Augustin Vondráček
Zobecnění věty Feuerbachovy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 8, 254--259

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122552`

Zobecnění věty Feuerbachovy.

Dr. *Aug. Vondráček.*

(Došlo 14. prosince 1933.)

1. Větu Feuerbachovu, vyslovující známou vlastnost, že kružnice devíti bodů (Eulerova) se dotýká čtyř kružnic trojúhelníku vnitř a vně vepsaných, řešil cyklograficky W. Fiedler.[1]) Na neúplnost, ba nedostatečnost postupu Fiedlerova poukázal r. 1911 E. Müller. Podrobně dokázal — rovněž úvahami cyklografickými — větu zvěčnělý profesor dr. Jan Sobotka r. 1922,[2]) posléze je řešena též v nové knize Müllerově.[3])

K zobecnění této věty vede úloha: sestrojiti kuželosečku, procházející danými dvěma (reálnými nebo sdruženě imaginárními) body M, N a daných tří přímek a, b, c se dotýkající. Už předem z analogie s kružnicemi trojúhelníku vepsanými soudíme, že úloha bude čtyřznačná, poněvadž v předložené úloze nahrazujeme jen absolutní body kruhové párem bodů M, N a musí tedy platiti i *zobecněná věta Feuerbachova*:

„*Ke čtyřem kuželosečkám k_0, k_1, k_2, k_3, procházejícím danými dvěma body M, N a majícím tři společné tečny v přímkách a, b, c, lze sestrojiti kuželosečku q, jež oněmi společnými body M, N prochází a všech čtyř kuželoseček se dotýká.*"

Touto úplnou analogií s větou Feuerbachovou lze větu právě vyslovenou považovati za dokázánu. Nicméně uvedeme samostatný ryze syntetický důkaz této věty, čímž obráceně bude dokázána znovu i věta Feuerbachova o kružnici devíti bodů; výhodou tu bude, že se touto cestou oprostíme od rozebírání vztahů metrických, jež speciální větu Feuerbachovu nutně doprovázely. Celá úloha má dvě podstatné složky, jež v následujícím uvedeme: prokázání čtyřznačnosti řešení a důkaz existence páté dotyčné kuželosečky q.

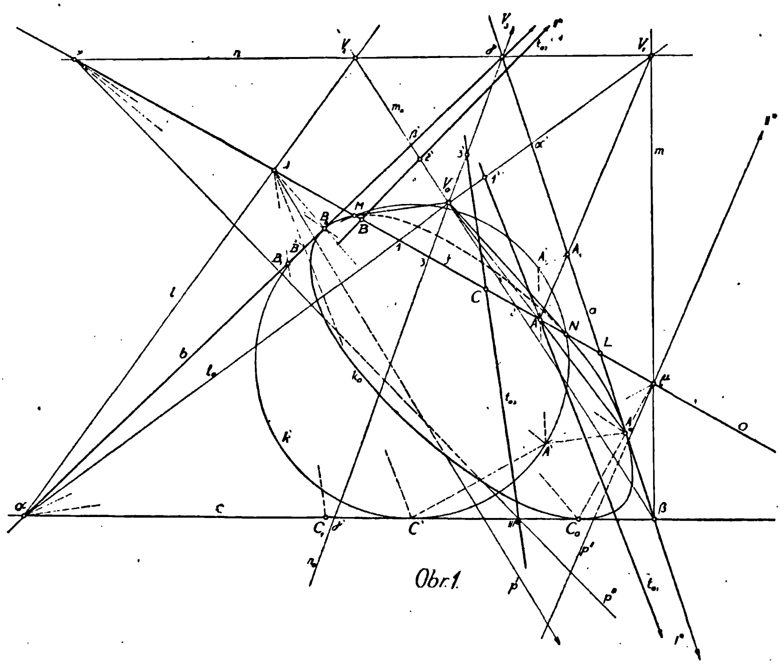
2. Buďte dány body M, N a tečny a, b, c jako určovací prvky kuželosečky (obr. 1). Tyto tečny tvoří trojúhelník o vrcholech

[1]) Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln, Lipsko 1882.

[2]) K dvěma důkazům věty Feuerbachovy, Rozpravy Čes. akademie věd a um., II. tř., roč. XXXI.

[3]) Vorlesungen über darst. Geometrie, II. sv., Die Zyklographie, 1929, odst. 35, kde uvedeny i bližší poznámky.

α, β, γ, kde $\alpha \equiv (b, c)$, $\beta \equiv (c, a)$, $\gamma \equiv (a, b)$. Zvolíme-li na tečně c bod C', určí body M, N, C' s tečnou c v C' svazek kuželoseček, z něhož dvě kuželosečky k', k'' se, jak známo, přímky b dotýkají. Buď B' dotyčným bodem kuželosečky k'; ta je s kuželosečkou hledanou ve vztahu centrické kolineace o středu kolineace ve



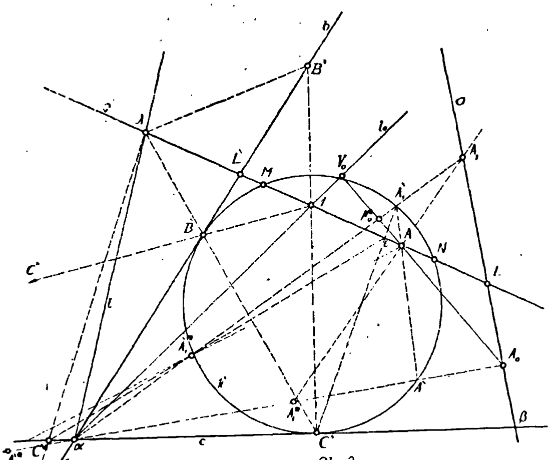
Obr. 1.

vrchole α a ose kolineační $o \equiv \overline{MN}$. Z průsečíku L třetí tečny a s o lze sestrojiti ke k' dvě tečny s dotyčnými body A', A'_1, což vede k dvěma kuželosečkám k_0, k_1 naší úlohy.

Prvá kuželosečka k_0 je s k' kolineární s párem korespondujících bodů A', A_0, kde A_0 je dotyčným bodem na a $[A_0 \equiv (\overline{\alpha A'}, a)]$, druhá k_1 pak párem A'_1, $A_1 \equiv (\overline{\alpha A'_1}, a)$ při společném kolineačním středu α a ose o. Užitím těchto kolineací snadno vyšetříme dotyčné body B_0, C_0 kuželosečky k_0, B_1, C_1 kuželosečky k_1 na tečnách b, c: $\overline{A'C'}$ protne o v bodě μ, načež $\overline{\mu A_0}$ dá na c dotyčný bod C_0, $\overline{C'B'}$ protne osu o v bodě λ, $\overline{\lambda C_0}$ určí na b dotyčný bod B_0; rovněž spojnice $\overline{A'B'}$, $\overline{A_0B_0}$ se protínají v bodě ν na o. Právě tak stanovíme dotyčné body B_1, C_1 kuželosečky k_1; $\overline{B_1C_1}$ prochází též bodem λ. Patrně všecky tři kuželosečky k', k_0, k_1, dotýkající se přímek b, c a procházející body M, N, mají společnou poláru $l_0 \equiv \alpha V_0$ bodu λ, tvořící s $l \equiv \overline{\alpha\lambda}$ vzhledem k b, c paprskovou čtveřici harmonickou; na l_0 jsou tudíž i póly V_0, V_1 spojnice $o \equiv \overline{MN}$ vzhledem ke k_0, k_1.

Druhá pomocná kuželosečka k'' užitého pomocného svazku M, N, C' s tečnou c v C', dotýkající se tečny b v B'', vede analogicky k dvěma dalším kuželosečkám k_2, k_3 naší úlohy, takže docházíme skutečně k řešení celkem čtyřznačnému.

Snadno seznáme, že uvedené odvození kuželoseček k_0, k_1, k_2, k_3 je na volbě bodu C' na c nezávislé. Řadě bodů C', C'^*, ... na c přísluší řada involucí na b, vyťatých obdobnými svazky pomocných kuželoseček; všechny tyto involuce mají patrně společný pár



Obr. 2.

α, L' ($L' \equiv b, o$) a proto ony dvojné body B', B''; B'^*, B''^*; ... těchto involucí tvoří samy involuci o dvojných bodech α, L', takže $(B'B''\alpha L') = -1$. Prochází tedy spojnice bodu C' s příslušným párem B', B'' na b jednak bodem λ, jednak průsečíkem 1 poláry l_0 s o a právě tak pro páry C', C''; C'^*, C''^*; ... na c. Tím se všecky pomocné kuželosečky rozdělují na dvě skupiny. Bodu na příkl. C'^* (obr. 2) na c přísluší v prvé skupině dotyčný bod $B'^* \equiv \equiv (b, \overline{C'^*\lambda})$ a tedy kuželosečka k'^*, jež však vede k týmž dvěma kuželosečkám k_0, k_1 naší úlohy jako výše užitá kuželosečka k'. Neboť obě pomocné kuželosečky k', k'^* jsou ve vztahu centrické kolineace pro α jako střed a o jako osu kolineační, takže $C'A'_1$, $C'^*A'_1{}^*$ se protnou v bodě ε na o, $\overline{\alpha A'_1}$ dá na $\overline{C'^*A'_1{}^*}$ bod $A'_1{}^*$. Bodu A' přísluší A'^*. Lze tedy bodu A'^* přiřaditi na a kolineací týž dotyčný bod A_0, takže kolineace s A'^* vede k téže kuželosečce k_0

a právě tak bod $A'_1{}^*$ vede k témuž bodu A_1 na a a tedy k téže kuželosečce k_1. Tím jediná čtyřznačná skupina řešení úlohy kuželosečkami k_0, k_1, k_2, k_3 prokázána.

Příslušné sobě poláry bodu L: dříve sestrojená $\overline{A'A'_1}$ ke k' a $A'^*A'_1{}^*$ ke k'^* se protnou v bodě A na o, takže $(LAMN) = -1$. Týmž bodem A procházejí i poláry $\overline{A_0A_0{}^*}$ a $\overline{A_1A_1{}^*}$ bodu L vůči k_0, k_1, obsahujíce ovšem i pól V_0 resp. V_1 osy $o \equiv \overline{MN}$ vzhledem k těmto kuželosečkám.

Polára l_0 bodu λ vůči kuželosečkám k_0, k_1 prochází, jak výše již uvedeno, póly V_0, V_1 spojnice o, takže $(ll_0bc) = -1$. Právě tak polára m_0 bodu μ vůči k_0 prochází body β, V_0, takže $(mm_0ca) = -1$, $m \equiv \overline{\beta\mu}$, polára n_0 bodu ν vzhledem ke k_0 jde body γ, V_0, $(nn_0ab) = -1$, $n \equiv \overline{\gamma\nu}$. Jako jsme shledali, že kuželosečky k_0, k_1 mají společnou poláru l_0 bodu λ tím, že jsme uvažovali pomocné kuželosečky k', ..., dotýkající se společných tečen b, c, mohli jsme užíti centrické kolineace se středem β nebo γ. Z toho, jakož i z okolnosti, že žádná ze společných tečen a, b, c resp. vrcholů α, β, γ nemá při řešení nějakého zvláštního postavení, seznáváme, že lze ony čtyři kuželosečky seskupiti ve tři skupiny na př. k_0, k_1; k_0, k_2; k_0, k_3, mající v l_0, m_0, n_0 vždy společné poláry bodů λ, μ, ν na o.

Přímky l_0, m_0, n_0 se protínají v pólu V_0 kuželosečky k_0; l_0, m, n v pólu V_1 kuželosečky k_1, l, m_0, n v pólu V_2 kuželosečky k_2; l, m, n_0 v pólu V_3 kuželosečky k_3 pro tutéž poláru o, při čemž vždy páry těchto přímek z jednoho vrcholu jsou stranami z téhož vrcholu vycházejícími harmonicky odděleny. (Analogon s osami vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníka a se středy vepsaných kružnic věty Feuerbachovy.)

3. Považujme póly V_0, V_1, V_2, V_3 za ortogonální průměty vrcholů ${}^1V_0, {}^1V_1, {}^1V_2, {}^1V_3$ kuželů K_0, K_1, K_2, K_3 o stopních kuželosečkách k_0, k_1, k_2, k_3.

Tečny a, b, c buďte stopami tečných rovin π, ϱ, σ kužele na př. K_0, protínajících se tedy v bodě ${}^1V_0$, jejž si představme třeba nad nákresnou. Kužel K_1 má s K_0 společnou tečnou rovinu π a dotýká se rovin ${}^1V_1b$, ${}^1V_1c$, kužel K_2 má s K_0 společnou tečnou rovinu ϱ a dotýká se rovin ${}^1V_2a$, ${}^1V_2c$, K_3 s K_0 má tečnou rovinu σ a dotýká se rovin ${}^1V_3a$, ${}^1V_3b$. Spojnice vrcholů $\overline{{}^1V_0{}^1V_1}$, $\overline{{}^1V_0{}^1V_2}$ $\overline{{}^1V_0{}^1V_3}$ protnou a, b, c v stopnících α', β', γ'.

Všechny čtyři kužele mají vedle těchto po dvou společných tečných rovin společnou kuželosečku ${}^1f$ v rovině ${}^1\varphi$ kolmé k nákresně nad spojnicí $\overline{MN} \equiv o$, jejímž průmětem a zároveň osou je úsečka $\overline{MN}$ sama. Neboť obrysové roviny všech těchto kuželů, kolmé k nákresně, se protínají v přímkách ${}^1m$, ${}^1n$ k nákresně kolmých, kuželů se dotýkajících a promítajících se do M, N. Mimo to mají průsečné kuželosečky ${}^1k_0$, ${}^1k_1$ kuželů K_0, K_1 s rovinou ${}^1\varphi$ společný bod ${}^1A$, jehož průmětem je výše stanovený bod A, konjugovaný s L vzhledem ke všem kuželosečkám k_0, k_1, k_2, k_3. V bodě ${}^1A$ se protínají površky $\overline{{}^1V_0A_0}$, $\overline{{}^1V_1A_1}$ obou kuželů, ležící v společné tečné rovině π.

Právě tak je ale bod ${}^1B$, jehož průmětem je bod B konjugovaný k bodu $L' \equiv (b, o)$, společným bodem průsečných kuželoseček ${}^1k_0$, ${}^1k_2$ kuželů K_0, K_2 s rovinou ${}^1\varphi$. Zřejmě tudíž ${}^1k_0 \equiv {}^1k_1 \equiv {}^1k_2 \equiv$ $\equiv {}^1k_3 \equiv {}^1f$.

Kuželosečky k_0, k_1, k_2, k_3 jsou centrálními průměty této společné kuželosečky ${}^1f$ z vrcholů ${}^1V_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) do nákresny a lze je tudíž přiléhavě označiti jako *konografické průměty* oněch vrcholů vzhledem k dané kuželosečce ${}^1f$ (případ B, δ, uvedený jako zobecnění zobrazování cyklografického v Müllerově Zyklographie, Anhang, str. 460).

Kužele K_i ($i = 0, 1, 2, 3$) o společné kuželosečce ${}^1f$ se pronikají po páru ještě v kuželosečkách. Je-li ${}^1k_{01}$ proniková kuželosečka kuželů K_0, K_1, prochází její rovina I, jak známo, bodem ${}^1I'$ na $\overline{{}^1V_0{}^1V_1}$, harmonicky odděleným bodem ${}^1I$, průsečíkem roviny ${}^1\varphi$ s $\overline{{}^1V_0{}^1V_1}$ vzhledem k vrcholům ${}^1V_0$, ${}^1V_1$ [průmět $I \equiv (MN, l_0)$, $(II'V_0V_1) = -1$]. Bod ${}^1I'$ je pólem kuželosečky ${}^1k_{01}$ vzhledem k průsečnici roviny I s rovinou ${}^1\varphi$. Poněvadž ale oba kužele K_0, K_1 se společné tečné roviny π ve výše zmíněném bodě ${}^1A$ dotýkají (dvojný bod pronikové křivky), prochází ona průsečnice tímto bodem, takže přímka ${}^1t_{01} \equiv \overline{{}^1I'{}^1A}$ je už jednou z tečen z bodu ${}^1I'$ ke ${}^1k_{01}$ (průmět $t_{01} \equiv I'A$) v rovině π.

Stejně dospějeme v společné tečné rovině ϱ kuželů K_0, K_2 k přímce ${}^1t_{02} \equiv \overline{{}^12'{}^1B}$, v rovině σ pak k přímce ${}^1t_{03} \equiv \overline{{}^13'{}^1C}$, dotýkající se kuželů K_0, K_3 [v průmětě $(22'V_0V_2) = -1$, $(33'V_0V_3) =$ $= -1$, $2 \equiv (o, m_0)$, $3 \equiv (o, n_0)$].

Roviny I, II, III kuželoseček ${}^1k_{01}$, ${}^1k_{02}$, ${}^1k_{03}$ se protnou v bodě ${}^1Q$, *o němž seznáme, že patří všem čtyřem kuželům* K_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Neboť přímku ${}^1t_{01}$ a kuželosečku ${}^1f$ lze spojiti hyperboloidem ${}^1H_{01}$ o stopní kuželosečce v nákresně, patřící svazku (k_0, k_1); plochy ${}^1H_{01}$, K_0, K_1, patřící témuž svazku, se protínají právě v kuželosečce ${}^1k_{01}$. Podobně jsme přímkami ${}^1t_{02}$, ${}^1t_{03}$ vedeni k plochám ${}^1H_{02}$, ${}^1H_{03}$.

Tyto tři plochy ${}^1H_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$), nepatří zřejmě témuž svazku, protnou se mimo ${}^1f$ ve dvou bodech, z nichž jeden ${}^1Q$ musí být incidentní s kuželosečkami ${}^1k_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$.)

Konografickým průmětem q tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce ${}^1f$ je kuželosečka, a to jediná, *jež se všech čtyř kuželoseček* k_0, k_1, k_2, k_3 *v nákresně dotýká.* Tím zobecněná věta Feuerbachova dokázána.

Généralisation du théorème de Feuerbach.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donnés deux points M, N et trois droites a, b, c, on peut construire quatre coniques k_0, k_1, k_2, k_3 passant par M, N et ayant a, b, c pour tangentes. L'auteur démontre synthétiquement l'existence d'une cinquième conique q, passant par M, N et tangente aux quatre coniques k_0, k_1, k_2, k_3.