Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Odstrčil

Nový spůsob, jak se mohou vypočítati kořeny číselných rovnic druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 2, 102--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122539

$$n\,l\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1) > 0.$$

Daná řada nekonečná

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

tedy konverguje, je-li rozdíl

$$n\,l\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1)$$

positivní, v případě opačném diverguje.

Rovná-li se však rozdíl tento nulle, je konvergence i divergence nerozhodnuta, a závisí na označení rozdílu

$$n\,l\,n\,ll\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\,l\,(n+1)\,ll\,(n+1);$$

je-li výraz tento positivní, konverguje, v případě opačném diverguje. Vyhledávání dalších kriterií v nerozhodných případech je tím patrno.

Tím je souvislost jednoduchých kriterií dovozená, a co se tkne složitých kriterií, z nichž jedno zde uvedeno, o tom pojednáme budoucně.

Nový spůsob, jak se mohou vypočítati kořeny číselných rovnic druhého stupně.

Sepsal

Dr. J. Odstrčil, gymn. prof. v Těšíně.

Spůsob, kterým se odmocnina druhá a třetí vypočítati dá, může taktéž sloužiti k vypočítání kořenů rovnic druhého a třetího stupně.

A. Rovnice druhého stupně.

Tvar rovnic kvadratických jest

$$x^2 + Ax = B.$$

1. Jsou-li součinitelé A a B čísla positivní, snadno se pozná, že rovnice má positivní kořen.

Rovnici tu možná vyjádřiti tvarem

$$B : (x + A) = x,$$

což značí, že se kořen vypočítati dá dělením, při čemž ale dělitel sám úplně znám není.

Snadno se určí první číslice podílu, totiž číslice taková, kterouž byv násoben dělitel dá násobu, jenž menší jest než B, kdežto by číslice o jednotku větší dala násobu větší než B; číslice tato budiž a; *) násobíme-li dělitele (postavivše v něm a na místo x) a odpočítáme-li násobu od dělence, obdržíme zbytek Z_1. Zbytek tento ukazuje, že kořen a není úplný, nýbrž doplňku jakéhosi zapotřebí má, kterýž jsa m tak se zvoliti musí, aby násoba

$$[(a+m)+A](a+m)$$

se rovnala B, aneb aby bylo

$$B = a^2 + Aa + (A+2a)m + m^2,$$

z čehož následuje

$$Z_1 : [(A+2a)+m] = m.$$

Doplněk obdrží se tedy zase dělením. Dělenec jest dřívější zbytek, dělitel jest součinitel A zvětšen o $2a$ a o neznámý doplněk m sám.

Při obyčejném dělení řídíme se (určujíce číslici kteroukoliv podílu první nebo první a druhou) číslicí dělitele a následujícím násobením se o její pravdivosti přesvědčujeme. Tak i zde; známý díl dělitele $A+2a$ musí vyššího řádu býti nežli druhý díl neznámý m; obdržíme tedy číslici první doplňku m_1 dělíce $Z_1 : (A+2a)$, a násobením dělitele číslicí tak nalezenou přesvědčíme se o správnosti její. Dá-li se násoba ta odčítati a

*) Abychom bez velkého zkoušení určili první číslici kořene, rozdělíme B na třídy o dvou číslicích a sice počítajíc od tečky desetinné. Jest-li odmocnina druhá první (levé) třídy vyššího řádu než A, určí se číslice tato jako číslice první při odmocňování dvěma; kdyby však A mnohem vyššího řádu bylo, určí se a dělením. Ku př.

a) $45{,}67{,}89{,}01 : (x+8) = 6\ldots$

Zde jest druhá odmocnina první třídy (45) řádu čtvrtého vyšší než 8 (A); první číslice jest $\sqrt{45}$.

b) $23{,}45{,}79 : (45859 + x) = 5\cdot\ldots$

Zde jest odmocnina druhá z první třídy (23) nižšího řádu než 45859; pročež se určí číslice první kořene dělením:

c) $29{,}85{,}67 : (312 + x) = 4\ldots$

Zde se rovná řád odmocniny z 29 řádu součinitele 312 (A), zkoušením obdržíme tedy $a = 4$; nebo

$$(3+5).5 > 29;\ (3+4)4 < 29.$$

jestli zbytek z_2 menší jest než dělitel $(A+2a+m_1)$, byla číslice m_1 správně určena.

Abychom našli číslici druhou m_2 doplňku, budeme děliti Z_2 novým dělitelem, který se z dřívějšího udá, když v tomto položíme $a+m_2$ na místo a; tedy

$$Z_2 : [(A+2a+2m_1)+m_2] = m_2 .$$

Tím spůsobem může se dále pokračovati, až některý zbytek $Z_{(n)}$ se udá býti roveň 0 aneb až libovolně malý jest; v prvním případě jest kořen racionalní, v druhém irracionalní.

Příklad. Má-li se tímto spůsobem ustanoviti positivní kořen rovnice

$$x^2+12x=100,$$

obdržíme podlé postupu právě vyloženého

$$\begin{array}{r l}
100 & : (12+x) = x = 5{\cdot}6619 \\
60 & \\
25 & \\
\hline
1500\ ^{*)} & : 22+m_1 \\
132 & \quad\quad 0{\cdot}6 \\
36 & \\
\hline
14400 & : 23{\cdot}2+m_2 \\
1392 & \quad\quad 0{\cdot}06 \\
36 & \\
\hline
44400 & : 23{\cdot}32+m_3 \\
2332 & \quad\quad 0{\cdot}001 \\
1 & \\
\hline
2107900 & : 23{\cdot}322+m_4 \\
209898 & \quad\quad 0{\cdot}0009 \\
81 & \\
\hline
8839 &
\end{array}$$

atd. anebo stručněji

*) Prvním 0 se přivěší, aby se jednotky proměnily v desetiny, druhá, aby se i druhý sčitanec pohodlně odčítati mohl.

$$
\begin{array}{ll}
100 & :(12+x)=x=5{\cdot}6619 \\
150|\underline{0} & :22{\cdot}6 \\
14\,40|\underline{0} & :23{\cdot}26 \\
4440|\underline{0} & :23321 \\
210790|\underline{0} & :233229 \\
8839 & :233238 \\
 & \text{atd.}
\end{array}
$$

Na příkladu tom vidíme, že počítání v tom pořádku se vede, dle kterého se dvěma odmocňuje. Rozdíl jest jen v tom, že první číslici zkoušením hledati třeba, a pak že následující dělitel není dvojnásobný již nalezený díl kořene, nýbrž že se ještě zvětšiti musí součinitelem neznámého x v rovnici.

Abychom se druhého kořene dopídili, rozpomeňme se, že když libovolná rovnice druhého stupně

$$x^2 + Ax = B$$

kořen p má, ona také kořen $-(A+p)$ míti musí.

Neb jestli

$$p^2 + Ap = B,$$

jest také, jak patrno,

$$[-(A+p)]^2 + A[-(A+p)] = B.$$

Připojíme-li tedy k součtu $(A+p)$ (děliteli) opačné znamení, obdržíme kořen druhý $q = -(A+p)$, z čehož následuje, že, jak známo

$$q+p = -A;\ qp = -B.$$

Druhý kořen předešlé rovnice jest tedy

$$-(12+5{\cdot}6619\ldots) = -17{\cdot}6619\ldots$$

Druhý příklad. Má se řešiti rovnice

$$x^2 + 4198\,x = 531483$$

anebo

$$53{,}14{,}83 : (4198+x) = x = 1.$$

Zde znamená první číslice (dělením nalezená) stovky, třeba ji tedy v děliteli postaviti pod stovky

$$
\begin{array}{l}
531483 : (4198 + x) = x = 123 \\
\underline{\begin{array}{ll}4198 & 1 \\ 1 & \end{array}} \\
10168 : 4398 \\
\underline{\begin{array}{ll}8796 & 2 \\ 4 & \end{array}} \\
13323 : 4438 \\
\underline{\begin{array}{ll}13314 & 3 \\ 9 & \end{array}} \\
0
\end{array}
$$

Druhý kořen jest $-(4198 + 123) = -4321$.

2. Máme-li kořeny jen v obmezeném počtu decimalek (neb jakýchkoliv míst) vyvinouti, dá se upotřebiti dělení zkráceného, kteréž v tom se zakládá, že dělence a dělitele obmezíme a v mezích jejich počítání vykonáme.

Pri obmezení dělence budeme se říditi následujícím pravidlem:

Zjednáme si první zbytek a příslušného dělitele a půjdeme od číslice k číslici zbytku, až přijdeme k oné, která dělitelem dělena poslední žádanou číslici dá, načež všechny ostatní se čarou oddělí.

Při obmezování dělitele dva případy rozeznávati třeba podlé místa, pod které nejvyšší číslice kořene v děliteli patří.

a) Jestli se před tímto místem v děliteli tolik platících číslic nalezá, kolik se jich v kořenu vyžaduje, odtrhnou se čarou a celá operace jest čisté dělení.*)

b) Jestli se jich ale nedostává, jde se dále v děliteli, až se přijde k číslici, jejíž druhá mocnina jest nižšího řádu než ponechaná poslední číslice dělence; tato číslice a následující se odtrhnou.

Př. 1. Mají-li se takto vypočítati kořeny rovnice

$$x^2 + 3456{\cdot}7898\, x = 5{\cdot}79468$$

v šesti decimalkách, převeďme ji napřed na tvar

$$5{\cdot}79468 : (3456{\cdot}7898 + x) = x = 0{\cdot}001.$$

*) V tomto případě dá se hned B považovati za dělence.

Zde okamžitě viděti lze, že x mnohem menší než A býti musí, že tedy zde převládati bude dělení; 5 jednotek děleno na tisíce dá tisíciny; 7 desetin dá čtvrtou, 9 pak pátou, 4 šestou decimalku; všechna ostatní místa dělence se odtrhnou. V děliteli patří první číslice kořene pod tisíciny (9), před kterýmiž dostatečné množství platících číslic se nalezá, pročež se ponechají 4 a ostatní se odtrhnou. Máme tedy

5·794	68 : (3 4 5 6·	7898 + x) = x = 0·001676.
2 337		
263		
21		
1		

Arci by se státi mohlo, že nalezená takto číslice poslední jistá by nebyla. Proto třeba o jedno místo více vypočísti, nežli se žádá.

Druhý kořen jest

$$-(3456{\cdot}7898 + 0{\cdot}001676) = -3456{\cdot}791476\,..$$

Př. 2. Kořeny rovnice

$$x^2 + 2008x = 8994321$$

mají se ve čtyrech decimalkách vyvinouti. Tu bude

$$\begin{array}{l} 8{,}9\,9{,}4\,3{,}2\,1 : (2008 + x) = x = 2 \\ 4\,0\,1\,6 \qquad 2 \\ 4 \\ \hline \quad 9\,7\,8\,3\,2\,1{\cdot}0 : 6008. \end{array}$$

V tomto zbytku obdržíme z první číslice (9) stovky, z druhé (7) desítky atd., z přivěšené 0 tedy čtvrtou decimalku.

Mocnina druhá číslice první v děliteli jsou desítky tisíců, čtvrté číslice (8) jsou jednotky, kdyby následovaly ještě jiné číslice, musely by se odtrhnouti, poněvadž jejich mocnina druhá by již nižšího řádu byla, než ponechané číslice v dělenci.

Máme dále:

```
8994321  : (2008 + x) = 2158·6471 . .
4016        2
4
---------
 978321·0 | : 6008  |
 6008     |     1   |
  1       |         |
 -------  |         |
 36752    | : 6208  |
 31040    |     5   |
   25     |         |
 -------  |         |
  54621   | : 6308  |
  50464   |     8   |
     64   |         |
 -------  |         |
   40930  | : 6324  |
   37944  |         |6
       4  |         |
 -------  |         |
    2982  | : 6|3|2|5 |*)
     452
      10
       4
```

Druhý kořen jest

$$-(2008 + 2158{\cdot}6471) = -4166{\cdot}6471\,.$$

Př. 3. Mají se kořeny rovnice

$$x^2 + 5x = 8994321056$$

vypočítati do jednotek.

```
89,94,32,10,56 : (x + 5) = 9 . . .
81 00 45            90005
--------------
 8 93 87          : 180005
```

První číslice zbytku dá tisíce, druhá sta, třetí desítky, čtvrtá jednotky. Zkrácený dělenec končí osmičkou, která sta tisíců znamená; první levá 0 dá v druhé odmocnině miliony, druhá stotisíce, druhé tedy není zapotřebí. Máme tedy:

---

*) Poněvadž se v dělenci nic více nepřivěsilo, odtrhne se poslední číslice dělitele; další počítání jest jednoduché zkrácené dělení.

$$
\begin{array}{lll}
8994321056 & : (x + 5) = 94836 & \\
810045 & \quad 90000 & \\
\hline
8938|7 & : 180 & |005 \\
720 & \quad\;\; 4 & \\
16 & & \\
\hline
1578 & : 188 & \\
1504 & & 8 \\
6 & & \\
\hline
68 & : 189 & \\
11 & & \\
0 & &
\end{array}
$$

3. Rovnice tvaru

$$x^2 - Ax = B$$

dává na jevo, že má kořen negativní. Napíšeme-li ji v podobě dělení, první i každý následující dělitel a každá číslice podílu negativní zůstane, pročež se počítání úplně tak vede, jako v předešlém případě. Na příklad budiž zde řešena rovnice

$$x^2 - 12x = 100.$$

Tu obdržíme podlé předešlého postupu

$$
\begin{array}{lll}
100 & : (-12 + x) = -5{\cdot}6619 & \\
60 & \quad -5 & \\
25 & & \\
\hline
150|0 & : -22 & \\
132 & \quad 0{\cdot}6 & \\
36 & & \\
\hline
1440|0 & : -23{\cdot}2 & \\
1392 & \quad 0{\cdot}06 & \\
36 & & \\
\hline
4440|0 & : 23{\cdot}32 & \\
2332 & \quad 1 & \\
1 & & \\
\hline
210790|0 & : 21{\cdot}322 & \\
209898 & \quad 9 & \\
81 & & \\
\hline
8839 & : 23{\cdot}3238 &
\end{array}
$$

Vyvinuvše více číslic kořene úplným počítáním, můžeme pak zkráceným dělením tolik číslic bez jedné správně dobýti, kolik jistých číslic dělitel již má; na př. zde má dělitel pět jistých číslic, můžeme tedy úplně správně 4 číslice kořene zkráceným dělením obdržeti. Máme tedy přesněji a stručněji:

$$
\begin{array}{rl}
100 & : (-12 + x) = -5\cdot66190379\,.. \\
 & \;\;-5 \\
\hline
150|0 & : 226 \\
1440|0 & : 2326 \\
4440|0 & : 23321 \\
210790|0 & : 233229 \\
8839 & : 23|3|2|3|8 \\
1842 & \\
210 & \\
0 &
\end{array}
$$

Druhý kořen jest

$$- (-12 - 5\cdot66190379\,..) = + 17\cdot66190379\,..$$

4. Napíšeme-li rovnici druhého stupně

$$x^2 - Ax = - B$$

v podobě dělení

$$- B : (-A + x) = x,$$

vidíme okamžitě, že kořen nemůže negativní býti. Jestli však rovnice tato positivní kořen má čili nic, závisí na tom, jak velké B a A jest. Jisto jest, že kořen menší býti musí než A, aby dělitel zůstal negativní.

Násoba dělitele a podílu známá jest, totiž

$$- B = - (A - x) x \quad \text{nebo} \quad B = (A - x) x.$$

Součet obou činitelů jest A. Ale ze dvou positivních činitelů, jejichžto součet předepsán jest, nedá se libovolná násoba utvořiti. Největší násoba se obdrží, když oba činitelové rovni jsou $\quad A - x = x$, tedy $x = {}^1\!/_2 A$.

Největší násoba jest pak ${}^1\!/_4 A^2$.

Každá jiná násoba, když jeden činitel větší, druhý menší jest než ${}^1\!/_2 A$, obnáší méně než ${}^1\!/_4 A^2$.

Následovně nedá se rovnice řešiti v celých neb negativních číslech, když B větší jest než ${}^1\!/_4 A^2$; kořeny pak jsou imaginární.

a) Rovná-li se

$$B = {}^1\!/_4 A^2,$$

rovná se jeden i druhý činitel ${}^1\!/_2 A$ a rovnice má dva stejné kořeny.

b) Jestli $B < \frac{1}{4}A^2$
jest jeden činitel větší, druhý menší než $\frac{1}{2}A$.

Budiž x větším činitelem; určíme-li jeho počáteční číslici tak, aby v dělenci zůstal nejmenší positivní zbytek, bude každý zvláštní dělenec a dělitel positivní (nebo $2a$ jest větší než A) a proto také doplněk kořene. Počítání bude totožné s počítáním v prvních případech.

Příklad. Uvedeme-li rovnici

$$x^2 - 12x = -30$$

napřed na tvar známý, bude

$$\begin{array}{rl}
-30 & : (-12 + x) = x = +8{\cdot}449\ldots^{*)} \\
\mp 32 & : \quad +8 \\
\hline
+20|0 & : \quad +4 \\
16 & \quad\;\; 0{\cdot}4 \\
16 & \\
\hline
240|0 & : \quad 48 \\
192 & \quad\;\; 4 \\
16 & \\
\hline
4640|0 & : \quad 488 \\
4392 & \quad\;\; 9 \\
81 & \\
\hline
23990|0 & : \quad 4898 \\
\end{array}$$

atd.

anebo přesněji a stručněji:

$$\begin{array}{rl}
-20 & : (-12 + x) = x = 8{\cdot}4494897\ldots \\
\mp 32 & \quad +8 \\
\hline
20|0 & : 44 \\
240|0 & : 484 \\
4640|0 & : 4889 \\
23990|0 & : 48984 \\
43964 & : 48|9|8|8 \\
4774 & \\
366 & \\
24 & \\
\end{array}$$

Ostatní tři číslice se zkráceným dělením obdržely.

---

*) Podotknouti užitečno jest, že $\frac{1}{2}A < x < A$.

5. Podobnými úvahami se přesvědčíme, že rovnice

$$x^2 + Ax = -B$$

má dva kořeny negativní, jestli

$$B < {}^1\!/_4 A^2.$$

Abychom vypočítali kořen, který jest větší než ${}^1\!/_2 A$, určíme první jeho číslici tak, abychom obdrželi positivní a co nejmenší zbytek první, jakož se pozná z příkladů těchto:

Př. 1. $x^2 + 12x = -30$

$$\begin{array}{rl}
-30 & : (+12 + x) = x = -8{\cdot}4494\,.. \\
\mp 32 & \quad -8 \\
\hline
+200 & : \; -44 \\
2400 & : \; -484 \\
46400 & : \; -4889 \\
239900 & : \; -48984 \\
43964 & : \; -48988 \\
& \quad \text{atd.}
\end{array}$$

Druhý kořen jest $-(12 - 8{\cdot}4494\,..) = -3{\cdot}5506\,..$

Př. 2. $x^2 + 88888x = -1534772992.$

Jelikož ${}^1\!/_2 A > 40000$ a

$${}^1\!/_4 A^2 > 1600000000 > 1534772992,$$

jsou kořeny realní. Větší kořen jest větší než 40000, jeho první číslice by mohla býti 4, 5, 6, 7. Číslice 6 dá nejmenší positivní zbytek.

$$\begin{array}{rl}
-1534772992 & : (88888 + x) = -65432 \\
-1733280000 & \quad \begin{array}{r} -60000 \\ \hline +28888 \end{array} \\
+ & \\
\hline
198507008 & : \begin{array}{r} -120000 \\ 88888 \\ \hline 31112 \end{array} \\
155560 & \\
25 & \quad 5 \\
\hline
179470 & : 41112 \\
166048 & \quad 4 \\
\hline
134220 & : 41912 \\
125826 & \quad 3 \\
\hline
83948 & : 41972 \\
83948 & \quad 2 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Kořen jest tudíž racionalní; druhý jest

$$-(88888-65432)=-23456.$$

Př. 3. $$x^2+5555x=-7405926$$

$$-7405926:(5555+x)=-3333$$

$$\begin{array}{rl}
+7665000 & \frac{3000}{2555} \\
\hline
259074: & \frac{6000}{5551} \\
1335 & 445 \\
9 & 3 \\
\hline
3557 & :1045 \\
3225 & 3 \\
\hline
3324 & :1105 \\
3324 & 3 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Druhý kořen jest $-(5555-3333)=-2222$.

Mohou se tedy kořeny rovnic druhého stupně vypočítati úkonem, který se úplně podobá odmocňování čísel. A podobně možná určiti realní kořeny rovnic stupně třetího, o čemž později.

List Descartův.

Podává

August Kolářík.

V theorii křivek vyšších stupňů, jak ji moderní analytická i synthetická theorie zbudovala, mají zvláštní důležitost křivky racionální čili unicursální. Jsou to ony křivky, jichž bodů souřadnice x, y dají vyjadřiti co racionální funkce jediné proměnné (parametr).

Tak na př. dvě rovnice

$$x=a+\alpha u$$
$$y=b+\beta u$$

vyjadřují nejjednodušší křivku racionální — přímku. Neboť vyloučením parametru u jde z rovnic těch

$$\begin{vmatrix} \alpha, & a-x \\ \beta, & b-y \end{vmatrix}=0.$$