangle X'YY' = XK : X'K'$$

a dle předešlé úměry též

$$\triangle XYY' : \triangle X'YY' = OX : OX'.$$

Usečku OX vyjadřujeme dle Grassmanna rozdílem jejího bodu koncového a počátečného $X - O$,*) podobně píšeme místo úsečky OX' rozdíl $X' - O$. Dále víme z Grassmannovy Ausdehnungslehre, že externí součin tří bodů, na př. $[XYY']$, má za metrickou veličinu dvojnásobný obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou činitelé daného součinu X, Y, Y'.**) Jest pak

$$xyy'[XYY'] = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & y'_1 \\ x_2, & y_2, & y'_2 \\ x_3, & y_3, & y'_3 \end{vmatrix} [A_1 A_2 A_3].^{***})$$

Kladouce tedy za poměrné číslo plochy $\Delta Xyy'$ tento determinant dělený součinem xyy' a podobný výraz za plochu $\Delta X'yy'$, změníme poslední úměru ve

$$x(X - O) : x'(X' - O) = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & y'_1 \\ x_2, & y_2, & y'_2 \\ x_3, & y_3, & y'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x'_1, & y_1, & y'_1 \\ x'_2, & y_2, & y'_2 \\ x'_3, & y_3, & y'_3 \end{vmatrix};$$

nazveme-li první z těchto determinantů Δ a druhý Δ', dostaneme

$$x(X - O)\Delta' = x'(X' - O)\Delta,$$

z čehož plyne

$$(x'\Delta - x\Delta')O = x'\Delta X' - x\Delta' X,$$

aneb, poněvadž

$$xX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$
$$x'X' = x'_1 A_1 + x'_2 A_2 + x'_3 A_3,$$

též

$$(x'\Delta - x\Delta')O$$
$$= (x'_1 \Delta - x_1 \Delta')A_1 + (x'_2 \Delta - x_2 \Delta')A_2 + (x'_3 \Delta - x_3 \Delta')A_3.$$

Vložíme-li tu za Δ a Δ' příslušné hodnoty, nabudeme konečně hledané rovnice průsečíku O ve tvaru

---

*) *Základové geometrického počtu Grassmannova,* pag. 193, roč. XXV.

**) ibid. pag. 273.

***) ibid. pag. 277, vzorec (21), upravený pro ten případ, že jde o body v jedné rovině ležící a že $x_1 + x_2 + x_3 = x$, $y_1 + y_2 + y_3 = y$ atd.

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x'x_1 - xx'_1, & y_1, & y'_1 \\ x'x_2 - xx'_2, & y_2, & y'_2 \\ x'x_3 - xx'_3, & y_3, & y'_3 \end{vmatrix} O$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & , y_1, & y'_1 \\ -(x_1 x'_2 - x'_1 x_2), & y_2, & y'_2 \\ x_3 x'_1 - x'_3 x_1 & , y_3, & y'_3 \end{vmatrix} A_1$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 x'_2 - x'_1 x_2 & , y_1, & y'_1 \\ 0 & , y_2, & y'_2 \\ -(x_2 x'_3 - x'_2 x_3), & y_3, & y'_3 \end{vmatrix} A_2$$

$$+ \begin{vmatrix} -(x_3 x'_1 - x'_3 x_1), & y_1, & y'_1 \\ x_2 x'_3 - x'_2 x_3 & , y_2, & y'_2 \\ 0 & , y_3, & y'_3 \end{vmatrix} A_3.$$

Jeden zvláštní případ této úlohy jest důležitý. Přímka P_1 jest dána body $X(x_1, x_2, x_3)$ a $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$; *jest určiti její průsečíky se stranami trojúhelníka základního.*

Budiž R_1 průsečík přímky P_1 se stranou $A_2 A_3$; abychom vyhledali rovnici toho bodu, položme ve (4) $y_1 = y_3 = 0$, $y_2 = 1$; $y'_1 = y'_2 = 0$, $y'_3 = 1$. Tím obdržíme

$$(5\,a) \qquad (x'x_1 - xx'_1) R_1 = (x_1 x'_2 - x'_1 x_2) A_2 - (x_3 x'_1 - x'_3 x_1) A_3,$$

a podobně pro průsečík R_2 přímky P_1 se stranou $A_3 A_1$:

$$(5\,b) \qquad (x'x_2 - xx'_2) R_2 = (x_2 x'_3 - x'_2 x_3) A_3 - (x_1 x'_2 - x'_1 x_2) A_1,$$

a pro průsečík R_3 přímky P_1 se stranou $A_1 A_2$:

$$(5\,c) \qquad (x'x_3 - xx'_3) R_3 = (x_3 x'_1 - x'_3 x_1) A_1 - (x_2 x'_3 - x'_2 x_3) A_2.$$

(Pokračování.)