Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Teige

Výpočet živé síly, se kterou elektron dopadá na anodu, a časového kolísání počtu elektronů dopadajících na anodu při ultrakrátkých kmitech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 8, 300--306

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122551`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1934

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Výpočet živé síly, se kterou elektron dopadá na anodu, a časového kolísání počtu elektronů dopadajících na anodu při ultrakrátkých kmitech.

Karel Teige.

(Došlo 20. března 1934.)

Některé teorie vzniku ultrakrátkých elektromagnetických kmitů pomocí elektronových lamp potřebují znáti živou sílu, se kterou dopadá elektron na anodu, a to v případě, kdy na anodě je vedle stálého, dosti vysokého napětí též malé napětí střídavé velmi vysokého kmitočtu. Uvedené teorie se spokojily toliko přibližným řešením, kdy tato živá síla je dána součinem z náboje elektronu a potenciálu anody v okamžiku dopadu elektronu na anodu. To ovšem předpokládá, že celá dráha elektronu se děje ve statickém poli uvnitř lampy, že tedy doba dráhy elektronu mezi katodou resp. mřížkou a anodou je velmi krátká proti době kmitů střídavého napětí anodového. Tento předpoklad však při vznikajících kmitech v lampě není splněn.

Je proto úlohou této práce odvoditi přesný výraz pro dopadovou energii elektronu na anodu a ukázati pak z tohoto přesného vzorce, jaké je přiblížení těch teorií, které tuto energii určují toliko potenciálem anody v okamžiku dopadu elektronu.

Ovšem ani náš výpočet nebude úplně obecný, poněvadž ten naráží na nepřekonatelné matematické potíže. My musíme se spokojiti s těmito zjednodušujícími předpoklady:

1. elektronovou lampu si nahradíme dvěma rovinnými elektrodami o vzájemné vzdálenosti a,

2. mezi těmito elektrodami vedle stálého dosti vysokého napětí V máme ještě střídavé napětí $E_0 \sin \omega (t + \varphi)$, při čemž E_0 je tak malé, že jeho čtverec zanedbáme při výpočtech. Při tom φ značí čas, kdy elektron opustí první elektrodu a směrem osy X letí ke druhé elektrodě.

Výpočet sám provedeme pak pro tyto dva různé případy:

a) Elektron opustí první elektrodu s rychlostí nulovou. (To je případ lampy o dvou elektrodách.)

b) Elektron opustí první elektrodu s konečnou rychlostí. (To je případ lampy s mřížkou, kdy periodická síla je mezi mřížkou a anodou, a kdy první elektroda je vlastně mřížka, kterou proletí elektron s rychlostí získanou stálým napětím mezi katodou a mřížkou.)

Případ a). Elektron opustí první elektrodu s nulovou rychlostí.

Je-li m hmota elektronu, e jeho náboj, a vzdálenost obou elektrod, bude rovnice diferenciální pro pohyb elektronu míti tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{a} [V + E_0 \sin \omega (t + \varphi)]. \tag{I}$$

První elektrodu $x = 0$ opouští elektron v čase $t = 0$ s rychlostí $\frac{dx}{dt} = 0$. Tedy integrál uvedené rovnice musí v čase $t = 0$ vyhovovati podmínkám $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Takový integrál je

$$x = \frac{E_0 e}{am\omega} \left[\frac{\sin \omega\varphi}{\omega} + t \cos \omega\varphi - \frac{\sin \omega (t + \varphi)}{\omega}\right] + \frac{1}{2} \frac{e}{am} Vt^2. \tag{II}$$

Zavedeme-li zkratky

$$\frac{eE}{am\omega} = \eta, \quad \frac{eV}{am} = \zeta,$$

je

$$x = \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t + \varphi)\right] + \tfrac{1}{2}\zeta t^2, \tag{IIa}$$

odkud

$$\frac{dx}{dt} = \eta [\cos \omega\varphi - \cos \omega (t + \varphi)] + \zeta t.$$

Při zanedbání druhých mocností malé veličiny η dostaneme pro čtverec rychlosti, se kterou elektron dopadá na anodu, výraz, kde t_a značí dobu, za kterou elektron urazí dráhu mezi elektrodami

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\eta\zeta t_a [\cos \omega\varphi - \cos \omega (t_a + \varphi)] + \zeta^2 t_a^2.$$

Doba t_a je určena rovnicí

$$a = \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t_a \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_a + \varphi)\right] + \tfrac{1}{2}\zeta t_a^2. \tag{III}$$

Je-li, jak předpokládáme, E_0 velmi malé proti V, tu možno přibližně položiti

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 \eta. \tag{IV}$$

Z rovnice (III) pro derivaci doby t_a podle η dostáváme

$$\frac{1}{\omega}\sin\omega\varphi + t_0\cos\omega\varphi - \frac{1}{\omega}\sin\omega\,(t_0+\varphi) + \xi t_0\left(\frac{\partial t_a}{\partial\eta}\right)_0 = 0,$$

odkud

$$\left(\frac{\partial t_a}{\partial\eta}\right)_0 = -\frac{1}{\zeta t_0}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega\varphi + t_0\cos\omega\varphi - \frac{1}{\omega}\sin\omega\,(t_0+\varphi)\right]. \qquad \text{(V)}$$

Podobně substitucí (IV) výraz pro čtverec rychlosti dopadajícího elektronu dostane tvar

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\eta\zeta t_0\,[\cos\omega\varphi - \cos\omega\,(t_0+\varphi)] + \zeta^2\left[t_0^2 + 2t_0\left(\frac{\partial t_a}{\partial\eta}\right)_0\eta\right] =$$

$$= \zeta^2 t_0^2 + 2\eta\zeta t_0\left[\zeta\left(\frac{\partial t_a}{\partial\eta}\right)_0 + \cos\omega\varphi - \cos\omega\,(t_0+\varphi)\right]. \qquad \text{(VI)}$$

Jelikož pak t_0 je určeno rovnicí

$$a = \tfrac{1}{2}\zeta t_0^2,$$

je

$$t_0 = \sqrt{\frac{2a}{\zeta}} = \sqrt{\frac{2a^2m}{eV}}$$

Dosazením této hodnoty jakož i výrazů za η a ζ do rovnice pro $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$ dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{e^2V^2}{a^2m^2}\frac{2a^2m}{eV} + 2\frac{e^2}{a^2m^2}\frac{EV}{\omega}\sqrt{\frac{2a^2m}{eV}}\,\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{t_0\omega}\sin\omega\varphi - \cos\omega\varphi + \frac{1}{t_0\omega}\sin\omega\,(t_0+\varphi) + \right.$$

$$\left. + \cos\omega\varphi - \cos\omega\,(t_0+\varphi)\right] = 2\frac{eV}{m} + 2\sqrt{2}\,\frac{e\sqrt{e}}{m\sqrt{m}}\frac{E\sqrt{V}}{a\omega}\,\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\omega t_0}[\sin\omega\,(t_0+\varphi) - \sin\omega\varphi] - \cos\omega\,(t_0+\varphi)\right].$$

Tím pro živou sílu dopadajícího elektronu na anodu dostáváme definitivně

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_a^2 = eV + \sqrt{2}\,\frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}}\frac{\sqrt{V}E}{\omega a}\left[\frac{1}{\omega t_0}(\sin\omega\,(t_0+\varphi) - \sin\omega\varphi) - \right.$$

$$\left. - \cos\omega\,(t_0+\varphi)\right]. \qquad \text{(VII)}$$

Rozvinutím výrazu v závorce v nekonečnou řadu, dostáváme

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_a^2 = eV + \sqrt{2}\,\frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}}\,\frac{\sqrt{VE}}{a\omega}\left\{\cos\omega\varphi\left[\frac{2}{3!}(\omega t_0)^2 - \frac{4}{5!}(\omega t_0)^4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{6}{7!}(\omega t_0)^6 - \ldots\right] + \sin\omega\varphi\left[\frac{1}{2!}\omega t_0 - \frac{3}{4!}(\omega t_0)^3 + \frac{5}{6!}(\omega t_0)^5 - \ldots\right]\right\}. \tag{VIII}$$

Z uvedeného vzorce je patrno, že vypočtená živá síla je jednoznačně určena potenciálem anody jenom tehdy, když možno druhé a vyšší mocnosti veličiny ωt_0 zanedbati. Tu je totiž

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_a^2 = eV + \sqrt{2}\,\frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}}\,\frac{\sqrt{VE}}{a\omega}\,.\,\tfrac{1}{2}\omega t_0 \sin\omega\varphi =$$

$$= eV + \sqrt{2}\,\frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}}\,.\,\frac{\sqrt{VE}}{a\,.\,2}\,.\,\sqrt{\frac{2a^2m}{eV}}\sin\omega\varphi = eV + eE\sin\omega\varphi.$$

Případ *b*). Elektron opustí první elektrodu s konečnou rychlostí v_0.

V tomto případě nutno najíti takový integrál rovnice (I), který pro $t = 0$ vyhovuje podmínkám

$$x = 0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0.$$

Tento integrál jest

$$x = v_0 t + \eta\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega\varphi + t\cos\omega\varphi - \frac{1}{\omega}\sin\omega(t+\varphi)\right] + \tfrac{1}{2}\zeta t^2.$$

Odtud máme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \eta\left[\cos\omega\varphi - \cos\omega(t+\varphi)\right] + \zeta t.$$

Povýšením tohoto výrazu na druhou, při čemž čtverec η^2 zanedbáme, je dále

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = (v_0 + \zeta t_a)^2 + 2(\zeta t_a + v_0)\,\eta\left[\cos\omega\varphi - \cos\omega(t_a+\varphi)\right].$$

Čas, který potřebuje elektron, aby od první elektrody dospěl ke druhé, je dán rovnicí

$$a = v_0 t_a + \eta\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega\varphi + t_a\cos\omega\varphi - \frac{1}{\omega}\sin\omega(t_a+\varphi)\right] + \tfrac{1}{2}\zeta t_a^2.$$

Klademe-li zase

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 \eta, \tag{IV}$$

máme derivováním výše uvedené rovnice vztah

$$v_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t_0 \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega\,(t_0 + \varphi) +$$
$$+ \zeta t_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 = 0,$$

odkud je

$$\left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 = -\frac{1}{\zeta t_0 + v_0}\left[\frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t_0 \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega\,(t_0 + \varphi)\right].$$

Podobně zavedením substituce (IV) do rovnice pro čtverec rychlosti dopadajícího elektronu na anodu dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\eta\,(\zeta t_0 + v_0)\,[\cos \omega\varphi - \cos \omega\,(t_0 + \varphi)] + (v_0 + \zeta t_0)^2 +$$
$$+ 2\zeta\,(v_0 + \zeta t_0) \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 . \eta =$$
$$= (v_0 + \zeta t_0)^2 + 2\eta\,(\zeta t_0 + v_0)\left[\zeta \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 + \cos \omega\varphi - \cos \omega\,(t_0 + \varphi)\right],$$

při čemž doba t_0 je dána rovnicí

$$a = v_0 t_0 + \tfrac{1}{2}\zeta t_0^2.$$

Nyní tento výsledek budeme aplikovati na elektronovou lampu, a to na pohyb elektronu mezi mřížkou a anodou. Napětí katody položme rovno nule, napětí mřížky označme V_g a stálé napětí anody V_a. Tu je jasno, že

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_g}{m}}, \quad v_0 + \zeta t_0 = \sqrt{\frac{2eV_a}{m}}, \quad V = V_a - V_g.$$

Tím dostáváme definitivně výraz pro živou sílu dopadajícího elektronu na anodu

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = eV_a + \frac{eE}{a\omega} \cdot \sqrt{\frac{2eV_a}{m}}\left[-\frac{1}{t_0^1\omega} \sin \omega\varphi - \frac{t_0}{t_0^1} \cos \omega\varphi +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{t_0^1\omega} \sin \omega\,(t_0 + \varphi) + \cos \omega\varphi - \cos \omega\,(t_0 + \varphi)\right] \tag{VIII'}$$

$$\text{kde } t_0^1 = t_0 + \frac{v_0}{\zeta}.$$

Tento výraz pro $v_0 = 0$ přechází ve výraz uvedený pro *a*.)

Dosud řešili jsme případ, jak periodicky měnící se EMS. mezi elektrodami působí na živou sílu dopadajícího jediného elektronu na anodu. Avšak v elektronových lampách nemáme co činiti s jedním elektronem, nýbrž s mnoha elektrony. Abychom pak znali celkovou živou sílu všech dopadajících elektronů, nutno znáti ještě, jak uvedená periodická EMS. působí časové kolísání v počtu elektronů dopadajících na anodu. Tuto úlohu budeme nyní řešiti.

Z prvé elektrody vycházejí elektrony zcela stejnoměrně. To značí, že v čase $d\varphi$ vyjde z této elektrody počet elektronů $N\,d\varphi$. Ty elektrony, které vyšly na počátku intervalu $d\varphi$, dopadnou na anodu v čase

$$\varphi + t_a.$$

ty pak, které vyšly na konci intervalu $d\varphi$, dopadnou na anodu v čase

$$\varphi + t_a + d\varphi + \frac{\partial t_a}{\partial \varphi}\, d\varphi = \varphi + d\varphi + t_a^1.$$

Jelikož podle vztahu (IV) je

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta}\right)_0 \eta,$$

máme odtud

$$\varphi + d\varphi + t_a^1 = \varphi + t_a + d\varphi + \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi}\, \eta\, d\varphi.$$

Tím pak počet elektronů, které v době $d\varphi$ mezi časy $\varphi + t_a$ a $\varphi + d\varphi + t_a$ dopadnou na anodu, bude

$$N\,d\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi + \eta \dfrac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi}\, d\varphi} = \frac{N\,d\varphi}{1 + \dfrac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi} \cdot \eta} = N\left[1 - \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi}\, \eta\right] d\varphi.$$

To je rovno dále

$$d\varphi \,.\, N\,\{1 + K\,[\cos \omega\varphi - t_0 \omega \sin \omega\varphi + \cos \omega\,(t_0 + \varphi)]\},$$

kde

$$K = \frac{\eta}{\zeta t_0 + v_0} = \frac{\dot{E}}{a\omega} \sqrt{\frac{e}{2m V_a}}.$$

Periodickou část možno upraviti na tento tvar

$$d\varphi \,.\, NK \sqrt{2 + 2 \cos \omega t_0 + 2\omega t_0 \sin \omega t_0 + \omega^2 t_0^2}\;.$$
$$\cdot \sin\left(\omega\varphi - \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + \cos \omega t_0}{\omega t_0 + \sin \omega t_0}\right). \qquad \text{(IX)}$$

Le calcul de l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode, et l'oscillation temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode dans le cas des oscillations ultracourtes.

(Extrait de l'article précédent.)

On calcule l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode de la lampe électronique, s'il y a entre les électrodes une différence potentielle, qui se compose d'un assez grand potentiel constant (l'anode negative) et d'un petit pontentiel oscillant. Le calcul est exécuté pour le cas de deux (la formule VII. resp. VIII.) et pour celui de trois électrodes. Dans le dernier cas la différence oscillatoire se trouve entre la grille et l'anode (la formule VIII). Enfin il est calculé l'influence de la différence oscillatoire sur la distribution temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode (formule IX').