Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 4, 220--236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122569

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Osmnáctá výroční zpráva c. k. českého gymnasia v Budějovicích za školní rok 1890.

Gothard Smolař: Příspěvky k vypočítávání srostlic a výklad o pozoruhodném srůstání krystallů pyritových. Studie geometricko-krystallografická. S 23 obrazci na 3 tabul.

Za objasněním věci, ku které se vztahuje jediná věcná výtka obsažená v referatě na str. 120. ročníku XX. tohoto časopisu, uvádím toto: Vzhledem ke stanovisku Tschermakovu, jež uznává výměr osy srostlicové pouze stáčením o 180°, kteréžto výměr též do naznačené práce byl přijat (viz str. 8. řádek 15.—20.), výklad odstavce X. 2. a poznámka druhá na str. 29. svrchu uvedené práce jsou správné; poznámka ta se vztahuje pouze k výkladu v Tschermakově knize obsaženému.

G. Smolař.

B. Recense knih.

O některých druzích souřadnic projektivických. Příspěvky ku theorii křivky kruhové. Napsal *Theodor Monin*, assistent při c. k. českých vys. šk. techn. V Praze. Nákladem *vlastním*. V komissi knihkupectví Ed. Valečky. Cena 1 zl. 50 kr. r. m.

Pan spisovatel, dosud známý jen několika málo krátkými pojednáními, podává tímto českým mathematikům větší spis, vynikající bohatostí obsahu, původností myšlének a důležitostí předmětu, o němž pojednává. Spis složen jest ze dvou částí na sobě nezávislých: první pojednává na 108 str. o souřadnicích projektivických, druhá na 35 str. podává příspěvky ku theorii křivky kruhové. Vylíčím v krátkosti obsah obou dílů a přičiním některé poznámky.

V první části p. spisovatel ukazuje, jak lze určiti polohu bodu na přímce, polohu bodu a přímky v rovině a polohu bodu, přímky a roviny v prostoru. Bod na přímce určuje obvyklým způsobem jeho dvojpoměrem vzhledem ke třem bodům základním. K určení polohy bodu a přímky v rovině myslí si v této rovině kuželosečku K_2 a na ní tři základní body a tečny v těchto bodech. Každá přímka v rovině má s K_2 dva realné různé, nebo splývající, nebo imag. průsečníky, které určeny jsou svými dvojpoměry x' a x'' vzhledem k bodům základním. Podobně jest určen každý bod dvojpoměry ξ' a ξ'' tečen z něho ku K_2 sestrojených vzhledem k tečnám základním. Kdybychom pokládali za souřadnice přímky nebo bodu dvojpoměry x' a x'' resp. ξ' a ξ'', jak to Dr. Emil Weyr v pojednání „Ueber rationale Curven“ uveřejněném král. spol. nauk r. 1872 učinil, obdrželi bychom symetrický system souřadnic, který by měl dvě vady: reálné přímce nebo bodu mohly by náležeti imag. souřadnice a stupeň křivky neshodoval by se se stupněm její rovnice. Proto pokládá pan spisovatel za souř. přímky čísla ξ_0, ξ_1, ξ_2 určené rovnicemi

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{a} \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = x'x''$$

a podobně vytvořená čísla x_0, x_1, x_2 za souřadnice bodu. Tím dospívá k určení bodu v rovině, které velmi úzce souvisí se stanovením bodů roviny dvojinami bodů na přímce, které podal Hesse ve článku „Ein Übertragungsprincip“ (Crelle J. sv. 66.). Podmínka, aby bod x_k byl na přímce ξ_k, vyjadřuje se potom rovnicí

$$\xi_0 x_2 - 2\xi_1 x_1 + \xi_2 x_0 = 0,$$

která tedy v této soustavě souřadnicové značí přímku nebo bod dle toho, pokládáme-li souřadnice x_k nebo ξ_k za proměnlivé.

Od těchto souřadnic přechází p. spisovatel k souřadnicím trojbodovým a trojpřímkovým způsobem i jinde užívaným, ukazuje totiž, že rovnici každé přímky roviny lze psáti ve tvaru

$$\eta_1\alpha + \eta_2\beta + \eta_3\gamma = 0,$$

značí-li $\alpha = 0$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$ rovnice tří libovolných přímek v soustavě K_2, načež vyšetřuje význam čísel η_k. Tím dospívá ku geometrickému významu jejich, od něhož se v souřadnicích trimetrických obyčejně vycházívá.

Vyšetřiv ještě podmínku $\sum_{i=1}^{i=3} \eta_i y_i = 0$, aby bod y_i byl na přímce η_i, provádí transformaci souřadnic K_2 na trimetrické a naopak, jakož i souřadnic K_2 na K_2'.

Pro stanovení bodu a roviny v prostoru myslí si p. spisovatel prostorovou křivku třetího řádu K_3 a na ní tři body základní s oskulačními rovinami této křivky. Každý bod a každá rovina oskulační křivky K_3 určena jest jednoznačně svým dvojpoměrem vzhledem ke třem bodům, resp. rovinám základním.

Libovolná rovina nebo bod prostoru určeny jsou potom dvojpoměry — $x^{(k)}$ nebo $\xi^{(k)}$ tří bodů resp. rovin oskulačních křivky K_3 v té rovině ležících nebo bodem procházejících. Za souřadnice roviny pokládá p. spisovatel čísla ξ_0, ξ_1, ξ_2 vyhovující rovnicím

$$\frac{\xi_2}{\xi_0} = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = \frac{x'x'' + x''x''' + x'''x'}{3}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = x'x''x'''$$

a podobně vytvořená čísla x_0, x_1 a x_2 za souřadnice bodu. Pro body křivky K_3 platí potom známé relace

$$x_k = x^k$$

a podobně pro roviny oskulační

$$\xi_k = \xi^k,$$

jichž užil již Cremona (Annali di mathematica T. I.) a současně s ním Joachimsthal v poznámce připojené k pojednání Schröterovu „Ueber Raumcurven 3. Ordn. und 3. Cl." v 56. svazku Crellova žurnálu; v tomto pojednání jest též užito k určení roviny parametrů tří bodů, jež tato rovina stanoví na K_3.

Podmínka, aby bod x_k byl v rovině ξ_k má pro souřadnice K_3 tvar

$$x_0\xi_3 - 3x_1\xi_2 + 3x_2\xi_1 - x_2\xi_0 = 0,$$

kteráž jest rovnicí bodu nebo roviny v této soustavě dle toho, pokládáme-li za proměnlivé ξ_k nebo x_k. K odvození této rovnice užito jest vlastností involuce třetího stupně a druhé třídy, kterou roviny procházející bodem stanoví na K_3. Podotýkám, že podobným způsobem bylo lze pokračovati při odvozování příslušné relace v souřadnicích K_2. Po výkladu zvláštních poloh bodů a rovin ku K_3 následuje určení polohy bodu a roviny pomocí hyperboloidu jednodílného H.

Vytkneme-li v každé soustavě přímek této plochy tři přímky P_k a Q_k, jest každá čtvrtá přímky P resp. Q stanovena jednoznačně svým dvojpoměrem p resp. q vzhledem k základním přímkám téže soustavy. Parametry p a q dvou projektivných soustav $p = q$ spojeny jsou rovnicí

$$\xi_0 pq + \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 = 0$$

a výtvorem těchto soustav jest křivka 2. řádu, která jest čísly ξ_k úplně určena. Těmito veličinami jest tedy určena i její rovina, jakož i vrchol v plochy kuželové, která se v této křivce dotýká zákl. hyperboloidu. Z té příčiny lze čísla ξ_k pokládati za souřadnice roviny této křivky i za souřadnice bodu v. Podmínka, aby bod x_k byl na přímce ξ_k má i tu tvar bilineárný

$$\xi_0 x_3 - \xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 + \xi_3 x_0 = 0.$$

Následuje přechod od souřadnic K_3 a H k tetrametrickým a transformace soustavy tetrametrické na soustavy K_3 a H, jakož i soustavy K_3 na K_3' a K_3 na H.

Souřadnice K_2 hodí se dobře pro geometrii na kuželosečce, souřadnice K_3 pro geometrii na prostorových křivkách 3. řádu a konečně souřadnice H pro geometrii na hyperboloidu a na plochách 2. stupně vůbec.

Ve čtvrtém dílu pojednáno jest o určení přímky v prostoru. Její souřadnice odvozeny jsou nejprvé ze souřadnic rovin a bodů vzhledem ku K_3 a H, potom ze souřadnic tetrametrických, při čemž přihlíženo jest zajímavým způsobem ke zvláštním polohám přímky K_3 a H. Nelze zde vypočísti všecky zajímavé úvahy této pro theorii paprskových komplexů velmi důležité části, budiž jen ještě poukázáno na odstavec jednající o rovnici přímky v přímkových souřadnicích, o tetraetrických souřadnicích přímky a o příslušných transformacích, kde p. spisovatel vhodně zvolenými symboly elegantně přemahá značné obtíže tu se vyskytující. V šesti připojených poznámkách jsou jednak dodatky k odst. předcházejícím, jednak podáno jest v nich praktické užití souřadnic z předu vyložených. K druhému druhu náleží zejména poznámka 4. o dvojpoměru čtyř tečen křivky třetího řádu, které určitou přímku protínají*), poznámka 5., v níž mimo jiné odvozeny jsou dvě věty o křivkách 3. řádu na hyperboloidu poprvé Cremonou dokázané, jež také referent ve své práci „O jisté kubické transformaci“ jednoduchým způsobem odvodil, a konečně poznámka 6. o geometrické korrespondenci mezi soustavou prostorovou a řadou 2. stupně, resp. svazkem 2. třídy. —

Že tento bohatý obsah bylo možno vtěsnati jen na 108 stran, vysvětluje se tím, že p. spisovatel při vší jasnosti dbal stručnosti co možná největší a že užíval v hojné míře symbolických označení. V některých místech zdá se nám, že by nebylo na úkor spisu připojiti vedle důvodů ryze počtářských i důvody geometrické; referent nemohl by si toho odepříti na př. při některých vlastnostech nullového systemu, ale uznává, že jest to věcí vkusu a záliby.

Z celého spisu jest zřejmo, že p. spisovateli nešlo o odvození jednotlivostí a vět, nýbrž o methodu zkoumání, která jest v první řadě podmíněna vhodnou volbou souřadnic. A tím právě pluje p. spisovatel proudem nejmodernějším. Komu by se zdálo, že spis obsahuje málo výsledků, nebo že ukázáno jest použití theorie jen na málo příkladech, tomu uvádíme na mysl pěkná slova záhy zesnulého Dr. Herm. Hankela v přednášce „o vývinu mathematiky v posledních stoletích“ konané v Tübingách r. 1869: Einzelne sogenannte „hübsche Sätze“ haben an und für sich in den Augen eines modernen Mathematikers noch

*) K této poznámce připojuje p. spisovatel, že dvojpoměr těchto čtyř tečen vyšetřoval Voss ve XIII. svazku „Math. Annalen“, což se nám zdá spočívati na omylu. Voss v této práci dokazuje, že čtyři tečny křivky K_3 nejsou na sobě nezávislé; přímky, které s danými třemi přímkami mohou býti tečnami křivek třetího řádu tvoří komplex 4. stupně.

weniger Wert, als für den wissenschaftlichen Botaniker die Entdeckung einer neuen „hübschen Blume“, obgleich dem Laien gerade hierin der Hauptreiz der betreffenden Wissenschaft zu liegen pflegt. —

Druhé pojednání skládá se ze čtyř dílů. První pojednává o odchylkách kružnic, druhý o potenci přímky ke kružnici, třetí o délkách společných tečen kružnic a čtvrtý o větě Caseyově a větě, již vyslovil Darboux.

V prvním díle odvozeno jest nejprve způsobem Plückerovým (Analytisch geom. Entwickelungen) několik vět o kružnici potenční dvou kružnic a o síti kružnic, z nichž každá protíná dvě kružnice pod stejnými úhly. K těmto větám připojeny jsou věty o soustavě kružnic, které protínají každou krnžnici jistého svazku pod stejnými úhly; soustavu těchto kružnic jmenuje p. spisovatel soustavou konickou. Ukázáno jest dále, jak lze užiti těchto výsledků k řešení úlohy Apolloniovy a obecnější úlohy: sestrojiti kružnici, která s každou z daných tří kružnic tvoří daný úhel. Při řešení této úlohy nebylo užito inverse kruhové, jak to činí na př. Fiedler ve svém spise „Cyklographie“. Ve druhé části zavádí p. spisovatel nový pojem „potenci přímky ke kružnici“. Touto potencí jmenuje výraz

$$\frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=1-\frac{\varrho^2}{d^2}=-\operatorname{tg}^2\varphi,$$

v němž d a β značí úhly sevřené tečnami A a B ze kteréhokoli bodu přímky P ke kružnici vedené, ϱ pol. kružnice, d vzdálenosť středu kružnice od přímky a φ reálný nebo imag. úhel sevřený přímkou a kružnicí. O tomto výrazu, jejž symbolicky označuje (PAB), ukazuje p. spisovatel, že jej lze z přímkové rovnice kružnice podobným způsobem odvoditi, jako potenci bodu ke kružnici z její rovnice bodové.

Pro každé dvě inversně homologické tečny A a B dvou kružnic a pro jejich chordálu P má výraz (PAB) touž hodnotu, z čehož jde, že každé dva páry inversně homologických tečen dvou kružnic dotýkají se jisté kružnice.

Všecky kružnice, které tímto způsobem z jednoho páru inversně homologických tečen obdržíme, stanoví s danými dvěma kružnicemi tečny (na př. zevnější) stejné délky a naopak, stanoví-li nějaká kružnice s dvěma danými kružnicemi na př. zevnější tečny stejné délky, jsou tyto tečny inversně homologické vzhledem k vnějšímu středu podobnosti. Vět těchto užívá potom p. spisovatel ve třetí části k řešení úloh, které vyplývají z úloh první části, vyměníme-li v nich požadavek rovnosti úhlů požadavkem rovnosti tečen, tedy na př. k řešení úlohy: Jsou dány čtyři kružnice; sestrojiti jest kružnici, která se všemi stanoví tečny (na př. vnější) stejné délky a sestrojiti kružnici, která se třemi danými kružnicemi stanoví společné tečny určitých délek.

V oddílu čtvrtém dokázána jest jednoduchým způsobem věta Caseyho o závislosti délek spol. tečen dvou a dvou ze čtyř kružnic, které se dotýkají kružnice páté a věta Darboux-ova o závislosti odchylek dvou a dvou těchto kružnic. Vět těchto použito jest k řešení úlohy Apolloniovy podobným způsobem jako v Salmon-Fiedlerově „Anal. Geom. der Kegelschnitte (str. 152, 4. vyd.).

K tomu připojeny jsou ještě některé výsledky plynoucí ze zvláštní vzájemné polohy čtyř kružnic a pojednání ukončeno jest úlohou:

Sestrojiti jest kružnici dané lineárné řady, která s danou kružnicí stanoví společné tečny určité délky.

I při tomto pojednání bylo lze bohatý obsah vpraviti na několik stran jen největší stručností. Vysvitne to již srovnáním této práce 35stránkové s 263 stránkovým spisem Fiedlerovým „Cyklographie“, jehož značná část věnována jest témuž předmětu. Někde spisovatel pro krátkosť potlačil i důkazy tvrzení, jejichž pravdivosť není snadno patrna. Jmenujeme v té příčině jmenovitě tvrzení v odst. 2. o potenčních kružnicích tří kružnic po dvou vzatých a některé výroky o sítích, souřadích a řadách kružnic.

Poznamenávám pro čtenáře této práce, že mnohé výsledky v ní uvedené lze snadno dokázati, zavedeme-li podle souřadnic kulových, jichž Reye ve svém krátkém, ale obsažném spise o synthetické geometrii plochy kulové a v pojednání o kulových komplexech uveřejněných v r. 1886 v Crellově žurnálu užil, za souřadnice kružnice

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \Pi = 0$$

čísla ξ_0, ξ_1, ξ_2 a ξ_3 vyhovující rovnicím

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = p, \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = q \quad \text{a} \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = \Pi.$$

Rovnice lineárné sítě kružnic jest potom $\sum_{k=0}^{k=3} a_k \xi_k = 0$, kvadratické sítě $\sum_{i,k=0}^{i,k=3} a_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ atd. Dvě rovnice 1. druhu stanoví svazek kružnic, soustavu konickou lze určiti rovnicí linearnou a kvadratickou atd. Rovnice soustavy kružnic, z nichž každá dvě dané kružnice pod úhly stejných cosinů protíná, jest

$$(\Pi'' r')\,\xi_0 + 2\,(p' r'')\,\xi_1 + 2\,(q' r'')\,\xi_2 + (r' - r'')\,\xi_3 = 0\,,$$

rovnice soustavy kružnic protínajících danou kružnici pod úhly, jejichž cosinus $= k$, má tvar

$$k^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_0\xi_3) = (a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2,$$

jemuž podobná jest rovnice soustavy kružnic určujících s danou kružnicí tečny stejné délky.

Končím referát svůj o výborné této práci poznámkou, že p. spisovatel vydal ji nákladem vlastním a že zajisté nebude z ní míti hmotného prospěchu. Přeji mu, aby zasloužený mravní úspěch byl mu odměnou i za práci i za hmotnou oběť.

Prof. *Frant. Machovec.*

Cours professé à la Faculté des Sciences par *M. Hermite.* 4[e] Édition, revue par l'auteur. Paris 1888. A. Hermann. (Cena 15 franků).

Lithografované přednášky předního mathematika Francie jsou jednou z knih, které jsou nejvíce čteny. Největší mathematikové z mladší generace evropské byli jimi vychováni. Stačí tu uvésti jména jako: *Poincaré, Picard, Appell, Mittag-Leffler.* Zdá se, že pouze francouzské mládeži lze průběhem roku předvésti tolik rozmanité látky. Je to nepřetržitá řada jisker, důmyslně spletených v systematický celek. Bohatosť obsahu závodí s elegancí a stručností bez újmy na přesnosti a jasnosti výkladu.

Vizme stručný přehled látky zde probrané.

1. přednáška. Pojem omezeného integrálu a kvadratury. Rektifikace čar. Kvadratura kuželoseček a cykloidy. Ku konci ukazuje autor, že kvadratura křivek kubických vede k integrálům elliptickým.

2. přednáška. O křivkách stupně 3. obecných (irracionalných). Redukce elliptických integrálů na tvar kanonický. Kvadratura v polarných souřadnicích.

Poznámka o integraci pomocí substituce. Vizme zajímavý příklad: Uvažujme integrál

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^m\, dx}{(a-x)^{m+1}}, \quad \text{kde} \quad |a| > 1.$$

Substituce $\frac{1-x^2}{a-x} = 2y$ vede po krátké úvaze ke vzorci velmi zajímavému:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^m\, dx}{(a-x)^{m+1}} = 2^{m+1} \int_{0}^{a-\sqrt{a^2-1}} \frac{y^m\, dy}{\sqrt{y^2 - 2ay + 1}}.$$

3. přednáška. Rektifikace kuželoseček. Věta Fagnano. Věty Gravesova a Chaslesovy týkající se oblouků ellipsy. Integrály pseudoelliptické:

Je-li $\varphi(u)$ racionalná funkce, pro niž $\varphi(u) = -\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$, dá se integrál

$$\int \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{u + (2 - 4k^2)\,u^2 + u^3}}$$

vyjádřiti v zakončeném tvaru, a sice substitucí $z = \frac{4u}{(1+u^2)^2}$.

Rovněž integrál

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

kde $\mathrm{R}(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ a $f(x^2)$ značí funkci racionalnou podrobenou podmínce

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \quad \text{neb} \quad f(x^2) = -f\left(\frac{1 - k^2x^2}{k^2 - k^2x^2}\right)$$

aneb posléz

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1 - x^2}{1 - k^2x^2}\right).$$

Posléz jedná autor o transformaci druhého stupně a dokazuje větu Landenovu o oblouku hyperboly.

4. přednáška. Integrály hyperelliptické. Redukce na hlavní tvary. Applikace: Položme $\mathrm{R}(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$; pak bude

$$\int \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \mathrm{P}\sqrt{\mathrm{R}(x)} + \mathrm{A}_n \int \frac{k^2x^2}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} - \mathrm{B}_n \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

při čemž P značí celistvou funkci x, A_n a B_n pak jsou stálé, jež se snadno obdrží. Ony hoví podmínce

$$\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n-1} - \mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n-1} = \frac{k^{2n}}{2n+1},$$

a odtud jsme vedeni k řetězci o sblížených hodnotách $\frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n}$.

Znamenejme

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \quad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}};$$

pak bude

$$\frac{J}{K} = \frac{k^2}{2(1+k^2) - \cfrac{9k^2}{4(1+k^2) - \cfrac{25k^2}{6(1+k^2) - \ldots}}}$$

v kterémžto řetězci jsou sbližné zlomky pořadem $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, atd.

Dále studuje autor rektifikaci čar racionalných.

5. přednáška. Kubatura těles a kvadratura ploch křivých; dvojnásobné integrály. Applikace: Francklinův důkaz věty Čebyševa:

$$(a' - a) \int_a^{a'} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \int_a^{a'} \varphi(x)\,dx \int_a^{a'} \psi(x)\,dx,$$

kde $a' > a$, a funkce $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zároveň buď rostou aneb klesají, mění-li se x od a do a'; kdyby jedna funkce rostla, druhá klesala v intervallu $(a \ldots a')$, pak by znamení $>$ se musilo nahraditi znakem $<$.

Dále: Sblížené stanovení integrálů dvojnásobných, integrace podél křivky.

6. přednáška. Veličiny pomyslné. Funkce jednoznačné a víceznačné. Na konec odvozena znamenitá věta: Buďte ϱ, α, β veličiny stálé, ω proměnná a uvažujme křivku, kterou probíhá v komplexní rovině bod $u = \log(\varrho e^{i\omega} - \alpha - i\beta)$, probíhá-li ω všechny hodnoty realné.

Oblouk této křivky bude vyjádřen elliptickým integrálem druhu prvého

$$\sigma = 2\varrho \int \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}},$$

kde

$$\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega = \cos 2\varphi \,.\, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$a = \varrho - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad b = \varrho + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

7. přednáška. Integrace v mezích pomyslných. Věta Darbouxova a Weierstrassova o střední hodnotě integrálu.

8. přednáška. Riemannův důkaz věty Cauchyovy.

9. přednáška. Řada Taylorova v oboru komplexní proměnné. Zde autor jakožto applikaci vkládá velkolepý důkaz věty,*) že základ přirozených logarithmů e nemůže býti odmocninou čísla racionalného, t. j. že přirozený logarithmus racionálného čísla nemůže býti racionalným (vyjímaje log 1). Důkaz ten zní takto:

---

*) která jest ovšem pouhým zvláštním případem slavné věty Hermiteovy o transcendentnosti čísla e.

Znamenejme

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots.n-1},$$

takže

$$\frac{e^x - F(x)}{x^n} = \frac{1}{1.2\dots n}[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots].$$

Differencujeme-li obě strany $(n-1)$kráte, máme vztah

$$\frac{e^x \Pi(x) - \Phi(x)}{x^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{1.2\dots n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\dots(2n+m-1)} x^m,$$

kde $\Pi(x)$ je polynom stupně $n-1$ s celistvými součiniteli;

$$\Pi(x) = x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2} x^{n-3} - \dots,$$

$$\Phi(x) = \Pi(-x).$$

Znamenáme-li tedy na okamžik

$$S = \sum_{m=0}^{8} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\dots(2n+m-1)} x^m,$$

bude

$$\text{(a)} \qquad e^x \Pi(x) - \Phi(x) = \frac{S x^{2n-1}}{1.2\dots n}.$$

Toto předeslavše, předpokládejme, že pro jisté celistvé x je $e^x = \frac{B}{A}$, kde A, B jsou čísla celistvá; vložíme-li tuto hodnotu do rovnice (a), máme pro všecka n

$$B\Pi(x) - A\Phi(x) = \frac{AS . x^{2n-1}}{1.2\dots n}.$$

Jelikož x je celistvé a součinitelé funkcí $\Pi(x)$, $\Phi(x)$ rovněž jsou čísla celistvá, jsou $\Pi(x)$, $\Phi(x)$ a tedy též levá strana celistvými čísly; naproti tomu je pravá strana tak malá, jak kdo chce, je-li n dosti velké; z toho by plynulo, že tato veličina musí býti nullou, což ale nemožno, poněvadž S je řada složená z kladných členů.

Následuje pak rovněž zajímavý důkaz irracionality čísla Ludolfova π, a pokračuje se u výkladech o počtu integralném, zejmena béře se vzorec

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2}$$

za definici funkce arcus tangens pro komplexní z, a studuje povaha integrálu poblíž míst přetržitosti.

10. přednáška. Věta Laurentova. Rozklad funkcí holomorfních v nekonečné součiny. Při té příležitosti uvádí autor poznámku našeho Edvarda Weyra, uveřejněnou v Darbouxově Bulletinu, sv. XII, 1888, která obsahuje důkaz identity

$$\Pi\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi}} = \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left(1-\frac{2x}{2n\pi-\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}$$

$$(m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

jejíž obě strany vyjadřují $\cos x$.

Přednáška končí poznámkami o celistvých funkcích konečného *„rodu"* (genre), které jsou velmi zajímavé.

11. přednáška. Důkaz věty Laguerreovy:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-k^2x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Povaha jednoznačných funkcí v okolí míst podstatně zvláštních. Věta Weierstrassova a Mittag-Lefflerova.

12. přednáška. Applikace vět předešlých. Řada zlomková pro $\cot x$; vzorce

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi} = e^{x\cot a}\,\Pi\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)e^{-\frac{x}{a-n\pi}},$$

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi} = e^{-x\operatorname{tg} a}\,\Pi\left(1+\frac{2x}{2\xi-m\pi}\right)e^{-\frac{2x}{2a-m\pi}},$$

kde $m = 2n-1$, $n = o, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ a a značí stálou zcela libovolnou.

Čísla Bernoulliova; důkaz vzorce

$$\int_0^\infty x^{2n-2}\log\frac{1}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{B_n(2\pi)^{2n}}{4n(4n-1)}.$$

Pojem residuí a věta Cauchyova.

13. přednáška. Applikace vět předešlých. Vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\pi\,.\,\varepsilon}{\sqrt{AC-B^2}},\quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{pro } A>0 \\ -1 & \text{„ } A<0 \end{cases}$$

a jeho užití k odvození vzorců (Laplace a Jacobi):

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}, \text{ kde } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ -1 & \text{„} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n \, d\varphi,$$

při čemž X_n značí Legendrův polynom, součinitele to při α^n v řadě Maclaurinovské

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \ldots$$

Po té studuje se integrál

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n} . \pi$$

pro veliká n jak následuje: Do vzorce

$$J = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{n+1}},$$

zaveďme integrační proměnnou x rovnicí $1 + t^2 = e^{x^2}$, takže

$$\frac{1}{2} J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx^2} x \, dx}{\sqrt{e^{x^2} - 1}},$$

a jelikož dle vzorce Maclaurinova

$$e^{x^2} = 1 + x^2 e^{\Theta x^2}, \quad 0 < \Theta < 1,$$

$$\frac{1}{2} J = \int_0^{\infty} e^{-(n + \frac{1}{2}\Theta)x^2} dx.$$

Pro $\Theta = 0$ je pravá strana $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, pro $\Theta = 1$ pak $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}}$; hodnota $\frac{1}{2}$ J jest tudíž obsažena mezi těmato dvěma mezema, takže bude

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{n + \varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

a tedy *)

$$\frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n + \varepsilon)}}.$$

---

*) Methoda tato byla již před dvěma lety referentovi slavným učencem francouzským písemně sdělena.

Dále jsou odvozeny vzorce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx = \pi (\cot a\pi - \cot b\pi),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{1 + e^{x}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

studován integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\, \mathrm{F}(e^{x})}{\mathrm{G}(e^{x})}\, dx,$$

kde F, G jsou polynomy, a odvozena řada

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{G} + \mathrm{H}}{2} + \frac{1}{2} \Sigma \left[\mathrm{A} \cot \frac{x - a}{2} + \mathrm{A}_1 \mathrm{D}_x \cot \frac{x - a}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \mathrm{A}_n \mathrm{D}_x^n \operatorname{cotg} \frac{x - a}{2} \right],$$

kde G, H, A, $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ jsou stálé a součet se vztahuje k pólům a funkce $\Phi(x)$.

Dále dokázán pro funkce jednoznačné v jistém oboru S vzorec

$$f(x) - \Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\mathrm{F}(x) f(z)}{\mathrm{F}(z)(z - x)}\, dz,$$

kde $\Pi(x)$ jest určitá funkce celistvá, a $\mathrm{F}(x)$ značí součin $(z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} \ldots (z - l)^{\lambda}$, kde $a, b, \ldots l$ jsou obsaženy uvnitř oboru S. Viz Crelle, sv. 84.

14. přednáška. Eulerovy integrály $\Gamma(a)$, $\mathrm{B}(a, b)$; důkaz vzorců

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a + 1), \quad \mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)},$$

Schaarův důkaz vzorce

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1 + x)^{a}} \right] \frac{dx}{x},$$

dále

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{ax}}{e^{x} - 1} - \frac{e^{x}}{x} \right) dx,$$

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{ax} - e^{x}}{e^{x} - 1} - (a - 1)\, e^{x} \right] \frac{dx}{x}.$$

Po té obrací se slavný učenec ku vzorci Raabeovu

$$J = \int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx = a \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi,$$

uváděje důkaz podaný referentem v Battagliniově Giornale di Matematiche. Další úvahy jsou věnovány vzorci

$$\log \Gamma(u) - J = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{ax}}{e^x - 1} - \frac{e^{ax}}{x} + \frac{e^x}{2}\right] \frac{dx}{x}$$

a z něho odvozené sbližné hodnotě $\log \Gamma(a)$ pro veliká a, a náležejí k nejzajímavějším, jsou však příliš obsáhly, než abychom mohli na tomto místě o nich se šířiti.

15. přednáška. Rozklad $\Gamma(a) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{Q}(a)$, kde

$$\mathrm{P}(a) = \int_0^{\omega} e^{-x} x^{a-1}\, dx, \quad \mathrm{Q}(a) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx.$$

Pro $\omega = 1$ podán dle Pincherlea důkaz vzorce

$$e\mathrm{P}(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} + \ldots$$

Dále odvozen vzorec Eulerův

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)},$$

jehož důsledky jsou předmětem ostatních úvah, k nimž pojí se ještě applikace věty Mittag-Lefflerovy.

16. přednáška. Obsahuje klassické úvahy, jež slavný mathematik uveřejnil svého času v jednom listě zaslaném Mittag-Lefflerovi otištěném v Crelleově žurnálu. Vztahují se k integrálům tvaru

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{F}(t, z)}{\mathrm{G}(t, z)}\, dt,$$

kde F, G jsou funkce jednoznačné a pravidelné.

17. přednáška. Laguerreovy úvahy o integrálech dvojnásobných tvaru

$$\Phi(x) = \int\int \frac{\mathrm{F}(x, y, z)}{\mathrm{G}(x, y, z)}\, dx\, dy;$$

Tanneryova (Schröderova) řada

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \ldots,$$

jež má hodnotu 1 pro $|x| < 1$ a -1 pro $|x| > 1$.

Analogické výrazy Appellovy, Poincaréova funkce s omezeným oborem existenčním.

18. přednáška. Řešení rovnic pomocí Cauchyova integrálu.

19. přednáška. Řada Lagrangeova; rovnice Kepplerova; Laplaceova methoda vyšetření konvergenčních podmínek. Laplaceovo zobecnění řady Lagrangeovy na funkce o dvou proměnných: Mějme rovnice

$$F(x, y) \equiv x - a - \alpha\,\varphi(x, y) = 0,$$

$$G(x, y) \equiv y - b - \beta\,\psi(x, y) = 0,$$

jichž řešení buď $x = \xi$, $y = \eta$; znamenejme dále

$$\varDelta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial n},$$

pak bude za jistých podmínek

$$\frac{\Pi(\xi, \eta)}{\varDelta(\xi, \eta)} = \sum_{m, n} \frac{\alpha^m \beta^n}{m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}(\Pi\varphi^m\psi^n)}{\partial a^m \partial b^n},$$

kde psáno Π, φ, ψ místo $\Pi(a, b)$, $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$.

K tomu se pojí applikace na theorii úkonů sférických (Legendreových mnohočlenů)

$$X_n = \frac{D_x^n (x^2 - 1)^n}{2^n \,.\, n!}.$$

Velmi krásnou je následující úvaha: Položme

$$J = \int_{-1}^{1} (z^2 - 1)^n D^n \left(\frac{1}{x - z}\right) dz,$$

i obdržíme užitím zobecněné částečné integrace

$$J = X_n \log \frac{x+1}{x-1} + P_n,$$

kde P_n značí celistvou funkci stupně $n - 1$; odtud plyne, jelikož rozvoj funkce

$$\log \frac{x+1}{x-1} + \frac{P_n}{X_n} = \frac{J}{X_n},$$

dle klesajících mocností x je tvaru $\frac{\alpha_0}{x^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{x^{2n+2}} + \ldots$, že

$\frac{P_n}{X_n}$ *je sbližnou hodnotou řetězce, v nějž lze rozvinouti funkci* $\log \frac{x+1}{x-1}$.

Po této úvaze následuje rovněž elegantní důkaz skvostné věty Eisensteinovy: Jsou-li koefficienty algebraické rovnice o dvou proměnných $F(x, y) = 0$ čísla celistvá, a hoví-li této rovnici rozvoj

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots = \mathfrak{P}(x)$$

o racionalných součinitelích, pak existuje celistvé číslo k tak, aby součinitelé řady $\mathfrak{P}(kz)$ byli*) čísly celistvými.

20. přednáška. Funkce o nekonečném počtu hodnot; periody integrálů.

21. Pokračování. Periody integrálů elliptických. Laguerreova methoda k vyšetření průběhu funkcí K, K′. Methoda Goursatova.

22. Funkce elliptické; úvod. Věty addiční, rovnoběžník period. Funkce theta. Obecný tvar součtový funkcí elliptických (pomocí logarithmické derivace funkce theta prvého řádu).

23. Obecné funkce theta; funkce dvojperiodické druhého druhu. Jich rozklad v jednoduché prvky. Součinový tvar funkcí dvojperiodických druhu 1. a 2.

24 přednáška. Funkce $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$, a funkce Jacobiovy snx, cnx, dnx; obrácení elliptického integrálu prvého druhu. Arithmetická interpretace vzorce $k^2 + k'^2 = 1$, t. j.

$$(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots)^4 + (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots)^4 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4.$$

Addiční vzorce funkcí Jacobiových. Zvláště vzorec

$$k^2 sn\,x \,.\, sn\,a \,.\, sn\,(x + a) = Z(x) + Z(a) - Z(x + a)$$

$\left[\text{kde } Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]$ a jeho konsekvence.

25. přednáška. Linearná transformace. Důkaz věty, že realná část veličiny $\frac{K'}{K}$ je vždy kladná.

Applikace věty Mittag-Lefflerovy na funkci

*) Mému sluchu vzpírá se skloňovati součinitel dle vzoru jmen neživotných.

Z toho obdržíme snadno

$$py = \frac{c \sin \omega}{\cos^3 \omega}. \tag{4}$$

Z $\triangle$ *apo* plyne

$$\sin \varphi' : \cos \varphi = r : ap$$

čili

$$\sin \varphi' : \cos \varphi = r : \frac{r}{\cos \omega}$$

t. j.

$$\sin \varphi' = \cos \varphi \cos \omega. \tag{5}$$

Vložíme-li hodnoty ze (4) a (5) rovn. do (3), obdržíme

$$pz = \frac{c \cos \varphi \sin \omega}{\cos^2 \omega}. \tag{III}$$

Vyjádříme nyní ještě $\sin \omega$ a $\cos \omega$ veličinou c, r, φ a k^2. Plocha

$$\triangle ff'a = \frac{r_1 r_2 \sin \omega}{2} = cr \sin \varphi,$$

z čehož jde

$$\sin \omega = \frac{2cr \sin \varphi}{k^2}. \tag{IV}$$

Užijeme-li na $\triangle aff'$, $\triangle aof$ a $\triangle aof'$ věty Carnotovy pro strany ff', r_1 a r_2 a sečteme-li rovnice tím vzniklé, nabudeme rovnice

$$\cos \omega = \frac{r^2 - c^2}{k^2}. \tag{V}$$

Užitím rovnic I—V obdržíme z původní úměry snadno

$$\varrho = \frac{k^2}{r + \frac{c^2}{r} \cos 2\varphi},$$

kterýž výraz shoduje se s výrazem, který pro poloměr křivosti křivky Cassiniho odvodil E. Reusch.*)

---

*) „Normale und Krümmungshalbmesser des Cassinischen Ovals“ (Mathem.-naturwissenschaftliche Mitteilungen, II. B. 1889). V témž článku podává Reusch jednoduchou konstrukci středů křivosti této křivky.